

Höhere Mathematik I.1

Prüfungsklausur

Allgemeine Hinweise: Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten!

Schreiben Sie alle wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Ergebnis nachvollziehbar auf!

Zugelassene Hilfsmittel: ein mit Namen versehenes beidseitig beliebig beschriftetes Blatt im Format A4

1. (6 Punkte)

Ermitteln Sie die komplexe Zahl z , die die Gleichung $\frac{2+3i}{2}z + \frac{5+2i}{1+i} = 8+2i$ löst!

2. (5 Punkte)

Für Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$.

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser Ungleichung und dem Wertebereich des Kosinus? Wann ist die Ungleichung mit dem Gleichheitszeichen erfüllt?
- Erläutern Sie die Ungleichung anhand der maximal möglichen Arbeit, die eine Kraft vom Betrag F in Abhängigkeit von ihrer Wirkungsrichtung in eine vorgegebene Richtung \vec{s} verrichten kann!

3. (12 Punkte)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x - 7y + 2z &= -7 \\ x + y - z &= 6 \\ 8x - 2y + \lambda z &= \mu \end{aligned}$$

- Lösen Sie das Gleichungssystem im Spezialfall $\lambda = 2, \mu = 8$ mit dem Gaußschen Algorithmus!
- Für welche Werte der Parameter λ und μ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar bzw. unlösbar? Geben Sie im Falle der mehrdeutigen Lösbarkeit auch die Lösung an! Welche geometrische Bedeutung haben die drei Fälle?

4. (12 Punkte)

Gegeben seien die Punkte $A(1, 0, 0)$, $B(2, -1, -1)$, $C(1, 1, -1)$ und $D(2, 2, -1)$.

- Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC !
- Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene E durch die Punkte A , B und C in parameterfreier Form!
- Bestimmen Sie die Geradengleichung des Lotes von D auf die Ebene E !
- Ermitteln Sie den Fußpunkt dieses Lotes und den Abstand zwischen dem Punkt D und der Ebene E !
- In welchem Winkel schneidet die Gerade durch die Punkte A und D die Ebene E ?

Bemerkung: Als Schnittwinkel zwischen einer Ebene und einer Gerade soll der Winkel bezeichnet werden, unter dem diese sich bei orthogonaler Sicht schneiden.

5. (5 Punkte)

Auf ein unverzinstes Konto werden von einem gewissen Jahr an jährlich 1000 € eingezahlt, außerdem werden jährlich 10 % des Vorjahresguthabens entnommen, so dass das Guthaben am Ende des ersten Jahres 1000 €, am Ende des zweiten Jahres 1900 €, am Ende des dritten Jahres 2710 € beträgt usw.

- Stellen Sie die Entwicklung des Guthabens als Reihe dar!
- Welches Guthaben wird asymptotisch erreicht, wenn dieser Prozess unendlich lange weitergeführt wird?