

### Höhere Mathematik I.1

## Prüfungsklausur

**Allgemeine Hinweise:** Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten!  
Schreiben Sie alle wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Ergebnis nachvollziehbar auf!

**Zugelassene Hilfsmittel:** ein mit Namen versehenes beidseitig beliebig beschriftetes Blatt im Format A4

#### 1. (6 Punkte)

Ermitteln Sie die komplexe Zahl  $z$ , die die Gleichung  $\frac{-1+i}{10}z + \frac{5+i}{2-i} = \frac{4}{3} + i$  löst!

#### 2. (4 Punkte)

- Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit von  $n$  Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  ( $n \geq 1$ )!
- Erläutern Sie die geometrische Bedeutung des Begriffs anhand der möglichen Lagebeziehungen von drei Vektoren im dreidimensionalen Raum!

#### 3. (9 Punkte)

Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ .

- Berechnen Sie  $\det(A)$  und  $A^{-1}$  in Abhängigkeit vom Parameter  $a$ !
- Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 7 \\ 3x + y + 5z &= 12 \end{aligned}$$

#### 4. (12 Punkte)

Betrachtet werden die Dreiecke  $ABC$  mit den Eckpunkten  $A(1, 0, -1)$ ,  $B(2, 2, 1)$ ,  $C(4, -2, 5)$  und  $DEF$  mit den Eckpunkten  $D(4, 4, 11)$ ,  $E(5, 6, 13)$  und  $F(7, 2, 17)$ .

- Zeigen Sie, dass die Dreiecke durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen!
- Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Ebenen, in denen die Dreiecke liegen, in parameterfreier Form!
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Dreiecke!
- Die beiden Dreiecke seien Grund- und Deckfläche eines Prismas. Bestimmen Sie dessen Seitenlängen, Höhe und Volumen!

#### 5. (9 Punkte)

- Geben Sie im Falle der Konvergenz die Grenzwerte an, im Falle der Divergenz, ob diese bestimmt oder unbestimmt ist:

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n$ , (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-n}$ , (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-3)^n$ , (iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{n}}$ .

- Bestimmen Sie mithilfe der Formel für die Partialsummen: (i)  $\sum_{n=0}^4 3^n$ , (ii)  $\sum_{n=0}^4 \frac{1}{3^n}$ .

- Geben Sie im Falle der Konvergenz die Summen folgender Reihen an, im Falle der Divergenz, ob diese bestimmt oder unbestimmt ist:

(i)  $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$ , (ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ , (iii)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n$ , (iv)  $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{\frac{1}{n}}$ .