

Höhere Mathematik I.1

Prüfungsklausur

**Allgemeine Hinweise:** Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten!  
Schreiben Sie alle wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Ergebnis nachvollziehbar auf!

**Zugelassene Hilfsmittel:** ein mit Namen versehenes beidseitig beliebig beschriftetes Blatt im Format A4

1. (7 Punkte)

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a)  $\frac{y-x}{x-y}$ , b)  $\sqrt{x^2}$ , c)  $\left(\cos \pi + \cos \frac{3\pi}{4}\right) \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4}\right)$ , d)  $\frac{2}{x-1} + \frac{x}{x+2} - \frac{x^2+2}{x^2+x-2} - \frac{1}{x}$  !

2. (7 Punkte)

Ermitteln Sie die Lösung der Gleichung  $(1 - i\sqrt{3})z = \frac{12}{3 + i\sqrt{3}}$ , geben Sie diese in algebraischer und in Polardarstellung an! Berechnen Sie außerdem die sechste Potenz dieser Lösung!

3. (4 Punkte)

- a) Wie kann der Winkel zwischen zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren im Raum  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) allgemein definiert werden? Welche Werte kann der so definierte Winkel annehmen?
- b) Die in a) anzugebende Definition kann auch im  $\mathbb{R}^1$ , d.h. in der Menge der reellen Zahlen, angewendet werden. Begründen Sie, welche Werte der so definierte Winkel zwischen zwei von Null verschiedenen reellen Zahlen annehmen kann!

4. (10 Punkte)

Gegeben sei das Gleichungssystem 
$$\begin{aligned} x + 2z &= -1 \\ \lambda x + y + 2z &= 2 \\ \lambda y - 4\lambda z &= 15 \end{aligned}$$

- a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems!
- b) Für welche  $\lambda$  ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?
- c) Für welche  $\lambda$  ist das Gleichungssystem mehrdeutig lösbar?
- d) Für welche  $\lambda$  ist das Gleichungssystem unlösbar?
- e) Berechnen Sie die allgemeine Lösung im Falle c)!
- f) Wie können die Ergebnisse von b) – d) geometrisch interpretiert werden?

5. (6 Punkte)

Ermitteln Sie den Abstand der Geraden  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -20 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  !

6. (6 Punkte)

Berechnen Sie

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 10n^2 + 4}{\sqrt[3]{n^{10}} + 2}$ , b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^2 (3n+4)}{6n^3 + 5n^2 + 4n + 3}$ , c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16^n}{17^n}$ , d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17^n}{16^n}$  !