

Höhere Mathematik I.1

Prüfungsklausur

Allgemeine Hinweise: Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten!
Schreiben Sie alle wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Ergebnis nachvollziehbar auf!

Zugelassene Hilfsmittel: ein mit Namen versehenes beidseitig beliebig beschriftetes Blatt im Format A4

1. (6 Punkte)

Ermitteln Sie die komplexe Zahl z , die die Gleichung $\frac{-1+i}{10}z + \frac{5+i}{2-i} = \frac{4}{3} + i$ löst!

2. (4 Punkte)

- Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit von n Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ ($n \geq 1$)!
- Erläutern Sie die geometrische Bedeutung des Begriffs anhand der möglichen Lagebeziehungen von drei Vektoren im dreidimensionalen Raum!

3. (9 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie $\det(A)$ und A^{-1} in Abhängigkeit vom Parameter a !
- Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 7 \\ 3x + y + 5z &= 12 \end{aligned}$$

4. (12 Punkte)

Betrachtet werden die Dreiecke ABC mit den Eckpunkten $A(1, 0, -1)$, $B(2, 2, 1)$, $C(4, -2, 5)$ und DEF mit den Eckpunkten $D(4, 4, 11)$, $E(5, 6, 13)$ und $F(7, 2, 17)$.

- Zeigen Sie, dass die Dreiecke durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen!
- Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Ebenen, in denen die Dreiecke liegen, in parameterfreier Form!
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Dreiecke!
- Die beiden Dreiecke seien Grund- und Deckfläche eines Prismas. Bestimmen Sie dessen Seitenlängen, Höhe und Volumen!

5. (9 Punkte)

- Geben Sie im Falle der Konvergenz die Grenzwerte an, im Falle der Divergenz, ob diese bestimmt oder unbestimmt ist:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-n}, \quad (iii) \lim_{n \rightarrow \infty} (-3)^n, \quad (iv) \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{n}}.$$

- Bestimmen Sie mithilfe der Formel für die Partialsummen: (i) $\sum_{n=0}^4 3^n$, (ii) $\sum_{n=0}^4 \frac{1}{3^n}$.

- Geben Sie im Falle der Konvergenz die Summen folgender Reihen an, im Falle der Divergenz, ob diese bestimmt oder unbestimmt ist:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} 3^n, \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}, \quad (iii) \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n, \quad (iv) \sum_{n=0}^{\infty} 3^{\frac{1}{n}}.$$