

Höhere Mathematik I.1

Prüfungsklausur

**Allgemeine Hinweise:** Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten!  
Schreiben Sie alle wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Ergebnis nachvollziehbar auf!

**Zugelassene Hilfsmittel:** ein mit Namen versehenes beidseitig beliebig beschriftetes Blatt im Format A4

1. (7 Punkte)

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a)  $\frac{x^3 - y^2 - z}{z + y^2 - x^3}$ ,      b)  $\sqrt[24]{x^8}$ ,      c)  $\frac{\ln 16 - \ln 4}{\ln 2}$ ,      d)  $\left(\cos 0 - \cos \frac{\pi}{3}\right) \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{6}\right) !$

**Hinweis:** Achten Sie bei b) darauf, dass Ihr Ergebnis für alle reellen Zahlen  $x$  gültig ist!

2. (7 Punkte)

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form  $a+bi$  und in Polarform dar:

a)  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$ ,      b)  $\frac{15 - 9i}{(2+i)^2 + 1 - 3i} !$

3. (4 Punkte)

- a) Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit von  $n$  Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  ( $n \geq 1$ )!
- b) Erläutern Sie die geometrische Bedeutung des Begriffs anhand der möglichen Lagebeziehungen von drei Vektoren im dreidimensionalen Raum!

4. (10 Punkte)

Gegeben sei das Gleichungssystem 
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 2 \\ \lambda x + y + 2z &= 1 \end{aligned} .$$

- a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems!
- b) Für welche  $\lambda$  ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?
- c) Für welche  $\lambda$  ist das Gleichungssystem mehrdeutig lösbar?
- d) Für welche  $\lambda$  ist das Gleichungssystem unlösbar?
- e) Berechnen Sie die allgemeine Lösung im Falle c)!
- f) Wie können die Ergebnisse von b) – d) geometrisch interpretiert werden?

5. (6 Punkte)

- a) Zerlegen Sie den Vektor  $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$  in eine zur Ebene  $x+y-2z=0$  orthogonale Komponente und eine Komponente in dieser Ebene!
- b) Geben Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt  $(7, 5, 0)$  auf die Ebene  $x+y-2z=0$  an und bestimmen Sie den Abstand zwischen diesem Punkt und der Ebene!

6. (6 Punkte)

Berechnen Sie

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{100} n}{n^2 + 5}$ ,      b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2 + 1)^5 (4n^3 + 2)^3}{(2n + 3)^8 (n + 4)^{11}}$ ,      c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{10^n}$ ,      d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{8^n} !$