

## Höhere Mathematik I.1

### Prüfungsklausur

**Allgemeine Hinweise:** Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten!  
Schreiben Sie alle wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Ergebnis nachvollziehbar auf!

**Zugelassene Hilfsmittel:** ein mit Namen versehenes beidseitig beliebig beschriftetes Blatt im Format A4

#### 1. (7 Punkte)

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a)  $\frac{y-x}{x-y}$ , b)  $\sqrt{x^2}$ , c)  $\left(\cos \pi + \cos \frac{3\pi}{4}\right) \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4}\right)$ , d)  $\frac{2}{x-1} + \frac{x}{x+2} - \frac{x^2+2}{x^2+x-2} - \frac{1}{x}$  !

#### 2. (7 Punkte)

Ermitteln Sie die Lösung der Gleichung  $(1 - i\sqrt{3})z = \frac{12}{3 + i\sqrt{3}}$ , geben Sie diese in algebraischer und in Polardarstellung an! Berechnen Sie außerdem die sechste Potenz dieser Lösung!

#### 3. (4 Punkte)

- a) Wie kann der Winkel zwischen zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren im Raum  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) allgemein definiert werden? Welche Werte kann der so definierte Winkel annehmen?  
b) Die in a) anzugebende Definition kann auch im  $\mathbb{R}^1$ , d.h. in der Menge der reellen Zahlen, angewendet werden. Begründen Sie, welche Werte der so definierte Winkel zwischen zwei von Null verschiedenen reellen Zahlen annehmen kann!

#### 4. (10 Punkte)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2z &= -1 \\ \lambda x + y + 2z &= 2 \\ \lambda y - 4\lambda z &= 15 \end{aligned}$$

- a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems!  
b) Für welche  $\lambda$  ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?  
c) Für welche  $\lambda$  ist das Gleichungssystem mehrdeutig lösbar?  
d) Für welche  $\lambda$  ist das Gleichungssystem unlösbar?  
e) Berechnen Sie die allgemeine Lösung im Falle c)!  
f) Wie können die Ergebnisse von b) – d) geometrisch interpretiert werden?

#### 5. (6 Punkte)

Ermitteln Sie den Abstand der Geraden  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -20 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  !

#### 6. (6 Punkte)

Berechnen Sie

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 10n^2 + 4}{\sqrt[3]{n^{10}} + 2}$ , b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^2(3n+4)}{6n^3 + 5n^2 + 4n + 3}$ , c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16^n}{17^n}$ , d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17^n}{16^n}$  !