

Höhere Mathematik I.2

Prüfungsklausur

Allgemeine Hinweise: Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten!

Schreiben Sie alle wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Ergebnis nachvollziehbar auf!

Zugelassene Hilfsmittel: ein mit Namen versehenes beidseitig beliebig beschriftetes Blatt im Format A4

1. (6 Punkte)

Sei $f(x) = e^{\sin x} - a(x+x^3)$.

- Entwickeln Sie $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel bis zum kubischen Glied! (Das Restglied muss nicht angegeben werden.)
- Wie muss man den Parameter a wählen, damit $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ einen Extremwert hat?

2. (7 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' + 2xy = 4x e^{x^2}$!

3. (7 Punkte)

Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$!

4. (10 Punkte)

Ein Unternehmen stellt unter Verwendung von 3 Rohstoffen 3 Erzeugnisse her, wobei der Verbrauch an den einzelnen Rohstoffen gewisse Fonds nicht überschreiten darf:

in gewissen Einheiten	Erzeugnis A	Erzeugnis B	Erzeugnis C	Fonds
Bedarf an Rohstoff 1 je Stück	1	2	3	3
Bedarf an Rohstoff 2 je Stück	2	3	1	12
Bedarf an Rohstoff 3 je Stück	3	1	2	12
Gewinn je Stück	4	3	3	

Unter den vorgegebenen Bedingungen soll der Gewinn maximiert werden.

- Stellen Sie das mathematische Modell der Optimierungsaufgabe auf!
- Lösen Sie die Optimierungsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus! Wie viele der einzelnen Erzeugnisse sind herzustellen, welcher Gewinn ist erzielbar?
- Welche Bedeutung haben die mit dem Simplexalgorithmus ermittelten Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

5. (10 Punkte)

Betrachtet wird die Funktion $f(x,y) = x(\ln x + y^4 - 32y + 47)$ für $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte dieser Funktion!
- Ermitteln Sie mithilfe der Richtungsableitung in Richtung $(4 \ 3)^T$ näherungsweise, wie sich $f(x,y)$ ändert, wenn man sich von $(x,y) = (1, 1)$ nach $(x,y) = (1,004, 1,003)$ bewegt!
- In welche Richtung wächst $f(x,y)$ ausgehend von $(x,y) = (1, 1)$ am stärksten?