

Höhere Mathematik I.2

Prüfungsklausur

Allgemeine Hinweise: Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten!

Schreiben Sie alle wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Ergebnis nachvollziehbar auf!

Zugelassene Hilfsmittel: ein mit Namen versehenes beidseitig beliebig beschriftetes Blatt im Format A4

1. (8 Punkte)

Berechnen Sie

$$\text{a) } \int \frac{\cos x \, dx}{(\sin x + 2)^2}, \quad \text{b) } \int_5^{\infty} \frac{dx}{x^5}, \quad \text{c) } \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin 2x}{\sin^2 x} \right), \quad \text{d) } \frac{\partial}{\partial x} \frac{x \cos y}{x^2 + y^2} !$$

2. (7 Punkte)

Betrachtet wird die Gleichung $x^4 = 4x + 4$.

- Ermitteln Sie auf grafischem Wege, wie viele reelle Lösungen diese Gleichung hat und wo diese ungefähr liegen!
- Nun soll die Gleichung näherungsweise mithilfe des Newtonverfahrens gelöst werden. Geben Sie die Iterationsvorschrift an und führen Sie vom Startwert $x_0 = 0$ ausgehend zwei Iterationsschritte aus!
- Wählen Sie einen zur Bestimmung einer anderen Lösung der Gleichung geeigneten Startwert und führen Sie von diesem ausgehend einen Iterationsschritt des Newtonverfahrens aus!

3. (6 Punkte)

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems $\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y \\ \dot{y} &= 6x - 3y \end{aligned} !$

4. (10 Punkte)

Ein Eisverkäufer verkauft Eisportionen „Vanilletraum“ mit 3 Kugeln Vanille- und 1 Kugel Schokoeis sowie „Schokotraum“ mit 1 Kugel Vanille- und 3 Kugeln Schokoeis. Er erzielt pro Portion Vanilletraum einen Gewinn von 3 Geldeinheiten und pro Portion Schokotraum einen Gewinn von 2 Geldeinheiten. Zur Verfügung stehen 630 Kugeln Vanille- und 450 Kugeln Schokoeis. Wie viele Portionen der beiden Sorten müssen verkauft werden, um den in dieser Situation maximal möglichen Gewinn zu erreichen? Stellen Sie das mathematische Modell hierzu auf und lösen Sie es mit dem Simplexverfahren!

5. (9 Punkte)

Betrachtet wird die Funktion $f(x, y) = y - x^2 + 2x$.

- Stellen Sie die Funktion grafisch durch Niveaulinien dar!
- Ermitteln Sie für den Punkt $(x, y) = (0, 1)$ die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $f(x, y)$ sowie die Richtungsableitung in diese Richtung! Zeichnen Sie die Richtung in das Niveaulinienbild ein!
- In welche Richtung ist die Richtungsableitung im Punkt $(x, y) = (0, 1)$ gleich 0? Zeichnen Sie auch diese Richtung in das Bild ein!
- Welche Beziehung besteht zwischen der Niveaulinie durch den Punkt $(x, y) = (0, 1)$ und der Gerade mit der bei c) ermittelten Richtung durch diesen Punkt?