

Höhere Mathematik I.1

Übung 9: Homogene lineare Gleichungssysteme, Rang

1. Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Gleichungssysteme

$$\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 0 \\ \text{a) } 3x + y - 5z = 0, \quad \text{b) } 3x + y - 5z = 0, \quad \text{c) } -2x + 4y - 6z = 0 \quad ! \\ 2x - 3y + 3z = 0 \quad \quad \quad 5x - 3y + z = 0 \quad \quad \quad 3x - 6y + 9z = 0 \end{array}$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Lösungsmengen der Gleichungssysteme, der Anzahl der Variablen und Gleichungen und den Rängen der Koeffizientenmatrizen?

2. Gegeben sei das Gleichungssystem
$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{array}$$

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems!
- Geben Sie drei linear unabhängige spezielle Lösungen des Gleichungssystems an!
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Lösungsmenge, der Anzahl der Variablen und Gleichungen und dem Rang der Koeffizientenmatrix?

3. Welchen Rang haben die Matrizen

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} ?$$

4. a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} !$$

b) Welche Dimension hat die lineare Hülle der Vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix}$?
Geben Sie eine Basis dieser linearen Hülle an! Was stellt sie geometrisch dar?

c) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & a \\ 4 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -13 & 18 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit vom Parameter a !

d) Stellen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}$ als Linearkombinationen der Basis aus b) dar, falls das möglich ist!