

## Höhere Mathematik I.2

### Übung 3: Ableitung, Differenzial und Tangente, Differenziationsregeln

- Ein Fahrzeug bewegt sich nach  $s(t) = 20 + 10t + 100t^2 - 30t^3$ . Dabei wird der Weg  $s$  in Kilometern, die Zeit  $t$  in Stunden gemessen.
  - Differenzieren Sie die Funktion  $s(t)$ ! Welchen Weg hat das Fahrzeug nach einer Stunde, d.h. zum Zeitpunkt  $t = 1$ , zurückgelegt, mit welcher Geschwindigkeit fährt es da?
  - Geben Sie das Differenzial von  $s$  bezüglich  $t$  zum Zeitpunkt  $t = 1$  an! Welche Strecke würde das Fahrzeug in 1, 6, 30 bzw. 60 Minuten zurücklegen, wenn es die Geschwindigkeit, mit der es nach einer Stunde fährt, beibehalten würde?
  - Vergleichen Sie die in b) berechneten Werte des Differenzials mit den tatsächlichen Wegänderungen!
  - Die Zeit  $t$  sei mit einer Genauigkeit von 5 Minuten zu  $t = 1$  bestimmt. Schätzen Sie mithilfe des Differenzials den Fehler bei der Bestimmung von  $s(t)$  ab!
  - Approximieren Sie die Funktion  $s(t)$  in der Nähe von  $t = 1$  durch eine Gerade! Welchen Weg hätte das Fahrzeug nach 61, 66, 90 bzw. 120 Minuten zurückgelegt, wenn es die Geschwindigkeit, mit der es nach einer Stunde fährt, beibehalten würde? Vergleichen Sie die Werte mit dem tatsächlich zurückgelegten Weg!
- Für die Produktion von  $x \leq 2000$  Einheiten einer Ware laute die Gesamtkostenfunktion  $K(x) = 1500 + 5x - 0,001x^2$ .
  - Ermitteln Sie die durchschnittlichen Kosten pro Einheit, die bei der Produktion von  $x$  Einheiten entstehen (Durchschnittskostenfunktion) sowie die Grenzkostenfunktion!
  - Bestimmen Sie für  $x = 1000$  und  $x = 1900$  jeweils die Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkosten sowie die tatsächlichen Mehrkosten für die Produktion einer zusätzlichen (d.h. der 1001. bzw. 1901.) Einheit!
  - Approximieren Sie  $K(x)$  in der Nähe von  $x_0 = 1900$  durch eine Gerade und geben Sie das Differenzial an!
  - Bestimmen Sie mit Hilfe des Differenzials näherungsweise die Kosten für die Herstellung zweier zusätzlicher Einheiten, wenn bereits 1900 Einheiten produziert sind, und vergleichen Sie das Ergebnis mit den tatsächlichen Mehrkosten!
- Differenzieren Sie nach  $x$ :
  - $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$ ,    b)  $y = x + \sqrt{x}$ ,    c)  $y = x + \sqrt{x^2 + 3}$ ,    d)  $y = x \sin(ax + 3)$ ,
  - e)  $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ ,    f)  $y = \frac{\cos x}{x^2}$ ,    g)  $y = (\sqrt{a} - \sqrt{bx + c})^2$ ,    h)  $y = \frac{(x+1) \sin(x+1)}{(x-1)^2}$  !
- Differenzieren Sie  $y = (x \cos x)^x$  !  
**Hinweis:**  $a^x = e^{x \ln a}$