Mathematik für Wirtschaftsinformatiker und -ingenieure

2003

Vorlesung und Übungen 1996 – ~~2002~~

Reinhold Schneider und Rolf Haftmann

Bearbeitungsstand: ~~26. Juni 2002~~

Gesamtskript einschließlich Updates 1-3
Rücklieferung von SIT nach Slicing am 03.09.2003

Die Vorlesung Mathematik für Wirtschaftsinformatiker und -ingenieure wurde von Prof. Schneider an der Technischen Universität Chemnitz als dreisemestriger Kurs beginnend mit dem Wintersemester 1996/97, 1997/98, 1998/99 und 1999/2000 gehalten. Der Teil Mathematik III wurde zusätzlich auch im Wintersemester 2001/02 für Studierende des Wirtschaftsingenieurwesens gelesen. Als Beispiel für den Vorlesungsablauf ist der des mit dem Wintersemester 1999/2000 begonnenen Zyklus im Kapitel 21 angegeben. Bei den Übungen wurden jeweils Aufgabenblätter für die Gruppenübungen als auch zur individuellen Bearbeitung durch die Studierenden als Hausübungen ausgegeben. Für letztere wurden dann später die Lösungen veröffentlicht.

Das Vorlesungsskript wurde unter Mitarbeit von Helmut Harbrecht und Michael Konik erstellt. Die vorliegenden Skriptteile unterschiedlichen Bearbeitungsstandes wurden 2002 von Tino Eibner und Rolf Haftmann zu einem Gesamtmanuskript zusammengestellt. Dabei wurden einige Passagen überarbeitet, neu gefasst bzw. ergänzt sowie ein Kapitel zur Finanzmathematik hinzugefügt.

Die Auswahl der Aufgaben und Erstellung der Folien wurde von Rolf Haftmann besorgt. Dabei wurde in einigen Fällen auf in anderen Lehrveranstaltungen der Fakultät für Mathematik genutztes Aufgabenmaterial, insbesondere aus der Mathematikausbildung für Wirtschaftskaufleute unter Prof. Luderer, zurückgegriffen. Lösungen der Übungsaufgaben sind im vorliegenden Manuskript im Wesentlichen für solche Aufgaben enthalten, die einmal als Hausübungsaufgaben gestellt worden sind. Das Manuskript enthält insgesamt ~~372~~ Aufgaben, davon ~~126~~ mit ausführlichen Lösungen bzw. mit Folien.

Die Klausuren Mathematik I und II wurden ab 2001 von Prof. Martini gestellt. An der Erarbeitung dieser Klausuren waren auch Lars Göhler und Walter Wenzel beteiligt.

Ein Teil der Abbildungen wurde mit Maple erzeugt. Maple ist ein eingetragenes Warenzeichen der Fa. Waterloo Maple Inc.

Zeichenerklärung

Aussagenlogik

$A \wedge B$	–	Konjunktion, „A und B“
$A \vee B$	–	Alternative, Disjunktion, „A oder B“
$A \Rightarrow B$, $B \Leftarrow A$	–	Implikation, „aus A folgt B“
$A \Leftrightarrow B$	–	Äquivalenz, „A äquivalent B“
$\neg A$	–	Negation, „nicht A“
Platzhalter für weitere Zeichen		

Mengenlehre

$\emptyset$	–	Leere Menge
$\{\quad\}$	–	Endliche, unendliche Menge, z.B. $\{2, 3, 4\}$
$\in$	–	Element von
$\notin$	–	Nicht Element von
$\subseteq, \subset$	–	Teilmenge, echte Teilmenge von
$\not\subseteq, \not\subset$	–	Keine Teilmenge, keine echte Teilmenge von
Platzhalter für weitere Zeichen		

Mengenoperationen

$\setminus$	–	Komplementärmenge, Mengendifferenz
$\cap$	–	Durchschnitt von zwei Mengen
$\bigcap_{i=1}^{n}$	–	Durchschnitt von n Menge, $n = \infty$ ist möglich
$\cup$	–	Vereinigung von zwei Mengen
$\bigcup_{i=1}^{n}$	–	Vereinigung von n Mengen, $n = \infty$ ist möglich
$\times$	–	Produkt zweier Mengen
Platzhalter für weitere Zeichen		

Zahlenklassen

$\mathbb{N}$	–	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	–	$= \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	–	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	–	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	–	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	–	Menge der komplexen Zahlen
$\infty, -\infty$	–	Plus- und Minus-Unendlich
Platzhalter für weitere Zeichen		

Komplexe Zahlen

$\mathrm{Im}\,(z)$	–	Imaginärteil einer komplexen Zahl
$\mathrm{Re}\,(z)$	–	Realteil einer komplexen Zahl
$\bar{z}$	–	Konjugiert komplexe Zahl
$\lvert z \rvert$	–	Absolutbetrag einer komplexen Zahl
Platzhalter für weitere Zeichen		

Konstanten

i	–	Imaginäre Einheit
e	–	Eulersche Zahl
π	–	Pi
Platzhalter für weitere Zeichen		

Beziehungszeichen

$<, \nless$	–	Kleiner als, nicht kleiner als
$>, \ngtr$	–	Größer als, nicht größer als
$=, \neq$	–	Gleich, nicht gleich
$\approx$	–	Ungefähr gleich
$\leq, \nleq$	–	Kleiner gleich, nicht kleiner gleich
$\geq, \ngeq$	–	Größer gleich, nicht größer gleich
$:=$	–	Ist definiert als, ist laut Definition
$\rhd\lhd$	–	Zeichen stehen für „$\leq$“, „$\geq$“ oder „$=$“ Platzhalter für weitere Zeichen

Intervalle

$[a, b]$	–	Abgeschlossenes Intervall
(a, b)	–	Offenes Intervall
$(a, b]$, $[a, b)$	–	Halboffenes Intervall
Platzhalter für weitere Zeichen		

Finanzmathematik

p.a.	–	Per anno, pro Jahr
$B_n^{\text{nach}}, B_n^{\text{vor}}$	–	Barwert der nachschüssigen (vorschüssigen) Rente
$E_n^{\text{nach}}, E_n^{\text{vor}}$	–	Endwert der nachschüssigen (vorschüssigen) Rente
Platzhalter für weitere Zeichen		

Analysis

$\rightarrow \; \mapsto$	–	Abbildung, Funktion, z.B. $f : [a,b] \rightarrow [c,d], x \mapsto x^2$
$f(x), g(x), G(x_1, x_2), h(x,y,z) \dots$	–	Bezeichnungen für eine Funktion
$\circ$	–	Superposition, Verknüpfung zweier Funktionen
$(x,y), (x_1, \dots, x_n)$	–	Geordnetes Paar, Geordnetes n-Tupel, Punkt
Δx	–	Änderung, Differenz, Zuwachs von x
d	–	Differential
$\frac{d}{dx}, \frac{d}{dx^2}, \dots, \frac{d}{dx^n}$	–	Bildung der ersten, zweiten, ... Ableitungen
$f', f'', \dots, f^{(n)}, \dot{x}, \ddot{x}$	–	Erste, zweite, dritte, n–te Ableitung
$\int\limits_a^b, \int, \int\int$	–	Integral von a bis b
$\Big\vert_a^b, \quad \Big]_a^b, \quad \Big]_{x=a}^b$	–	Von a bis b
$\Big\vert_{x=0}$	–	An der Stelle $x = 0$
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	–	Summenzeichen, $n = \infty$ ist möglich
$\prod\limits_{i=1}^{n}$	–	Produktzeichen, $n = \infty$ ist möglich
$\lim\limits_{n \to \infty}$	–	Grenzwert, Limes
$\rightarrow$	–	Konvergenzpfeil, z.B. $a_n \rightarrow a$
$\sup\limits_x$	–	Supremum über alle x
$\inf\limits_x$	–	Infimum über alle x
$n!$	–	Fakultät
$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$	–	Binomialkoeffizient, „a über b“
$\exists$	–	Existenzquantor, „es gibt ein“
$\forall$	–	Allquantor, „für alle“
$\vert a\vert$	–	Betrag von a
$\vert\vert a\vert\vert, \Vert \cdot \Vert$	–	Norm von a, Vektor- bzw. Matrixnorm
$\mathcal{H}, \mathcal{H}(t)$	–	Krümmung einer Kurve
$(\boldsymbol{x}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$	–	Bezeichnung für eine Folge
$\frac{\partial f}{\partial x_j}$	–	Bildung der partiellen Ableitung
$f_{x_j}, \tilde{f}(x)$	–	partielle Ableitung
∇f, $\operatorname{grad} f$	–	Gradient einer Funktion
$\partial_a f(\boldsymbol{x})$	–	Richtungsableitung einer Funktion
$H_f(\boldsymbol{x})$	–	Hessematrix
Δf	–	Laplaceoperator
$\mathbf{x}^{\star}$	–	Fixpunkt Platzhalter für weitere Zeichen

Griechisches Alphabet

A, α	–	Alpha
B, β	–	Beta
Γ, γ	–	Gamma
Δ, δ	–	Delta
E, ε	–	Epsilon
Z, ζ	–	Zeta
H, η	–	Eta
$\Theta, \theta, \vartheta$	–	Theta
I, ι	–	Iota
K, κ	–	Kappa
Λ, λ	–	Lambda
M, μ	–	My
N, ν	–	Ny
Ξ, ξ	–	Xi
O, o	–	Omikron
Π, π	–	Pi
P, ρ	–	Rho
Σ, σ	–	Sigma
T, τ	–	Tau
Υ, υ	–	Ypsilon
Φ, φ	–	Phi
X, χ	–	Chi
Ψ, ψ	–	Psi
Ω, ω	–	Omega
Platzhalter für weitere Zeichen		

Lineare Algebra

$(x_i)_{i=1}^n$	–	Vektor mit n Komponenten
$(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$	–	Matrix mit m x n Einträgen
A^T, x^T	–	Transponieren einer Matrix bzw. eines Vektors
A^{-1}	–	Invertieren einer Matrix
e_i	–	Einheitvektoren
I_m	–	Einheitsmatrix
$\delta_{i,j}$	–	Das Kroneckersymbol
$\text{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$	–	Lineare Hülle von n Vektoren
$rang(A)$	–	Rang einer Matrix
$detA$	–	Determinante einer Matrix
$\mathbb{R}^{m\times n}, \mathbb{C}^{m\times n}$	–	Mehrdimensionaler Raum der reellen/komplexen Zahlen
$< x, y >, x \cdot y$	–	Skalarprodukt zweier Vektoren
$a \times b$	–	Kreuzprodukt zweier Vektoren
$a \cdot (b \times c)$	–	Spatprodukt dreier Vektoren
$\dim$	–	Dimension eines Raumes
$\perp$	–	Orthogonalität
$\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$	–	Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Platzhalter für weitere Zeichen

Platzhalter für weitere Zeichenerklärungen

Wiederholungsaufgaben

0.1. Für 5 jeweils zu 80 % einer Vollzeitkraft beschäftigte Personen entsteht ein monatlicher Lohnaufwand von 6800 €. Es stehen zusätzlich monatlich Lohnmittel in Höhe von 3825 € zur Verfügung. Dafür sollen zu gleichem Stundenlohn 6 Arbeitskräfte eingestellt werden. Zu welchem Anteil können sie beschäftigt werden?

0.2. Am 1.1.2002 wurden im öffentlichen Dienst Ostdeutschlands die Vergütungen von 88.5 % auf 90 % der Westbezüge erhöht. Um wieviel Prozent erhöhten sich dabei die Vergütungen?

0.3. Aus einer 92%-igen und einer 64%-igen Schwefelsäure sollen 3.5 kg einer 72%-igen Schwefelsäure hergestellt werden. Man berechne die Massen der zu mischenden Säuren!

0.4. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:
a) $20x^2\frac{3a}{5x} - \frac{a(x+6)}{3}$, b) $\frac{a-b}{2x} : \frac{b-a}{2x}$, c) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$, d) $\frac{2x^4+2x^3+7x^2+5x+5}{x^2+x+1}$,

e) $x^{3k+2}3x^{4k+7}7x^{n-9-7k}$, f) $\left(\dfrac{x^2y}{u^2v^2}\right)^4 : \left(\dfrac{xy^3}{u^2v}\right)^2$, g) $(-a)^{-2}a$, h) $-a^{-2}a$,

i) $\sqrt[5]{32y^{10}}$, j) $\sqrt{a^2b^4}\sqrt[3]{c^3}$, k) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{24}}}$!

0.5. Lösen Sie die Gleichungen a) $8x^2 - 14x = 9$, b) $x^4 - \dfrac{7}{4}x^2 - \dfrac{9}{8} = 0$!

0.6. Das Verhältnis der Differenz von Verkaufs- und Einkaufspreis zum Verkaufspreis einer Ware wird als Handelsspanne bezeichnet. Eine Faustregel des Handels lautet, dass bei 10 % Preisnachlass der Umsatz um 70 % steigen muss, um den gleichen Gewinn zu erzielen. Von welcher Handelsspanne beim nicht rabattierten Preis muss man ausgehen, um zu dieser Aussage zu gelangen?

0.7. Vereinfachen Sie den Ausdruck $\dfrac{(2^{n+2})^2}{32 \cdot 4^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n - 1} - \dfrac{1}{2^n + 1} - \dfrac{2}{4^n - 1}$!

Platzhalter für weitere Aufgaben

Kapitel 1
Grundlagen

Im Kapitel Grundlagen führen wir die Grundbegriffe der elementaren Logik ein. Die logischen Operationen finden Eingang in mathematische Schlußweisen und Beweise sind somit von grundlegender Bedeutung, auch wenn sie in den folgenden Kapiteln etwas in den Hintergrund treten.

1.1 Elementare Logik

Zu Beginn wollen wir definieren und damit festlegen, wann wir ein umgangssprachliches Konstrukt als Aussage auffassen wollen. Können wir einem solchen Konstrukt einen Wahrheitswert „wahr“ oder „falsch“ zuordnen, so handelt es sich um eine Aussage. Wir fassen dies in der folgenden Definition zusammen.

Definition 1.1. *Eine* **Aussage** *(A) ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.*

Der Wahrheitswert $v(A)$ einer Aussage A ist entweder wahr, d.h. $v(A) = w$, oder falsch, d.h. $v(A) = f$.

- Keine Aussage ist sowohl wahr oder falsch oder sonst etwas.
- Aussagen sind nicht paradox („Alle Kreter lügen“).

Tautologien sind stets wahre Aussagen.

1.1.1 Logische Operationen

Liegt uns mehr als nur eine logische Aussage vor, so können wir diese in natürlicher Weise verknüpfen und damit Abhängigkeiten ausdrücken. In dem folgenden Abschnitt besprechen wir die wichtigsten logischen Operationen mit deren Hilfe wir neue (komplexere) Aussagen gewinnen.

Negation (Verneinung) Die Negation liefert uns das Gegenteil einer gegebenen Aussage. Ist eine Aussage A wahr, so ist die Negation davon falsch und umgekehrt. Zweimalige Anwendung der Negation der Aussage A führt wieder auf A. Eine mathematische Operation, die bei zweifacher Anwendung den Ausgangszustand als Ergebnis hat heißt **involutorisch**.

Die Abbildung 1.1 zeigt die Wahrheitswerte der Aussage A und ihrer Negation . Solche Wahrheitstabellen benutzen wir unter anderem um Behauptungen für logische Ausdrücke (beispielsweise Gleichheit) nachzuweisen.

Zwei logische Ausdrücke sind äquivalent, wenn ihre Wahrheitstabelle in allen möglichen Fällen der Kombination von Wahrheitswerten übereinstimmen.

$v(A)$	$v(\neg A)$
w	f
f	w

Abbildung 1.1: Wahrheitstabelle Negation

Verknüpfungen Die Wahrheitstabelle 1.2 zeigt die wichtigsten logischen Verknüpfungen und ihre Wahrheitswerte. Dies sind die „und"–Verknüpfung als Ausdruck dafür, daß zwei Aussagen gleichzeitig erfüllt sein sollen. Die „oder"–Verknüpfung repräsentiert die Alternative. Die Implikation „$\Leftarrow$" beschreibt die Folgerung und die Äquivalenz die Gleichheit zweier Aussagen.

In der unteren Zeile der Tabelle sind jeweils äquivalente Formulierungen angegeben.

Rechenregeln Mit logischen Aussagen können wir in einem gewissen Sinne „Rechnen", genauer meinen wir damit Umformungen durchführen, die den Wahrheitswert der Aussage nicht verändern. Die Abbildung 1.3 zeigt Regeln für das „Rechnen" mit Aussagen.

$v(A)$	$v(B)$	Konjunktion („*A und B*") $v(A \wedge B)$	Disjunktion („*A oder B*") v $(A \vee B)$	Implikation $v(A \Rightarrow B)$ „A folgt B"	Äquivalenz $v(A \Leftrightarrow B)$ A äquiv. B
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w
				(¬ A) ∨ B	$(A \Leftarrow B)$ $\wedge(B \Leftarrow A)$

Abbildung 1.2: Wahrheitstabelle logischer Verknüpfungen

1.1.2 Beweistechniken

Die Techniken mathematischer Beweise bauen auf die Gesetze der Logik auf, weshalb die logischen Schlußweisen für uns von immenser Bedeutung sind, auch wenn sie in diesem Skript wegen des Wegfalls der Beweise nicht im Vordergrund stehen.

1. **Der direkte Beweis**
   benutzt die *Transitivität* $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.
   Die Aussage $A \Rightarrow C$ wird in eine Kette wahrer Schlußfolgerungen zerlegt.

2. **Der indirekte Beweis** benutzt $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

   Es gilt $\neg(A \Leftrightarrow B) = \neg(\neg A \vee B) = (A) \wedge \neg B$, damit also $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$.

   Im Falle, daß wir die Äquivalenz zweier Aussagen nachweisen wollen, zeigen wir in der Praxis, daß die Behauptung $A \wedge \neg B$ stets falsch ist.

3. **Vollständige Induktion** Die vollständige Induktion weist die Behauptung für alle Elemente einer Menge nach unter Rückführung auf Elemente für die die Behauptung bereits gezeigt wurde. Eine Beschreibung im Detail erfolgt zu einem späteren Zeitpunkt.

- $v(A \vee \neg A) = w$ bzw.
- $A \vee \neg A \Leftrightarrow w$
- $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ doppelte Verneinung
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ de Morgan'sche Gesetze.
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ de Morgan'sche Gesetze.
- $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ Kommutativgesetz
- $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ Assoziativgesetz
- $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ Distributivitätsgesetz
- $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ Distributivitätsgesetz
- $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ Transitivität

Abbildung 1.3: Rechenregeln im Umgang mit Aussagen

1.2 Grundbegriffe der Mengenlehre

1.2.1 Mengenbegriff

Ein weiteres grundlegendes Gebiet der Mathematik ist die Mengenlehre. Wir werden hier sehen, daß bezüglich Enthaltenseins–Beziehungen von Mengen analoge Gesetze zur Logik gelten. Wir definieren zunächst, was wir unter einer Menge verstehen wollen.

Definition 1.2. *Eine* **Menge** *ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.*

Die Objekte einer Menge heißen ihre **Elemente**. Zum Beispiel ist $a_1 \in A$ Element der Menge

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

B heißt **Teilmenge** von $A, (B \subseteq A)$, falls jedes Element von B auch in A ist.

1.2.2 Mengenoperationen

Die wichtigsten Mengenoperationen sind im folgenden kurz in ihrer formalen Schreibweise aufgelistet und graphisch dargestellt.

Komplementärmenge von B in A Wir nehmen an, daß die Menge B vollständig in A enthalten sei und verstehen unter der Komplementärmenge von B in A alle Elemente, die in A, nicht aber in B enthalten sind. Wir schreiben dafür

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$$

.

Die Abbildung 1.4 zeigt die Komplementärmenge von B in A.

Durchschnitt von A und B Hier wollen wir die Forderung, daß B in A enthalten ist fallen lassen, sonst wäre die Menge B trivialerweise der Durchschnitt. Wir schreiben dafür

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Abbildung 1.5 stellt graphisch den Durchschnitt der beiden Mengen A und B dar.

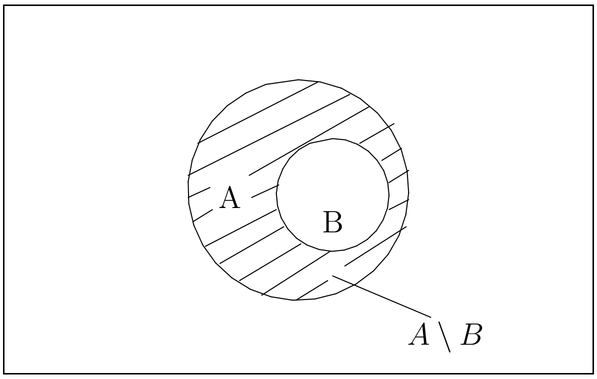


Abbildung 1.4: Venn – Diagramm der Menge A „ohne“ B

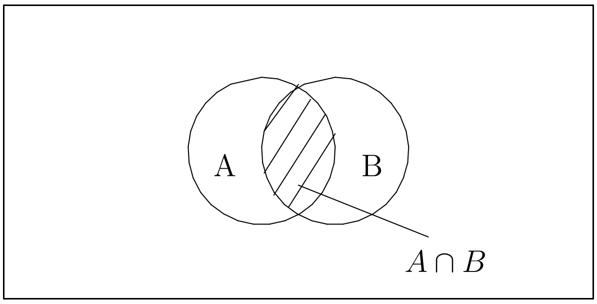


Abbildung 1.5: Venn – Diagramm der Menge A „geschnitten“ B

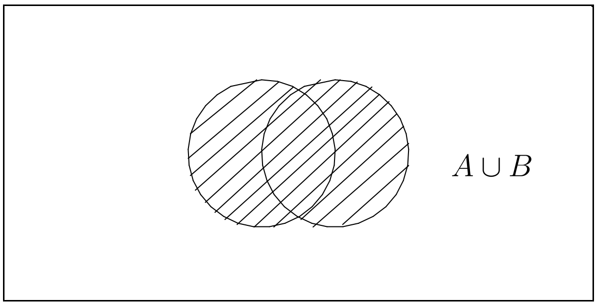


Abbildung 1.6: Venn – Diagramm der Menge A „vereinigt“ B

Vereinigung von A und B Die Vereinigung zweier Mengen umfaßt alle Elemente, die in der Menge A, in B oder in beiden enthalten sind. Wir schreiben dafür

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Die Vereinigung zweier Mengen A und B ist in Abbildung 1.6dargestellt.

Produktmenge von A und B Die Produktmenge zweier Mengen A und B erhalten wir durch Paarbildung von Elementen, wobei ein Element eines jeden Paares in der Menge A und das andere in der Menge B ist. Die Produktmenge enthält alle auf diese Art möglichen Kombinationen. Wir schreiben dafür

$$A \times B := \{(a, b) \quad | \quad a \in A \wedge b \in B\}.$$

Abschließend sind analoge Rechenregeln zu denen bei logischen Aussagen aufgelistet.

$$\begin{aligned}
A \cap B &= B \cap A \\
A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C, \\
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}$$

De – Morgan'sches Gesetz

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

1.2.3 Funktionsbegriff

Definition 1.3. *Eine Vorschrift die jedem Element x der Menge D_f genau ein Element $y = f(x)$ einer Menge W zuordnet, heißt* **Funktion f** *von D_f nach W. $D_f$heißt der* **Definitionsbereich** *von f und $f(x)$ heißt der* **Funktionswert** *von f an der Stelle x. Die Menge W heißt der* **Wertebereich** *der Funktion.*

Schreibweise: $f : D_f \to W\ ,\ x \to f(x)$

Die Menge Graph $f := \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$ heißt **Graph** von f.

Definition 1.4. *Eine Funktion heißt*

i) **injektiv** *, falls aus* $x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in D_f$ *auch* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *folgt;*

ii) **surjektiv***, falls zu jedem* $g \in W$ *ein* $x \in D_f$ *existiert mit* $g = f(x)$*;*

iii) **bijektiv***, falls* f *injektiv* und *surjektiv ist, in diesem Fall existiert eine* **Umkehrfunktion** $f^{-1} : W \to D_f$ *mit* $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$*.*

1.3 Zahlen

Im nächsten Abschnitt wenden wir uns den verschiedenen Klassen von Zahlen zu und wollen uns deren Hierarchie verdeutlichen.

1.3.1 Hierachie der reellen Zahlen

Die Menge der Zahlen 1, 2, 3 usw. nennen wir die **natürlichen Zahlen** und schreiben dafür

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Die Zahl 0 ist nicht in der Menge vorhanden. Die Zugehörigkeit der Null zur Menge bringen wir explizit durch den Index 0 zum Ausdruck

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Negative Zahlen sind in der Menge der **ganzen Zahlen** enthalten

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Alle Zahlen, die wir durch einen Bruch zweier ganzen Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0$ darstellen können, heißen **rationale Zahlen** . Mit dem Nenner $q = 1$ sind also auch die ganzen Zahlen enthalten.

Die Menge der reellen Zahlen besteht aus allen Dezimalbrüchen und ist eine Obermenge der rationalen Zahlen.

Es gelten die Beziehungen $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Es gilt in der Menge der ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; a+b \in \mathbb{Z},\; -a \in \mathbb{Z}$ und außerdem in der Menge der rationalen Zahlen $a, b \in \mathbb{Q},\, b \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Die Abbildung 1.7 zeigt verschiedene Repräsentanten der einzelnen Mengen auf der Zahlengerade.

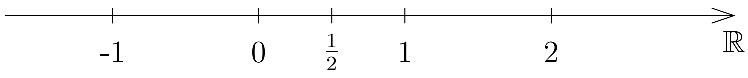


Abbildung 1.7: Die Zahlengerade

Die ganzen Zahlen bilden bezüglich der Addition eine **Gruppe** , daß heißt es existiert ein neutrales Element nämlich 0 sowie ein inverses Element bezüglich der Addition. Außerdem liegt die Addition zweier Elemente wieder in der Menge. Diese drei Eigenschaften sind kennzeichnend für die mathematische Struktur „Gruppe“.

Die Menge der rationalen Zahlen bildet darüberhinaus auch noch eine Gruppe bezüglich der Multiplikation mit dem neutralen Element „1“.

1.3.2 Ordnungsrelationen in der Menge der reellen Zahlen

Der Zahlenstrahl zeigt bereits, daß die Zahlen einer **Ordnungsrelation** unterliegen. So gilt für Zahlen stets eine der folgenden drei Beziehungen

$a < b$ („ a kleiner b “)
$a = b$ („ a gleich b “)
$a > b$ („ a größer b “).

Wenn wir schreiben $a \leq b$, so wollen wir $a < b$, als auch $a = b$ zulassen und umgekehrt für $a \geq b$ kann $a = b$ oder $a > b$ sein.

1.3.3 Regeln für Rechnen mit Ungleichungen

Ungleichungen: Gleichungen, die eines der Zeichen „$<$“, „$>$“, „$\leq$“ oder „$\geq$“ enthalten, heißen **Ungleichungen**. Es gelten für Ungleichungen mit a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ die folgenden Rechenregeln.

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so gelten:

$$
\begin{array}{lll}
1) & a \le b \text{ und } b \le c & \Rightarrow a \le c, \quad \text{Transitivität} \\
2) & a \le b \text{ und } c \le d & \Rightarrow a + c \le b + d \\
3) & a \le b \text{ und } c > 0 & \Rightarrow a \cdot c \le b \cdot c \\
4) & a \le b \text{ und } c < 0 & \Rightarrow a \cdot c \ge b \cdot c \\
5) & \quad 0 < a \le b & \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{b} \le \dfrac{1}{a} \\
6) & \quad a \le b < 0 & \Rightarrow \dfrac{1}{b} \le \dfrac{1}{a} < 0
\end{array}
$$

Intervalle: Wir beziehen uns gelegentlich auf zusammenhängende Teilbereiche der Zahlengeraden. Diese Zahlenmengen heißen **Intervalle**. Wir benutzen die eckigen Klammern „[“ und „]“, wenn wir zum Ausdruck bringen wollen, daß die Randpunkte mit zu der von uns beschriebenen Menge gehören. Anderenfalls schreiben wir die runden Klammern „(“ und „)“. Mit „∞“ symbolisieren wir unendlich, was keine Zahl ist und folglich keinesfalls zur Menge gehört. Intervalle deren obere und untere Grenze zur Menge gehören heißen **abgeschlossen**. Gehören die Grenzen nicht zur Menge, so heißt das Intervall **offen**. Intervalle bei denen eine Grenze zur Menge gehört und die andere nicht heißen **halboffen**.

$$
\begin{array}{rcll}
[a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \\
[a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\} & \text{halb offenes Intervall} \\
(a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\} & \\
(a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \\
(a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x < \infty\} & \\
[a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : a \le x < \infty\} & \\
(-\infty,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < b\} & \\
(-\infty,\infty) & = & \mathbb{R} &
\end{array}
$$

Betrag: Der Betrag von $a \in \mathbb{R}$ ist durch $|a| := \begin{cases} a & , \ a \ge 0 \\ -a & , \ a < 0 \end{cases}$ definiert.

Es gelten für Beträge die folgenden Rechenregeln:

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gelten:

$$1) \qquad |a| \ \ge \ 0$$

$$\begin{array}{lrcl}
2) & |a| & = & 0 \Leftrightarrow a = 0 \\
3) & |a| & = & |-a| \\
4) & |a| & = & \alpha \Leftrightarrow (a = \alpha \vee a = -\alpha)\,,\ \alpha \geq 0 \\
5) & |a+b| & \leq & |a| + |b|\,, \quad \text{Dreiecksungleichung} \\
 & ||a| - |b|| & \leq & |a-b| \\
6) & |ab| & = & |a||b|
\end{array}$$

1.3.4 Fakultät, Binomialkoeffizient

Häufig werden Summen- und Produktzeichen verwendet, die wie folgt definiert sind:
Summenzeichen: $\sum_{j=i}^{k} a_j = a_i + \ldots + a_k$
Produktzeichen: $\prod_{j=i}^{k} a_j = a_i \cdot \ldots \cdot a_k$

Wir führen noch zwei häufig gebrauchte Begriffe für Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ ein:

Definition 1.5 (Fakultät)**.** *Die Zahl*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i \qquad \textit{heißt } \textbf{n–te Fakultät}.$$

Definition 1.6 (Binomialkoeffizient)**.** *Die Zahl*

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (n \geq m)$$

heißt **Binomialkoeffizient** *von n über m.*

1.4 Komplexe Zahlen

Wir lassen nun die Erweiterung der reellen Zahlen in der Weise, daß wir aus negativen Zahlen Wurzeln ziehen können, zu. Eine solche **komplexe Zahl** $z \in \mathbb{C}$ ist von der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ mit der **imaginären Einheit** i. Es gilt $i^2 = -1$.

Zwei komplexe Zahlen $z = a + ib$ und $w = c + id$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind genau dann gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt.

Der Anteil $a = Re(z)$ heißt der **Realteil** von z und $b = Im(z)$ heißt **Imaginärteil** von z. An dieser Stelle sei bemerkt, daß die imaginäre Einheit nicht zum Imaginärteil $Im(z)$ gehört. Der Imaginärteil besteht nur aus b und ist somit eine reelle Zahl.

Die Zahl $\overline{z} := a - ib$ heißt die **konjugiert komplexe Zahl** zu z. Das Zeichen „:=“ verwenden wir im Sinne von „ist definiert durch“.

Rechenregeln: Seien $z = a + ib$, $w = c + id$ zwei komplexe Zahlen. Bei der Addition addieren wir die Realteile und die Imaginärteile einzeln

$$z + w = (a + c) + i(b + d).$$

Die Multiplikation erfolgt durch Ausmultiplizieren. Wir fassen unter Beachtung von $i^2 = -1$ die Anteile mit imaginärer Einheit und die ohne zusammen

$$zw = (ac - bd) + i(ad + dc).$$

Die Division zweier komplexer Zahlen ist definiert durch

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{c^2 + d^2}.$$

Der Nenner einer komplexen Zahl ist also immer reell. Dies erreichen wir durch Erweitern des Bruches mit $\overline{w}$. Es gilt $w\overline{w} = (c + id)(c - id) = c^2 - i^2d^2 = c^2 + d^2$.

Die reelle Zahl $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ heißt der **Absolutbetrag einer komplexen Zahl**.

Die komplexe Zahlenebene Die komplexe Zahlenebene ist in Abbildung 1.8 dargestellt. Jeder Punkt der komplexen Ebene läßt sich eindeutig durch Angabe von Real- und Imaginärteil identifizieren. Äquivalent dazu kann ein Punkt in der komplexen Ebene durch Vorgabe eines Winkels und einer Entfernung (Radius), vom Nullpunkt ausgehend, eindeutig beschrieben werden. Der Winkel Θ heißt das **Argument** von z.

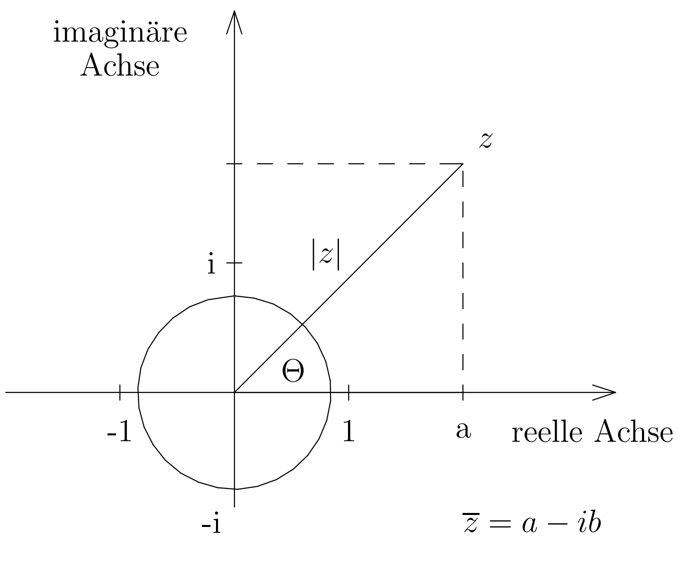


Abbildung 1.8: Der Punkt z in der komplexen Zahlenebene

Der Radius ist durch den Absolutbetrag $|z|$ gegeben. Ein Punkt auf dem Einheitskreis kann durch $\cos\Theta$ und $i\sin\Theta$ erreicht werden. Damit können Punkte in der komplexen Ebene durch $z = |z|(\cos\Theta + i\sin\Theta) = a + ib$ beschrieben werden. Der Realteil ist $a = |z|\cos\Theta$ und der Imaginärteil $b = |z|\sin\Theta$. Es gilt die **Eulersche Formel** $e^{i\Theta} = \cos\Theta + i\sin\Theta, \quad \Theta \in (0, 2\pi)$.

Die Eulersche Formel setzt die bereits angesprochenen verschiedenen Darstellungsweisen in Beziehung. Zusammenfassend haben wir die Darstellungen

$$\begin{aligned}
&z = a + ib\\
&z = |z|(\cos\Theta + i\sin\Theta) = re^{i\Theta}\\
&a = |z|\cos\Theta\,,\ b = |z|\sin\Theta\\
&r = |z|\ e^{i\Theta} = \cos\Theta + i\sin\Theta.
\end{aligned}$$

1.5 Aufgaben

1.1. Handelt es sich bei folgenden Formulierungen um Aussagen? Bestimmen Sie ggf. den Wahrheitswert!

a) Kopernikus war ein Astronom.
b) O du fröhliche!
c) $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}$
d) Mampu ist kakatylisch.
e) Auf dem Jupiter gibt es keine Spuren von Leben.

1.2. Bestimmen Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen:

a) $3 < 4 \quad \wedge \quad 4 < 3$
b) $3 < 4 \quad \vee \quad 4 < 3$
c) $3 < 4 \quad \wedge \quad \neg(4 < 3)$
d) $3 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad \neg(4 < 3)$
e) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \neg(x > 3)$ ($\forall$: Allquantor: „Für alle … gilt:“)
f) $\exists x \in \mathbb{R}: \ \neg(x < 3) \quad \wedge \quad \neg(x > 3)$ ($\exists$: Existenzquantor: „Es gibt ein …, für das gilt:“)
g) $3 < 4 \ \vee$ Der Mond ist aus Käse.
h) Wenn es sich bei einem Vieleck um ein Dreieck handelt, so beträgt die Winkelsumme 180°.
i) Für alle reellen Zahlen x hat $\frac{x}{|x|}$ den Betrag 1.
j) Wenn meine Großmutter Räder hätte, wäre sie ein Autobus.

1.3. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Aussagen p, q und r den Wahrheitswert von $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$!

1.4. a) Das Mietenüberleitungsgesetz vom 6.6.1995 (BGBl I S. 748) erlaubt unter gewissen Voraussetzungen eine Mieterhöhung von 20 % und regelt dann:
„Der Erhöhungssatz ermäßigt sich um 5 von Hundert bei Wohnraum, der nicht mit einer Zentralheizung und einem Bad ausgestattet ist."

b) Nachdem die Vorschrift von Vermietern, Mietern und Gerichten unterschiedlich interpretiert worden war, änderte der Bundestag diesen Satz. Hierüber meldete die „Freie Presse" am 2.12.1995 auf der Titelseite:
„Der Bundestag hat nun das ‚und' gegen ein ‚oder' ausgetauscht."

c) Tatsächlich jedoch wurde der zitierte Satz durch das Gesetz zur Änderung des Gesetzes zur Regelung der Miethöhe vom 15.12.1995 (BGBl I S. 1722) geändert in:
„Der Erhöhungssatz ermäßigt sich auf 15 von Hundert bei Wohnraum, bei dem die Zentralheizung oder das Bad oder beide Ausstattungsmerkmale fehlen."

Analysieren Sie die Zitate vom Standpunkt der Aussagenlogik!

1.5. Zeigen Sie, daß für alle Aussagen x, y, z das Distributivgesetz $x \wedge (y \vee z) \iff (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ gilt!

1.6. Begründen Sie mit Hilfe der Wahrheitswerttabelle das Prinzip des indirekten Beweises („Kontraposition"): $p \Rightarrow q \iff \neg q \Rightarrow \neg p$!

1.7. p und q seien folgende Aussagen:
p: Die Person wird in das Stadion eingelassen.
q: Die Person hat eine Eintrittskarte.

Am Einlaß eines Stadions gelten die Regeln:

- Wer keine Eintrittskarte vorweisen kann, wird nicht eingelassen.
- Wer betrunken ist, wird nicht eingelassen.

a) Notieren Sie die erste Regel formal! Welche Bedingung ist notwendig, welche hinreichend?
b) Welche Schlüsse kann man daraus ziehen, dass jemand eine Eintrittskarte vorgewiesen hat?
c) Welche Schlüsse kann man daraus ziehen, dass jemand in das Stadion eingelassen worden ist?

1.8. Es gelte folgende Implikation:
{Die Ware ist verdorben.}⇒{Die Ware darf nicht verkauft werden.}

Welche Folgerungen können getroffen werden, wenn folgende Aussagen wahr sind:

a) Die Ware ist verdorben.
b) Die Ware ist nicht verdorben.
c) Die Ware darf verkauft werden.

d) Die Ware darf nicht verkauft werden.

1.9. Nutzen Sie die Implikation $a=b \Rightarrow a^2=b^2$ zur Lösung der Gleichung $\sqrt{28-x}-\sqrt{x-3}=1$!

1.10. Negieren Sie die folgenden Aussagen! Schreiben Sie dabei die Aussagen und ihre Negation, sofern das sinnvoll ist, auch mit dem Existenz- bzw. Allquantor!

a) Jede natürliche Zahl hat einen Vorgänger.
b) Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.
c) Es gibt keine reelle Zahl, die zugleich positiv und negativ ist.
d) Es gibt keine reelle Zahl, die weder positiv noch negativ ist.
e) Jede nichtnegative reelle Zahl ist positiv.
f) Die Gleichung $x^2+2x+3=0$ hat eine reelle Lösung.
g) Jeder Student ist bei der Vorlesung anwesend.
h) Es gibt einen Studenten, der nicht im Wohnheim wohnt.

1.11. Beschreiben Sie (ggf. grafisch) folgende Mengen:

a) $\{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 7\}$,
b) $\{x \in \mathbb{N} : 5 \leq x^2 \leq 50\}$,
c) $\{x \in \mathbb{N} : x \in (2,7]\}$,
d) $(1,4)$, $[1,4)$, $(1,4]$, $[1,4]$, $[1,\infty)$, $(-\infty,4)$,
e) $\{x \in \mathbb{R} : x^2-5x+6=0\}$,
f) $\{x \in \mathbb{N} : x^2-5x+6=0\}$,
g) $(1,4) \cap \mathbb{N}$,
h) $\{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ x^2+y^2 \leq 9\}$,
i) $\{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ |x| \leq 5, |y| \leq 3\}$,
j) $\{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ |x-2| \leq 3, |y+1| \leq 4\}$,
k) $\{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ y \geq 3x+4\}$!

1.12. Bilden Sie für folgende Mengen jeweils $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$ und $B \backslash A$:

a) $A=(-\infty,4]$, $B=(1,\infty)$,
b) $A=[-1,2)$, $B=[0,2]$,
c) $A=\{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2+y^2 \leq 25\}$,
$B=\{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2+y^2 \geq 9\}$!

Stellen Sie die Ergebnisse von c) auch grafisch dar!

1.13. Welchen Wahrheitswert hat die Aussage
Menge aller Schimpansen $\cap$ Menge aller Giraffen $= \{x \in \mathbb{R} : x^2-2x+2 \leq 0\}$?

1.14. Ermitteln Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen, das heißt die Menge aller reellen Zahlen x ($x \in \mathbb{R}$), für die gilt:

a) $x^2-6x+9>1$,
b) $\dfrac{2x+4}{5x-7}>3$,

c) $|x-1| \geq 4$,
d) $|x-3| \leq 2|x-1|$,
e) $|x+1| + |x+2| \leq 2$,
f) $x^4 + 3x^3 - 4x > 0$!

1.15. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\dfrac{|1-x|}{x+3} \geq -2$?

1.16. Stellen Sie die Menge $\{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ \ 2|x| + |y| \leq |x| + 1\}$ grafisch dar!

1.17. Ein an einer mit Kilometersteinen versehenen Straße wohnender Kunde erhält von einem am Kilometer 87 dieser Straße liegenden Auslieferungslager ein Gerät geliefert, an Fahrtkosten muss er dafür 3 DM je Entfernungskilometer (einfache Entfernung) vom Auslieferungslager zahlen. Für die Installation muss zusätzlich ein Techniker von einem am Kilometer 112 dieser Straße liegenden Servicestützpunkt zum Kunden kommen, als Fahrtkosten fallen dabei 2 DM je Entfernungskilometer vom Servicestützpunkt an.

In welchem Bereich der Straße ist die Summe der Fahrtkosten nicht größer als 100 DM?

1.18. Gegeben seien folgende Größen:

n	0	1	2	3	4	5
a_n	2	1	4	3	–2	1
b_n	15	3	1	2	0	4

a_{ij} :

$i \setminus j$	0	1	2
1	2	1	5
2	3	–1	2

Berechnen Sie $\sum\limits_{n=0}^{3} a_n b_n$, $\sum\limits_{i=0}^{3}(a_i b_i + 1)$, $\sum\limits_{i=3}^{6} i \sum\limits_{j=4}^{5} a_j$, $\prod\limits_{i=2}^{5} a_i$, $\prod\limits_{i=2}^{5} a_0$ und $\sum\limits_{i=1}^{2} \sum\limits_{j=0}^{2} a_{ij}$!

1.19. Welche der folgenden Umformungen sind richtig:

a) $\sum\limits_{i=1}^{10} a_i = \sum\limits_{j=0}^{9} a_{j+1}$,

b) $\sum\limits_{i=1}^{10} a_i = \sum\limits_{i=0}^{9} (a_i + 1)$,

c) $\sum\limits_{i=1}^{n} (5a_i + 1) = 5 \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \ \ + \ \ 1$?

1.20. Ein Preisindex werde nach der Formel

$$I_B^A = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^A q_i^B}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^B q_i^B}$$

berechnet, wobei B das Basisjahr, A das Berichtsjahr, i ein Laufindex für verschiedene Waren, p deren Preise und q deren Mengen seien.

Berechnen Sie für die Daten

	1996		1998	
Ware	Preis	Menge	Preis	Menge
Brötchen	0.50	300	0.55	365
Brot	3.00	50	3.30	43
Kuchen	1.00	100	1.20	85

den Preisindex von 1998 bezogen auf das Basisjahr 1996 sowie die jährliche Preissteigerung!

1.21. Sei $z_1 = 2 + 3\mathrm{i}, z_2 = 3 - 5\mathrm{i}$.

a) Stellen Sie z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ und $2z_1$ in der komplexen Zahlenebene dar!

b) Berechnen Sie $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_2} z_1$, $\overline{z_2} z_2$ und $|z_2|$!

1.22. Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Menge
$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0.5\}$!

1.23. Sei $z = x + \mathrm{i}y$ und es gelte $|z| \leq 1 - \mathrm{Re}(z)$.

a) Geben Sie eine Ungleichung an, die den Zusammenhang zwischen dem Realteil x und dem Imaginärteil y beschreibt!

b) Skizzieren Sie $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 - \mathrm{Re}(z)\}$!

1.24. Berechnen Sie

a) $(1 + \mathrm{i})^4$, b) $|\sqrt{3}\mathrm{i} - 6|$, c) $(2 - \mathrm{i}\sqrt{3})^3$, d) $(-1 + \sqrt{3}\mathrm{i})^3$!

1.25. Lösen Sie die Gleichung $z^2 + 2z + 5 = 0$ und führen Sie die Probe aus!

1.26. Zeigen Sie, daß z^2 genau dann reell ist, wenn z reell oder rein imaginär ist!

1.27. Stellen Sie die folgenden Zahlen in der komplexen Zahlenebene dar und ermitteln Sie ihre trigonometrische Darstellung:

a) 3, b) $-2\mathrm{i}$, c) $1 + \mathrm{i}$, d) $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$!

1.28. Ermitteln Sie mit Hilfe der trigonometrischen Darstellung komplexer Zahlen $(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})(1 + \mathrm{i})$ und $(1 + \mathrm{i})^4$!

1.29. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ dar:

a) $\frac{(2\mathrm{i} + 1)(\mathrm{i} - 2) + 1}{(2 - \mathrm{i})^2 - 2 + \mathrm{i}}$, b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + \mathrm{i})\right)^{20}$, c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + \mathrm{i})\right)^{30}$!

1.30. Veranschaulichen Sie die Beziehung $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ am Venn–Diagramm und beweisen Sie mit Mitteln der Aussagenlogik!

1.31. Handelt es sich bei den folgenden Zuordnungsvorschriften um Funktionen:

a) Mütter $\longrightarrow$ Kinder, b) Kinder $\longrightarrow$ Mütter, c) $y = \begin{cases} 3x - 1, & x \leq 1 \\ x^2 + 1, & x \geq 1 \end{cases}$,

d) $y = |x - 2| + 2$, e) $x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$, f) $y = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$?

Wenn ja, sind die Funktionen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? Geben Sie ggf. den Definitions- und dem Wertebereich sowie die Umkehrfunktion an!

1.32. Sei $z = x + \mathrm{i}y$ und es gelte $|z - 4 + 3\mathrm{i}| \leq 4$.

a) Geben Sie eine Ungleichung an, die den Zusammenhang zwischen dem Realteil x und dem Imaginärteil y beschreibt!

b) Skizzieren Sie $\{z \in \mathbb{C} : |z - 4 + 3\mathrm{i}| \leq 4\}$!

1.33. Lösen Sie die Gleichung $x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x = 0$ in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$ und führen Sie die Probe aus!

1.34. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Moivre $(1 + \mathrm{i})^{25}$!

1.35. Wo steckt der Fehler in der Gleichungskette $\mathrm{i}^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$?

1.36. Ermitteln Sie die komplexen

a) Quadrat-, vierten und sechsten Wurzeln aus 1,

b) Quadratwurzeln aus $2(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})$,

c) Quadrat- und dritten Wurzeln aus i !

1.37. Gegeben sei die Aussage: *„Ein Regenbogen kann nur dann zu sehen sein, wenn es regnet und die Sonne scheint.“*

a) Die Aussage soll als Implikation dargestellt werden. Geben Sie die Prämisse und die Konklusion der Implikation an!

b) Formulieren Sie die Aussage mit *„ist hinreichend dafür, dass“* sowie mit *„ist notwendig dafür, dass“*.

c) Geben Sie die Kontraposition zu der Aussage so an, dass in der Prämisse der Kontraposition bei formaler Notation keine Klammern gesetzt werden müssten!

1.38. Gegeben seien die Mengen $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \geq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + 3x \geq 5\}$ und $C = [0, \infty) \times [0, \infty)$. Stellen Sie die Mengen A, B, C, $(A \cap B) \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \backslash B) \cap C$ und $(B \backslash A) \cap C$ grafisch dar!

1.39. Für welche reellen x gilt $\dfrac{|x + 3|}{6 - x} > \dfrac{1}{2}$?

1.40. Geben Sie die Zahlen

a) $\dfrac{1}{29} \dfrac{\dfrac{40 - 20\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}}{\dfrac{1}{5 + 2\mathrm{i}} - \dfrac{1}{5 - 2\mathrm{i}}}$, b) $\dfrac{(1 + \mathrm{i})^{2002}}{(1 - \mathrm{i})^{1982}}$

jeweils in algebraischer $(x + \mathrm{i}y)$ und trigonometrischer Darstellung an!

Hinweis: Führen Sie die Rechnung zunächst in der für die jeweilige Aufgabe zweckmäßigeren

Darstellung aus und rechnen Sie das Ergebnis in die andere Darstellung um!

1.41. Sei $z = x + \mathrm{i}y$ und es gelte $|z| \leq \sqrt{|\mathrm{Re}(z)|}$.

a) Geben Sie eine Ungleichung an, die den Zusammenhang zwischen dem Realteil x und dem Imaginärteil y beschreibt!

b) Skizzieren Sie $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sqrt{|\mathrm{Re}(z)|}\}$!

Hinweis: quadratische Ergänzung

Platzhalter für weitere Aufgaben

Kapitel 2
Lineare Algebra

Die lineare Algebra behandelt die Theorie von Matrizen und Vektoren. Dieses weitgefächerte Gebiet wird uns im folgenden in den Kapiteln 2 – 6 und darüberhinaus beschäftigen. Zunächst wollen wir in Abschnitt 2.1 die Begriffe Matrix und Vektor definieren. Viele mathematische Probleme lassen sich auf Matrix–Vektoroperationen zurückführen, so zum Beispiel die Lösung eines linearen Gleichungssystems 2.4, Eigenwertprobleme 3, die Hauptachsentransformation 5 und die Aufgaben der linearen Optimierung 6. Selbstverständlich können wir in diesem Rahmen die wichtigsten Probleme nur kurz anreißen und nicht die komplette Theorie in ihrer Vielfalt darstellen.

2.1 Vektoren und Matrizen

Ein **Vektor** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ wird dargestellt durch ein n - Tupel

$$\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

mit Komponenten $x_i \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), $1 \leq i \leq n$.

Zwei Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ sind genau dann gleich, falls all ihre Komponenten $x_i = y_i$, für $i = 1, \ldots, n$ übereinstimmen. Dabei spielt es für uns zunächst keine Rolle, ob die einzelnen x_i Koordinaten, Meßwerte, Wahrscheinlichkeiten oder anderes darstellen.

Eine **Matrix** $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (oder $\mathbb{C}^{m \times n}$) ist ein rechteckiges Zahlenschema mit m - Zeilen und n - Spalten

$$\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & & \ldots \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Das Element $a_{i,j}$ heißt der Koeffizient der Matrix in der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Einen (Spalten-) Vektor kann man auch als eine $m \times 1$ Matrix auffassen. Zwei Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sind gleich, falls $a_{i,j} = b_{i,j}$ für alle $i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$ gilt.

2.2 Operationen mit Vektoren und Matrizen

2.2.1 Vektorräume

Die **Addition** zweier Vektoren ist komponentenweise erklärt.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^n$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^n$$

Die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ist wie folgt erklärt:

$$\lambda \boldsymbol{x} \quad = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^n$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

Satz 2.1. *Seien* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ *dann gilt:*

$$\begin{array}{lrcl}
\textit{1)} & \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} & = & \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \\
\textit{2)} & \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) & = & (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} \\
\textit{3)} & \boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} & = & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
\textit{4)} & \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{0} \\
\textit{5)} & \lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) & = & \lambda \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y} \\
\textit{6)} & (\lambda\mu)\boldsymbol{x} & = & \lambda(\mu \boldsymbol{x}) \\
\textit{7)} & (\lambda + \mu)\boldsymbol{x} & = & \lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{x} \\
\textit{8)} & 1\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{x} \\
\textit{9)} & 0\boldsymbol{x} & = & \lambda \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \\
\textit{10)} & (-\lambda)\boldsymbol{x} & = & \lambda(-\boldsymbol{x}) = -(\lambda \boldsymbol{x}) \\
\textit{11)} & (-\lambda)(-\boldsymbol{x}) & = & \lambda \boldsymbol{x}
\end{array}$$

Mengen mit Verknüpfungen „+“ und „·“, die den Regeln 1) bis 8) genügen, heißen **Vektorräume**. Alternativ kann statt $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $\lambda \in \mathbb{C}$ gewählt werden (komplexe Vektorräume).

Für Matrizen sind die **Addition** und **Multiplikation mit einem Skalar** auch komponentenweise erklärt.

$$\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}, \quad \boldsymbol{B} = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

dann definieren wir

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} := (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

und

$$\lambda\boldsymbol{A} := (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Satz 2.2. *Die Menge aller Matrizen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bilden einen Vektorraum, d.h. es gelten die Aussagen von Satz 2.1 mit $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{x}, \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{y}, \boldsymbol{C} \sim \boldsymbol{z}$.*

Die **transponierte** Matrix von $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt $\boldsymbol{A}^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und ist definiert durch

$$\boldsymbol{A}^T := (a_{j,i})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

Für $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{array}{lll} 1) & (\boldsymbol{A}^T)^T & = \boldsymbol{A} \\ 2) & (\lambda\boldsymbol{A})^T & = \lambda\boldsymbol{A}^T \\ 3) & (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T & = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T. \end{array}$$

Bemerkung: Transponiert man einen Vektor $\boldsymbol{x} = (x_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$, so ergibt sich ein **Zeilenvektor**

$$\boldsymbol{x}^T = (x_1, \ldots, x_n).$$

Eine **quadratische** Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **symmetrisch**, falls $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ gilt. Diagonalmatrizen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. $a_{i,j} = 0$, falls $i \neq j$, sind beispielsweise symmetrisch.

2.2.2 Matrixmultiplikation

Für Matrizen $\boldsymbol{A} = (a_{i,k}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\boldsymbol{B} = (b_{k,j}) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ist das Produkt $\boldsymbol{C} = (c_{i,j}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ definiert durch die Koeffizienten

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j} \quad , \qquad \begin{array}{l} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le p \end{array}$$

Merke:

1. „Zeile mal Spalte"!
2. Das Produkt $\boldsymbol{AB}$ ist **nicht** für beliebige Matrizen erklärt. Die Anzahl der Spalten von $\boldsymbol{A}$ muß gleich der Anzahl der Zeilen von $\boldsymbol{B}$ sein!
3. Falls $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BA}$ erklärt sind, gilt im allgemeinen $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$!
4. Aus $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0} = (0)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le p}}$ folgt keineswegs $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ oder $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$.

Beispiele: Gegeben sind die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

Satz 2.3. *Für Matrizen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ gelten*

$$\begin{array}{lrcl}
1) & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) & = & (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} \\
2) & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) & = & \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC} \qquad \textit{für} \;\; n{=}p{=}q \\
3) & \lambda(\boldsymbol{AB}) & = & (\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B}) \\
4) & (\boldsymbol{AB})^T & = & \boldsymbol{B}^T\, \boldsymbol{A}^T \\
5) & \textit{Sei } \delta_{i,j} & = & \left\{ \begin{array}{l} 1,\ \textit{für } i = j \\ 0,\ \textit{für } i \neq j \end{array} \right\} \\
 & \textit{und } \boldsymbol{I}_m & = & (\delta_{i,j})_{1\le i,j\le m} \textit{ die } \textbf{m-dimensionale} \\
 & & & \textbf{Einheitsmatrix}\textit{, dann gilt} \\
 & \boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A} & = & \boldsymbol{A} \quad \textit{und} \quad \boldsymbol{AI}_n = \boldsymbol{A} \\
6) & \multicolumn{3}{l}{\textit{Sei } \boldsymbol{0}_{n\times p} \textit{ die } \textbf{Nullmatrix}\textit{, dann ist } \boldsymbol{A0}_{n\times p} = \boldsymbol{0} \textit{ und } \boldsymbol{0}_{q\times m}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \;\; .}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & & & & & b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,p} \\
 & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & b_{n,1} & \cdots & b_{n,j} & \cdots & b_{n,p} \\
\hline
a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,n} & c_{i,1} & \cdots & c_{i,j} & \cdots & c_{i,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m,1} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n} & c_{m,1} & \cdots & c_{m,j} & \cdots & c_{m,p}
\end{array}
$$

Abbildung 2.1: Falksches Schema zur Matrixmultiplikation

Die Spalten der Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}_n$ heißen **Einheitsvektoren** $\boldsymbol{e}_i, i = 1, \ldots, m$.

$$
\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \leftarrow i \text{ - te Zeile}
$$

2.2.3 Die Matrix – Vektormultiplikation

Die Multiplikation einer Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{i,k}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit einem Vektor $\boldsymbol{x} = (x_k) \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = (y_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$ mit $y_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k} x_k$.

2.3 Unterräume, lineare Unabhängigkeit, Basisvektoren

Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^n$,** falls für beliebige $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

1.) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U$ und 2.) $\lambda \boldsymbol{x} \in U$ gelten.

Ein Vektor $\boldsymbol{u} \in U$ ist eine **Linearkombination** von Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \ldots \boldsymbol{u}_k \in U$ falls $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{u}_j = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k.$$

Zu $\{\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ definieren wir die **lineare Hülle**

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\} := \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{u}_j : \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, k \right\}.$$

Dies ist der kleinste Unterraum, der alle Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ enthält.

Die Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ heißen **linear unabhängig**, falls keiner eine Linearkombination der restlichen ist. Dies kann wie folgt ausgedrückt werden

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Anderenfalls nennt man sie **linear abhängig.**

Die Menge $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ heißt eine **Basis des linearen Raumes U** falls die Vektoren $\boldsymbol{u}_j$ linear unabhängig sind und $U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1 \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ gilt.

Bemerkung 2.1. *Ein Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ hat viele verschiedene Basen, allerdings ist die Anzahl der Basisvektoren immer gleich und heißt die* **Dimension** *von U, kurz* $\dim U$.

Es gelten die folgenden Aussagen.

Satz 2.4. *Im $\mathbb{R}^n$ sind k Einheitsvektoren (z.B. $\{\boldsymbol{e}_1 \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$) mit $k \leq n$ immer linear unabhängig. Im $\mathbb{R}^n$ sind $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ immer linear abhängig, falls $k > n$ ist.*

Satz 2.5. *Sei $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ eine Basis von $U \subseteq \mathbb{R}^n$, dann läßt sich jeder Vektor $\boldsymbol{u} \in U$ in eindeutiger Art und Weise als Linearkombination der $\boldsymbol{u}_j, 1 \leq j \leq k$ darstellen, d.h. es existiert genau eine Kombination von λ_j's, $j = 1, \ldots, k$, so daß $\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{u}_j$, gilt.*

Satz 2.6. *Sei* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *und sei* r *die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen. Diese ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Spalten und heißt der* **Rang** *von* $\boldsymbol{A}$*, kurz: rang* $(\boldsymbol{A})$.

Es gilt: rang $(\boldsymbol{A}) \leq \min\{m,n\}$ und rang $(\boldsymbol{A}) =$ rang $(\boldsymbol{A}^T)$.

2.4 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem ist in der Form

$$\begin{array}{lllllll} a_{1,1} & x_1 + a_{1,2} & x_2 + \ldots + a_{1,n} & x_n = & b_1 \\ a_{2,1} & x_1 + a_{2,2} & x_2 + \ldots + a_{2,n} & x_n = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & x_1 + a_{m,2} & x_2 + \ldots + a_{m,n} & x_n = & b_m \end{array}$$

oder in Kurzschreibweise $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, den Vektoren $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ mit $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

Die Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ des Vektors $\boldsymbol{x}$ heißen **Variablen** des Gleichungssystems.

2.4.1 Spezielle Systeme

Sei die Matrix $\boldsymbol{A}$ in der Form $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{I}_m, \boldsymbol{R}) \in \mathbb{R}^{m\times n}, n \geq m$ mit beliebiger Restmatrix $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$ und ein Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Die Matrix $\boldsymbol{I}_m$ bezeichne die Einheitsmatrix mit der Dimension m.

Das Gleichungssystem

$$\boldsymbol{Ax} \;=\; (\boldsymbol{I}_m, \boldsymbol{R}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} = \; \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_N$$

hat dann die folgende Lösung

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_N \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_N \in \mathbb{R}^{n-m} \quad \text{beliebig.}$$

Probe:

$$(\boldsymbol{I}_m, \boldsymbol{R}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_N \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

Die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{x}_B = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ heißen die **Basisvariablen** und die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{x}_N = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ heißen die **Nichtbasisvariablen.**

2.4.2 Elementare Umformungen

Erreichen wir die obige Darstellung der Matrix $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{I}_m, \boldsymbol{R})$, so können wir die Lösung unseres Gleichungssystems in obiger Form direkt angeben. Deshalb ist die Umformung auf solche Gestalt, Ziel unseres ersten Schrittes.

Ziel: Umformen auf die Gestalt $\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{I}_m, \boldsymbol{R})$.

Als **zulässige Umformungen** wollen wir solche bezeichnen, die die Lösung eines Gleichungssystems unverändert lassen.

U1: Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.

U2: Addition zweier Gleichungen. Dies entspricht der Addition zweier Zeilen in unserem Rechenschema.

U3: Vertauschen zweier Gleichungen beziehungsweise zweier Zeilen im Rechenschema.

U4: Umnummerierung der Variablen. Dies entspricht im Rechenschema dem Vertauschen von Spalten. Dabei ist allerdings zu beachten, daß die Komponenten des berechneten Lösungsvektors ebenfalls in veränderter Reihenfolge vorliegen, somit also bei Angabe der Lösung wieder zurückgetauscht werden müssen.

ACHTUNG: MERKEN!

Satz 2.7. *Die Umformungen U1 bis U4 verändern die Lösung des Gleichungssystems* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ *nicht.*

2.5 Invertierbare Matrizen

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{A}$ heißt **invertierbar**, falls $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert mit $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$.

Die Matrix $\boldsymbol{B}$ ist eindeutig bestimmt und heißt **Inverse** zu $\boldsymbol{A}$. Wir schreiben $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Satz 2.8. *Sei* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $\boldsymbol{A}$ *ist invertierbar,*
2. *rang* $\boldsymbol{A} = n$,
3. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,
4. *für jede rechte Seite* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ *existiert genau eine Lösung* $\boldsymbol{x}$ *der Gleichung* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Satz 2.9. *Seien* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertierbar, dann gilt:*

i) $\boldsymbol{A}^T$ *ist invertierbar:* $(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$

ii) $\boldsymbol{A}^{-1}$ *ist invertierbar:* $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$

iii) $\boldsymbol{AB}$ *ist invertierbar:* $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

2.6 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Satz 2.10. *Das Gleichungssystem* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ *ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix A gleich dem Rang der „erweiterten“ Koeffizientenmatrix* $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ *ist:* $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$.

Ein lösbares Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich der Anzahl der Variablen ist: $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = n$.

Gilt $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) < n$, *so enthält die allgemeine Lösung des Gleichungssystems* $n - \operatorname{rang} \boldsymbol{A}$ *frei wählbare Parameter.*

Ein lineares Gleichungssystem hat also genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen. Für die eindeutige Lösbarkeit ergibt sich die Aussage des Satzes als Folgerung aus Satz 2.8. Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems lautet dann $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Im Fall $m = n = 2$ können die Gleichungen des Gleichungssystems als Geradengleichungen interpretiert werden. Die verschiedenen Lösbarkeitsfälle entsprechen dann den Lagebeziehungen von Geraden:

- Zwei Geraden schneiden sich $(\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = 2)$,
- sind parallel $(\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = 1 \neq 2 = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}))$ oder
- sind identisch $(\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = 1)$.

Entsprechendes gilt im Falle $m = n = 3$, wenn man die Gleichungen als Ebenengleichungen (s. unten in Abschnitt 4.2) interpretiert.

Definition 2.1. *Ein Gleichungssystem* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ *heißt* **homogen**, *wenn die rechte Seite verschwindet:* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

Satz 2.11. *Das homogene Gleichungssystem hat stets die triviale Lösung* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. *Es ist eindeutig lösbar (d.h. hat* **nur** *die triviale Lösung) genau dann, wenn* $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = n$ *ist. Anderenfalls hat es* $n - \operatorname{rang} \boldsymbol{A}$ *linear unabhängige Lösungen. Die lineare Hülle dieser linear unabhängigen Lösungen ist die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems.*

Beweis:

Wegen $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ist $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$. Mit Satz 2.10 folgt die Behauptung.

□

Satz 2.12. *Die allgemeine Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ist darstellbar als Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$.*

2.7 Der Gauß – Algorithmus

Der Gauß-Algorithmus ermöglicht die Lösung eines Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ oder gar in Abwandlung als Gauß-Jordan-Algorithmus die Invertierung einer Matrix $\boldsymbol{A}$.

2.7.1 Lösen eines Gleichungssystems

Das Ziel des Algorithmus ist es durch Umformungen U1, U2, U3 und U4 in den ersten m-Spalten Einheitsvektoren, d. h. die Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}_m$ zu erzeugen.

Zu Beginn des Gaußalgorithmus schreiben wir die Matrix $\boldsymbol{A}$ erweitert um die rechte Seite $\boldsymbol{b}$ als 0-ten Schritt des Algorithmus in folgender Form nieder.

$$\begin{array}{cccc|c}
a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\
a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \dots & a_{m,n}^{(0)} & b_m^{(0)}
\end{array}$$

Wir erhalten auf diese Weise folgendes **Schema vor dem k-ten Schritt.**

Schema vor dem k-ten Schritt

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & \dots & \dots & a_{1,k}^{(k-1)} & \dots & \dots & a_{1,n}^{(k-1)} & b_1^{(k-1)} \\
0 & 1 & \dots & \dots & a_{2,k}^{(k-1)} & \dots & \dots & a_{2,n}^{(k-1)} & b_2^{(k-1)} \\
0 & 0 & 1 & \dots & \vdots & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & & & 1 & \vdots & & & & \vdots \\
0 & & & 0 & a_{k,k}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \dots & a_{k,n}^{(k-1)} & b_k^{(k-1)} \\
0 & & \dots & 0 & a_{k+1,k}^{(k-1)} & \dots & \dots & a_{k+1,n}^{(k-1)} & b_{k+1}^{(k-1)} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
0 & & & 0 & a_{m,k}^{(k-1)} & \dots & \dots & a_{m,n}^{(k-1)} & b_m^{(k-1)}
\end{array}
$$

Im k-ten Schritt

i) **Pivotisierung** Wir bezeichnen das Diagonalelement $a_{kk}^{(k-1)}$, sofern es ungleich 0 ist, als Pivotelement.

1.) Ist das Diagonalelement $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, so können wir den Algorithmus fortsetzen.

2.) Anderenfalls starten wir einen Vorgang den wir **Pivotisierung** nennen. Wir suchen ein $a_{j,k}^{(k-1)} \neq 0$ mit $j > k$ und vertauschen die Zeile k und j.

$$a_{k,i}^{(k-1)} \rightsquigarrow \tilde{a}_{j,i}^{(k-1)} \qquad a_{j,i}^{(k-1)} \rightsquigarrow \tilde{a}_{k,i}^{(k-1)} \qquad a_{k,i}^{(k)} := \frac{\tilde{a}_{k,i}^{(k-1)}}{\tilde{a}_{k,k}^{(k-1)}}$$

$$b_k^{(k)} := \frac{\tilde{a}_{k}^{(k-1)}}{\tilde{a}_{k,k}^{(k-1)}} \qquad i = k, \dots, n$$

Damit wird $a_{k,k}^{(k)} = 1$.

3.) Falls kein solches $a_{j,k}^{(k-1)} \neq 0$ gefunden wird, suche $a_{k,i}^{(k-1)} \neq 0$ und vertausche die Spalten.

ACHTUNG: MERKEN!

ii) In einem zweiten Schritt, den wir **Eliminationsschritt** nennen wollen, kombinieren wir die Zeile in der das Pivotelement steht, die **Pivotzeile**, mit allen anderen Zeilen derart, daß in der k-ten Spalte für $a_{j,k}^{(k-1)} = 0$ für $k \neq j$. Wir führen folgende Modifikation durch:

$$a_{j,i}^{(k)} := \tilde{a}_{j,i}^{(k-1)} - a_{j,k}^{(k-1)} \cdot \tilde{a}_{k,i}^{(k-1)} \qquad b_k^{(k)} := \tilde{b}_k^{(k-1)} - b_i^{(k)} \, \tilde{a}_{i,k}^{(k-1)}$$

für

$$i \neq k, \text{und} j = 1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{und} k = i, \ldots, n.$$

Am Ende jedes Schrittes überprüfen wir die Zeilen.

- Falls alle Einträge Null sind, d. h. $a_{j,i}^{(k)} = 0, i = 1, \ldots, n$ und $b_j^{(k)} = 0$ kann die j-te Zeile ersatzlos gestrichen werden.
- Falls aber $a_{j,i}^{(k)} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ist **und dennoch** $b_j^k \neq 0$ liegt ein **Widerspruch** vor. In diesem Fall besitzt das Gleichungssytem **keine Lösung** und wir brechen das Lösungsverfahren ab, die Lösungsmenge ist leer! Ansonsten erhalten wir ein Gleichungssystem der Form $(\boldsymbol{I}_r, \boldsymbol{R})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(r)}$ mit $r \leq m$ und $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{r \times (n-m)}$.

  Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist dann

$$\mathbb{L} = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b}^{(r)} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_N,\ \boldsymbol{x}_N \in \mathbb{R}^{(n-m)} \text{ beliebig} \right\}.$$

Schema nach dem k-ten Schritt

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_{1,k+1}^{(k)} \quad \ldots & b_1^{(k)} \\
0 & 1 & 0 & \ldots & \vdots & \vdots & \\
\vdots & 0 & 1 & \ldots & 0 & \vdots & \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & \\
\vdots & & & & 1 & a_{k,k+1}^{(k)} \quad \ldots & b_k^{(k)} \\
\vdots & & & & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} \quad \ldots & b_{k+1}^{(k)} \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_{r,k+1}^{(k)} \ldots a_r^{(k)} & b_r^{(k)}
\end{array}$$

Satz 2.13. *Sei* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ *und seien* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ *die Spalten von* $\boldsymbol{A}$. *Dann ist das lineare Gleichungssystem* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *genau dann* **lösbar**, *falls* $\boldsymbol{b} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ *ist. Unter dieser Voraussetzung ist* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *genau dann* **eindeutig lösbar** , *falls die Spalten* $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ *linear unabhängig sind.*

Sei $R(\boldsymbol{A}) = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \in \mathbb{R}^m$ *der Bildraum von* $\boldsymbol{A}$, *dann gilt*

- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *ist lösbar* $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *ist eindeutig lösbar* $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$ *und rang* $\boldsymbol{A} = n$.

Beispiel zum Gauß-Algorithmus

A				b	angewandte Operation
1	-4	2	0	0	
2	-3	-1	-5	5	
3	-7	1	-5	α	
1	-4	2	0	0	II) -2I)
0	5	-5	-5	5	
0	5	-5	-5	α	III) -3I)
1	-4	2	0	0	
0	1	-1	-1	1	pivot
0	5	-5	-5	α	
1	0	-2	-4	4	I - (-4) II)
0	1	-1	-1	1	

Gemäß Satz 2.7 ist das Gleichungssystem nur dann lösbar, wenn $\alpha = 5$ ist. Das Gleichungssystem lautet $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$.

Dabei ist $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Lösung ist $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N)$ mit und $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_N$ und $\boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ wobei $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ die frei wählbaren Nichtbasisvariablen sind. Nach Wahl der Nichtbasisvariablen sind die Basisvariablen eindeutig bestimmt. Setzt man den Vektor $\boldsymbol{x}$ aus $\boldsymbol{x}_B$ und $\boldsymbol{x}_N$ als $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix}$ zusammen, so ergibt sich für die Lösung

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 & + & 2x_3 & + & 4x_4 \\ 1 & + & x_3 & + & x_4 \\ & & x_3 & & \\ & & & & x_4 \end{pmatrix}.$$

Wir können den Lösungsvektor als Linearkombination von Vektoren wie folgt ausdrücken

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hierin spiegelt sich klar wider, daß die Nichtbasisvariablen $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ als Parameter frei wählbar sind und daß bei einer festen Wahl von $\boldsymbol{x}_N$ die Lösung eindeutig bestimmt ist.

2.7.2 Inversenberechnung mit Gauß-Jordan-Verfahren

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Die j-te Spalte $\boldsymbol{v}_j$ von $\boldsymbol{A}^{-1}$ ist Lösung der Gleichung $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{e}_j$ mit $\boldsymbol{e}_j$ dem j-ten Einheitsvektor.

Zur Berechnung der Inversen von $\boldsymbol{A}$ sind also n Gleichungssysteme zu lösen. Die Matrix $\boldsymbol{A}$ ist aber immer die Gleiche, das bedeutet, daß bei jeder Lösung des Gleichungssystems für die Matrix $\boldsymbol{A}$ immer die gleichen Umformungsschritte $U1 - U4$ durchgeführt werden. Lediglich für die rechte Seite ergibt sich jeweils etwas anderes. Deshalb löst man die Gleichungssysteme simultan indem man alle rechten Seiten, in unserem Fall die Einheitsvektoren, hintereinander schreibt. Somit steht am Ende in der Spalte $n + j$ unseres erweiterten Rechenschemas die Lösung der Gleichung $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{e}_j$.

Wir erhalten das folgende erweiterte Rechenschema in welchem wir wieder wie beim Gauß-Algorithmus mit den elementaren Umformungen $U1 - U4$ eine Einheitsmatrix erzeugen. Die daran anschließende Matrix ist dann die Inverse.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{I}_n$	
$\vdots$	$\vdots$	Gauß-Algorithmus
$\boldsymbol{I}_n$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	

2.8 Skalarprodukt, Norm und Orthogonalität

Definition 2.2 (Skalarprodukt, Norm)**.** *Seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, dann heißt $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ das* **Skalarprodukt** *von $\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{y}$ und $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} \geq 0$ die (Euklidische)* **Norm** *von $\boldsymbol{x}$. Alternativ wird für das Skalarprodukt $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ auch die Bezeichnung $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >$ gebraucht.*

Definition 2.3 (Orthogonalität)**.** *Zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ heißen* **orthogonal** *falls $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ gilt.*

Satz 2.14. *Seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gelten folgende Rechenregeln für das Skalarprodukt:*

1. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$
2. $(\lambda \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot (\lambda \boldsymbol{y})$

3. $\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}$

4. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

5. $|\lambda \boldsymbol{x}| = |\lambda||\boldsymbol{x}|$

6. $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$ *Cauchy–Schwarzsche Ungleichung*

7. $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ *Dreiecksungleichung*

2.9 Aufgaben

2.1. Berechnen Sie $2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 1 \\ 4 & -2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$!

2.2. In einer Firma werden die drei Produkte P_1, P_2 und P_3 hergestellt. An Material werden dafür die drei Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 benötigt. Im Einzelnen werden für eine Einheit P_1 2 Einheiten R_1, 1 Einheit R_2 und 4 Einheiten R_3, für eine Einheit P_2 5 Einheiten R_1 und 5 Einheiten R_3 sowie für eine Einheit P_3 1 Einheit R_1, 3 Einheiten R_2 und 3 Einheiten R_3 verwendet.

Für einen Auftrag sollen 50 Einheiten P_1, 30 Einheiten P_2 und 10 Einheiten P_3 produziert werden.

Geben Sie die Aufwandsmatrix sowie in vektorieller Form den Produktionsauftrag an und ermitteln Sie daraus den Rohstoffbedarf in vektorieller Form!

2.3. Berechnen Sie

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 1 \\ 4 & -2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$!

2.4. Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\mathbf{AC} + \mathbf{BC}$!

2.5. Sei $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Ausdrücke sind definiert? Was stellen sie dar (Zahl, Vektor, Matrix)?

a) $\mathbf{yAx}$, b) $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{Ax}$, c) $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Ay}$, d) $\mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A})^\mathsf{T}$, e) $\mathbf{Axy}^\mathsf{T}$, f) $\mathbf{yx}^\mathsf{T}\mathbf{A}$, g) $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{yx}^\mathsf{T}$.

2.6. Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrizen $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{CA}$, $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}$, $\mathbf{ABC}$ und $\mathbf{CBA}$, falls diese existieren!

2.7. Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Produkte $\mathbf{YAX}$ und $\mathbf{Y}^\mathsf{T}\mathbf{AX}$, soweit sie existieren!

2.8. $\mathbf{A}$ sei eine beliebige Matrix. Mit welcher Matrix muß man $\mathbf{A}$ von links multiplizieren, damit

a) die 2. mit der 3. Zeile vertauscht wird,
b) die 1. Zeile mit 3 multipliziert wird,
c) das Doppelte der 1. Zeile zur 3. Zeile addiert wird,
d) eine einzeilige Matrix entsteht, deren Komponenten die Summen der Spalten der Matrix $\mathbf{A}$ sind?

2.9. Es werden drei Produkte P_1, P_2 und P_3 aus drei Baugruppen B_1, B_2 und B_3 und diese aus drei Ausgangsstoffen R_1, R_2 und R_3 gefertigt, wobei im Einzelnen folgender Bedarf besteht:

	je P_1	je P_2	je P_3
B_1	2	4	4
B_2	2	0	2
B_3	2	2	6

	R_1	R_2	R_3
je B_1	2	4	1
je B_2	1	2	2
je B_3	3	1	1

a) Geben Sie die Aufwandsmatrix für den Zusammenhang von Endprodukten und Ausgangsstoffen an!
b) Es sind 200 P_1, 100 P_2 und 300 P_3 sowie zusätzlich als Austauschbaugruppen 100 B_1 und 80 B_2 zu produzieren. Welche Mengen an Ausgangsstoffen werden benötigt?

2.10. a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$ Linearkombination, der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

hingegen keine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist!

b) Wie kann man aus den unter a) genannten Vektoren eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^3$ bilden? Geben Sie die Koordinaten der Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis an!

2.11. Welchen Rang haben die Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \\ 17 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$?

2.12. Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Gleichungssysteme

a) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 3x + y - 5z &= 5 \\ 2x - 3y + 3z &= 8 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 3x + y - 5z &= 5 \\ 5x - 3y + z &= 8 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 3x + y - 5z &= 5 \\ 5x - 3y + z &= 13 \end{aligned}$!

Geben Sie jeweils auch die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix an und stellen Sie den Zusammenhang zu den Lösbarkeitseigenschaften der Gleichungssysteme dar! Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch!

2.13. Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 &= 11 \end{aligned} \quad !$$

2.14. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 100 \\ 3x_1 + 2x_3 + 4x_5 &= 90 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 75 \\ x_2 + x_3 + 3x_5 &= 60 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 &= 30 \\ 3x_2 + 2x_4 + 2x_5 &= 90 \end{aligned} \quad !$$

2.15. Für welche Werte der Parameter a und b hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -4 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + ay + 2z &= b \end{aligned}$$

keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen?

2.16. Geben Sie eine spezielle und die allgemeine Lösung folgenden Gleichungssystems an: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$!

2.17. a) Wenden Sie den Gaußschen Algorithmus auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 13 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

an!

b) Für welche Werte des Parameters λ ist das Gleichungssystem lösbar?

c) Geben Sie im Falle der Lösbarkeit die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an!

2.18. Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie eine Darstellung der allgemeinen Lösung an, in der x_2, x_3 und x_5 frei gewählt werden können!

b) Geben Sie eine Darstellung der allgemeinen Lösung an, in der x_1, x_2 und x_5 frei gewählt werden können!

c) Geben Sie eine ganzzahlige Lösung an!

d) Geben Sie eine nichtnegative Lösung an!

e) Geben Sie eine ganzzahlige und in allen Komponenten streng positive Lösung an!

f) Geben Sie drei linear unabhängige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ an!

g) Können vier Lösungen dieses homogenen Systems linear unabhängig sein?

2.19. Gegeben sei das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 4x_5 &= 18 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 - x_5 &= 15 \end{aligned}.$$

a) Geben Sie eine Darstellung der allgemeinen Lösung an, in der x_1, x_4 und x_5 frei gewählt werden können!

b) Geben Sie eine in allen Komponenten nichtnegative und ganzzahlige Lösung an!

c) Geben Sie drei linear unabhängige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems
$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$
an!

d) Können vier Lösungen dieses homogenen Systems linear unabhängig sein?

2.20. In einer Stanzerei werden aus Blechtafeln drei verschiedene Teile T_1, T_2 und T_3 gestanzt. Aufgrund der Geometrie der Teile wurden vier sinnvoll erscheinen-de Varianten des Stanzens aus einer Blechtafel technologisch vorbereitet. Beim Stanzen dieser Varianten entstehen folgende Stückzahlen der Teile:

	je Variante			
	V_1	V_2	V_3	V_4
Anzahl T_1	1	1	0	0
Anzahl T_2	1	0	1	0
Anzahl T_3	2	4	6	8

Es ist nun ein Auftrag von 3 T_1, 2 T_2 und 40 T_3 zu stanzen. Wie oft müssen die Varianten zur Anwendung kommen, wenn möglichst wenig Blechtafeln verbraucht werden sollen?

2.21. Ein Chemiebetrieb produziert vier Waschmittel, wobei drei Rohstoffe in folgenden Mengen verbraucht werden:

	je Tonne			
	WM_1	WM_2	WM_3	WM_4
R_1 (in t)	1/2	0	1/2	1/4
R_2 (in t)	3/5	3/5	0	3/5
R_3 (in t)	0	1	3/5	3/5

Es sind 2t R_1, 3t R_2 und 1t R_3 vorhanden. Welche Waschmittel müssen in welchen Mengen produziert werden, damit alle Rohstoffe vollständig verbraucht werden? Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Lösung!

2.22. Zeigen Sie, daß der Vektor $\begin{pmatrix} 7.40 \\ 9.40 \\ 4.25 \end{pmatrix}$ Linearkombination, der Vektor $\begin{pmatrix} 7.40 \\ 9.40 \\ 4.60 \end{pmatrix}$ hingegen keine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist!

2.23. Bei einem Bäcker, bei dem keine Preisauszeichnung vorgenommen worden ist, kauft ein Kunde 1 Brot und 10 Brötchen für 7.40 DM, ein weiterer Kunde 2 Brote und 8 Brötchen für 9.40 DM. Ein dritter Kunde, der das beobachtet hat, soll für 1 Brot und 3 Brötchen 4.60 DM bezahlen.

a) Wieso kann das nicht stimmen?
b) Was muß der dritte Kunde bezahlen, wenn die ersten beiden Kunden den korrekten Betrag zahlen mußten?
c) Wäre dieselbe Aussage auch möglich, wenn der zweite Kunde 2 Brote und 20 Brötchen gekauft und hierfür 14.80 DM zu zahlen gehabt hätte?

2.24. Welche der im folgenden genannten Vektorsysteme sind linear unabhängig? Ermitteln Sie in allen Fällen auch die Dimension der Vektorsysteme! In welchen Fällen handelt es sich um eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$?

a) $\begin{pmatrix} 7.40 \\ 9.40 \\ 4.60 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 7.40 \\ 14.80 \\ 4.60 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 7.40 \\ 9.40 \\ 4.25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 7.40 \\ 14.80 \\ 4.25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$!

2.25. Geben Sie die Lösung folgender Gleichungssysteme an:

a) $\begin{pmatrix} 7.40 & 1 & 10 \\ 9.40 & 2 & 8 \\ 4.60 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$, b) $\begin{pmatrix} 7.40 & 1 & 10 \\ 14.80 & 2 & 20 \\ 4.60 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$,

c) $\begin{pmatrix} 7.40 & 1 & 10 \\ 9.40 & 2 & 8 \\ 4.25 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$, d) $\begin{pmatrix} 7.40 & 1 & 10 \\ 14.80 & 2 & 20 \\ 4.25 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$!

2.26. Berechnen Sie (sofern existent) die Inversen der Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$!

Welcher Zusammenhang besteht bei c) und d) zum Ergebnis von Aufgabe 2.12?

2.27. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 3x + y - 5z &= 5 \\ 2x - 3y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

durch Anwendung der Inversen der Koeffizientenmatrix (s. Aufgabe 2.26c) auf die rechte Seite!

2.28. Ein Produkt wird von zwei Produzenten in unterschiedlichen Qualitäten hergestellt und zu Preisen p_1 bzw. p_2 verkauft. Die Nachfragefunktionen lauten $N_1 = -p_1 + p_2 + 5$ und $N_2 = p_1 - p_2 + 15$, während die Angebotsfunktionen $A_1 = 3p_1 - a$ und $A_2 = 5p_2 - b$ seien.

a) Ermitteln Sie für den Fall $a = 9,\ b = 39$ die Preise, für die Angebot und Nachfrage im Gleichgewicht stehen!

b) Ermitteln Sie mittels Matrizeninversion, wie sich der Vektor der Gleichgewichtspreise $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ aus dem Vektor des festen Aufwands $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ errechnet!

2.29. Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$!

2.30. Die Komponenten x_i eines Vektors $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^{5}$ seien Mengen von Waren i in entsprechenden Mengeneinheiten. Ein Lager habe zu Beginn einer Woche einen Warenbestand

$\begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 8 \\ 50 \\ 235 \end{pmatrix}$, es erhalte in der Woche eine Lieferung von $\begin{pmatrix} 800 \\ 50 \\ 0 \\ 10 \\ 250 \end{pmatrix}$ und realisiere 5 Auslieferungen von je $\begin{pmatrix} 200 \\ 20 \\ 1 \\ 5 \\ 45 \end{pmatrix}$.

Wie groß ist der Lagerbestand am Ende der Woche?

2.31. Berechnen Sie $\mathbf{AC} + \mathbf{B}^\top\mathbf{C}$ für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$!

2.32. Handelt es sich bei folgenden Mengen um Unterräume des $\mathbb{R}^2$:
$\left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} x \\ 2x+3 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\}$
?

2.33. a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ Linearkombination, der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ hingegen keine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist.

b) Bei einem Bäcker soll ein Kunde für 1 Brot und 12 Brötchen 5 €, ein zweiter Kunde für 2 Brote und 4 Brötchen 4 € und ein dritter Kunde für 1 Brot und 8 Brötchen ebenfalls 4 € bezahlen. Warum kann das nicht sein?

2.34. a) Welches der Vektorsysteme $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ ist linear unabhängig, wann handelt es sich um eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Geben Sie die Dimensionen der linearen Hüllen der beiden Vektorsysteme an!

c) Stellen Sie, sofern das möglich ist, die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombinationen der Vektorsysteme aus a) sowie als Linearkombinationen der Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ dar! Sind die Darstellungen eindeutig?

2.35. Welchen Rang haben die Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$?

2.36. Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \end{aligned}$.

a) Geben Sie eine spezielle und die allgemeinen Lösung an des Gleichungssystems an!

b) Welcher Zusammenhang besteht zu den Rängen der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix?

c) Geben Sie drei linear unabhängige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$
an!

d) Können vier Lösungen dieses homogenen Systems linear unabhängig sein?

2.37. In einer Firma werden aus Ausgangsstoffen A_1, A_2 und A_3 Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und aus den Ausgangs- und Zwischenprodukten Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt. Im Einzelnen werden für eine Einheit Z_1 5 Einheiten A_1, 2 Einheiten A_2 und 1 Einheit A_3, für eine Einheit Z_2 6 Einheiten A_1 und 2 Einheiten A_3 sowie für eine Einheit Z_3 4 Einheiten A_1 und je 2 Einheiten A_2 und A_3 benötigt, während für ein Stück E_1 5 Einheiten A_1, 2 Einheiten Z_1, 3 Einheiten Z_2 und 1 Einheit Z_3, für ein Stück E_2 3 Einheiten Z_1 und 2 Einheiten Z_2 und für ein Stück E_3 je eine Einheit Z_1, Z_2 und Z_3 benötigt werden.

a) Geben Sie die Aufwandsmatrizen für den Zusammenhang von Ausgangsstoffen und Zwischenprodukten, für den Zusammenhang von Zwischen- und Endprodukten sowie für den Zusammenhang von Ausgangsstoffen und Endprodukten an!

b) Ein Kunde bestellt 10 Stück E_1, 20 Stück E_2 und 30 Stück E_3 sowie 20 Einheiten Z_1. Welche Mengen an Ausgangsstoffen werden benötigt?

2.38. Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie eine Darstellung der allgemeinen Lösung an, in der x_3 und x_4 frei gewählt werden können!

b) Geben Sie eine Darstellung der allgemeinen Lösung an, in der x_1 und x_3 frei gewählt werden können!

c) Geben Sie die spezielle Lösung an, für die $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ gilt!

d) Gibt es eine spezielle Lösung, die in allen Komponenten positiv und ganzzahlig ist?

e) Geben Sie die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an!

2.39. Für welche Werte der Parameter a und b hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + \;\; y + \;\; z &= 3 \\ x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x - 3y + az &= b \end{aligned}$$

keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen?

2.40. Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine beliebige Matrix vom Typ 2×2.

a) Wann existiert die inverse Matrix?

b) Berechnen Sie im Falle der Existenz die inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$!

2.41. a) Invertieren Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus!

b) Lösen Sie mit Hilfe der inversen Matrix die Gleichungssyteme

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \;\; 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + \;\; x_2 + \;\; 9x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + \;\;\;\; x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 &= 8 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \;\; 3x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + \;\;\;\; x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 3x_1 + \;\; x_2 + \;\; 9x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 &= 11 \end{aligned} \quad !$$

2.42. Gegeben seien die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Stellen Sie die Vektoren grafisch dar!

b) Berechnen Sie die Skalarprodukte zwischen den Vektoren! Welche der Vektoren sind zueinander orthogonal?

c) Berechnen Sie die Normen der Vektoren und normieren Sie die Vektoren (d.h., bestimmen Sie Vektoren gleicher Richtung der Norm 1)!

2.43. a) Leiten Sie durch Quadrieren der Dreiecksungleichung für $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung her!

b) Überzeugen Sie sich für die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ von der Gültigkeit der Ungleichungen!

Kapitel 3
Eigenwerte

3.1 Determinanten

Die Determinanten benötigen wir als Hilfsmittel zur Eigenwertberechnung.

Definition 3.1. *Sei $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix.*

1. *Für $n = 2$ definieren wir*

   $\det \boldsymbol{A} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$

2. *$n > 2$: Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne $\boldsymbol{A}_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ diejenige Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus $\boldsymbol{A}$ entsteht. Sei j ein beliebiger Spaltenindex. Wir definieren dann*

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} \det \boldsymbol{A}_{i,j}$$

   (Laplace'sche Entwicklungsregel)

Satz 3.1. *Seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{D}$ eine $m \times m$-Matrix sowie $\boldsymbol{C}$ eine $n \times m$-Matrix. Dann gelten die folgenden Rechenregeln für Determinanten:*

1. *Vertauscht man 2 Spalten so ändert die Determinante ihr Vorzeichen*

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,k} & \ldots & a_{1,n} \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{1,n} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,k} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= (-1) \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,k} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{1,n} & \ldots & a_{n,k} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

2. *Multipliziert man eine Spalte mit λ, so multipliziert sich auch die Determinante mit den Faktor λ*

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & \lambda a_{1,j} & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1} & \ldots & \lambda a_{n,j} & \ldots \end{pmatrix} = \lambda \det \boldsymbol{A}\,.$$

3. $\det(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda^n \det \boldsymbol{A}$.

4. *Addiert man zu einer Spalte das Vielfache einer anderen so ändert sich die Determinante nicht.*

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} + \lambda a_{1,k} & \ldots & a_{1,n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n,1} & & a_{n,j} + \lambda a_{n,k} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{A}$$

5. *Sei* $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *eine obere Dreiecksmatrix, d.h.* $r_{k,i} = 0$ *für* $k > i$*, also*

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{1,1} & \dots & \dots & r_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & r_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ dann ist}$$

$$\det \boldsymbol{R} = r_{1,1} \dots r_{n,n} = \prod_{k=1}^{n} r_{k,k}$$

6. *Für eine obere Blockdreiecksmatrix gilt:*

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det \ \boldsymbol{A} \cdot \det \ \boldsymbol{D}\,.$$

7. $\boldsymbol{A}$ *ist invertierbar* $\Leftrightarrow \det \ \boldsymbol{A} \neq 0\,.$

8. $\det \ (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \det \ \boldsymbol{A} \cdot \det \ \boldsymbol{B}$,

9. $\det \ \boldsymbol{A} = \det \ \boldsymbol{A}^T$

3.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 3.2. *Eine Zahl* $\lambda \in \mathbb{C}$ *heißt* **Eigenwert der Matrix** $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, falls ein Vektor* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ *existiert mit* $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$*. Der Vektor* x *mit*

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{3.1}$$

heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ*.*

Satz 3.2. *Die Eigenwerte* $\lambda_i\,(i = 1\dots, n)$ *sind Nullstellen des* **charakteristischen Polynoms** $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$*. Die Eigenvektoren* $\boldsymbol{v}$ *zum Eigenwert (EW)* λ_i *bilden einen linearen Unterraum von* $\mathbb{R}^n$*, den Eigenvektorraum zum EW* λ_i*.*

Beweis: Ein Eigenvektor (EV) existiert genau dann falls $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})$ nicht invertierbar ist, Satz 3.1, Eigenschaft 7 liefert dann die Behauptung.

□

Bemerkung: Wäre $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})$ invertierbar, so wäre die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ einzige (eindeutige) Lösung des Gleichungssystems 3.1.

Satz 3.3. *Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.*

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen daher an, die Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ zu verschiedenen Eigenwerten seien linear abhängig. Dann gibt es eine Linearkombination

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_r \boldsymbol{v}_r = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \alpha_i \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots, r). \tag{3.2}$$

Es gilt $\boldsymbol{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ und wir setzen obige Darstellung für den Nullvektor ein und erhalten

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{A}\mathbf{0} = \boldsymbol{A}(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_r \boldsymbol{v}_r) = \alpha_1 \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 + \ldots \alpha_r \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_r. \tag{3.3}$$

Da die $\boldsymbol{v}_i$ Eigenvektoren sind gilt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda_i \boldsymbol{v}_i \quad (i = 1, \ldots, r)$. Wir können also schreiben

$$\alpha_1 \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_r \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_r = \alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_r \lambda_r \boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

Wir multiplizieren Gleichung 3.2 mit λ_1 und subtrahieren diese von Gleichung 3.4. Damit erhalten wir

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + (\lambda_r - \lambda_1)\lambda_r \alpha_r \boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}. \tag{3.5}$$

Diese Darstellung für den Nullvektor setzen wir wieder in 3.3 ein und erhalten

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2 \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + (\lambda_r - \lambda_1)\lambda_r \alpha_r \boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}.$$

Jetzt multiplizieren wir 3.5 mit λ_2. Dies führt auf

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\alpha_3 \boldsymbol{v}_3 + \ldots + (\lambda_r - \lambda_1)(\lambda_r - \lambda_2)\alpha_r \boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}\,.$$

Das r-malige Einsetzen in Verbindung mit der Subtraktion der mit λ_i multiplizierten Gleichungen führt uns auf oben beschriebene Weise auf

$$(\lambda_r - \lambda_1) + \ldots + (\lambda_r - \lambda_{r-1})\alpha_r \boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}\,.$$

Hieraus schließen wir $\alpha_r = 0$, da die $\alpha_i \neq \alpha_j$. Durch rückwärtiges Einsetzen erhalten wir $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \ldots, r$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu unserer Annahme.

□

Satz 3.4.

- *Besitzt eine Matrix* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *n linear unabhängige Eigenvektoren* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *und sei* $\boldsymbol{B} := (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ *dann gilt für die Diagonalmatrix* $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\boldsymbol{D} := \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

- *Ist* $\boldsymbol{A}$ *symmetrisch, d. h.* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$*, dann existiert* $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ *mit* $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{B}^T$ *und* $\boldsymbol{D} := \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

  Dabei gilt: $\boldsymbol{v}_i^T\,\boldsymbol{v}_j = 0$ *für* $i \neq j$ *und* $\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{v}_j = 1$ *für* $i = j$ *mit* $i, j = 1, \ldots, n$.

Beispiel zur Eigenwertberechnung:

Sei $\boldsymbol{A} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 21 & -3 \\ -3 & 29 \end{pmatrix}$. Wir haben $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ zu lösen und berechnen

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 21 & -3 \\ -3 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{10} - \lambda & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{29}{10} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Gemäß Satz 3.2 ergeben sich die Eigenwerte als Nullstellen des chakteristischen Polynoms $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$. Wir bestimmen:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{21}{10} - \lambda & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{29}{10} - \lambda \end{pmatrix} = \left(\ \frac{21}{10} - \lambda\ \right)\left(\ \frac{29}{10} - \lambda\ \right) - \frac{9}{10} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Aus dieser Gleichung bestimmen wir die Eigenwerte mit der pq-Formel und erhalten $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Zur Berechnung des Eigenvektors $\boldsymbol{v}_1$ lösen wir

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{v}_{1,1} \\ \tilde{v}_{1,2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

und erhalten $\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entsprechend lösen wir zum Eigenwert λ_2

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2\boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{v}_{2,1} \\ \tilde{v}_{2,2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0},$$

und erhalten $\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Wir normieren die Eigenvektoren auf die Länge 1 und erhalten schließlich $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\|\tilde{v}_1\|}\tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, sowie $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|}\tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3.3 Aufgaben

3.1. Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$!

Welcher Zusammenhang besteht zu den Lösbarkeitseigenschaften linearer Gleichungssysteme (bei c) und d) vgl. Aufgabe 2.12) und zur Invertierung von Matrizen (vgl. Aufgabe 2.26)?

3.2. Ermitteln Sie die Eigenwerte und -vektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$!

3.3. Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix}$.

a) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ und führen Sie die Diagonalisierung aus!

b) Berechnen Sie $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ und $\mathbf{A}^5$!

3.4. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ und führen Sie die Diagonalisierung aus!

3.5. Orthogonalisieren Sie das Vektorsystem $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$, d.h., bestimmen Sie ein orthogonales Vektorsystem, dessen lineare Hülle mit der des gegebenen Vektorsystems übereinstimmt!

Hinweis: Lassen Sie einen Vektor $\boldsymbol{x}_1$ unverändert und suchen Sie einen dazu orthogonalen Vektor in der Form $\boldsymbol{x}_2 - \lambda \boldsymbol{x}_1$, d.h., bestimmen Sie λ so, dass die beiden Vektoren zueinander orthogonal werden! Dieses Verfahren heißt Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren.

3.6. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -10 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Determinante!

b) Invertieren Sie die Matrix!

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren!

3.7. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{C}^2$!

3.8. 3 ist Eigenwert der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie die anderen beiden Eigenwerte sowie die Eigenvektoren der Matrix! (Zur Nutzung des Ergebnisses siehe Aufgabe 5.5)

3.9. Sei $\boldsymbol{x}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ der Matrix $\boldsymbol{A}$, ferner sei $\boldsymbol{I}$ wie üblich die Einheitsmatrix.

a) Vereinfachen Sie den Ausdruck $(\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\,\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}$!

b) Geben Sie für die Matrizen aus den Aufgaben 3.3 und 3.4 die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\,\boldsymbol{I}$ an!

c) Geben Sie für die Matrix aus Aufgabe 3.3
$\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\,\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
an, ohne die Matrizenmultiplikation usw. auszuführen!

3.10. Gegeben sei die Matrix $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Determinante!
b) Invertieren Sie die Matrix!
c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren!
d) Führen Sie die Diagonaliserung aus!

3.11. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ im komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^2$!

Kapitel 4
Vektorgeometrie im $\mathbb{R}^3$

4.1 Vektoren und ihre Produkte

Wir charakterisieren jeden Punkt P durch einen Vektor $\boldsymbol{P}$ vom Nullpunkt aus in Richtung $\boldsymbol{P}$ mit Komponenten

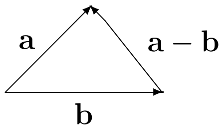
$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} P_i\, \boldsymbol{e}_i,$$

mit dem i-ten Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_i$.

Der Winkel zwischen zwei Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\cos\alpha := \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

Cosinussatz Sei $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, dann gilt $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha + |\boldsymbol{b}|^2$



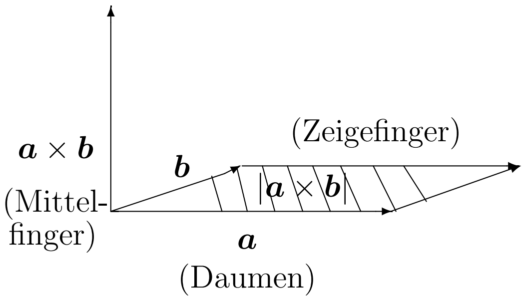
Beweis:
$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha \end{aligned}$$

Als Spezialfall erhalten wir den **Satz des Pythagoras**. Denn in diesem Fall steht der Vektor $\boldsymbol{a}$ senkrecht auf dem Vektor $\boldsymbol{b}$, mithin ist $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ gleichbedeutend mit $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, weshalb der letzte Term im Cosinussatz entfällt, also $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2$.

Das **Kreuzprodukt** zweier Vektoren $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ und $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ ist definiert durch

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \det\big(\ \boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\ \big), \quad \text{mit } \boldsymbol{e} := \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

Der Vektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ist orthogonal zu der durch $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Ebene. Sein Betrag ist gegeben durch $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\sin\alpha|$ und seine Richtung ist durch die „**Rechte Handregel**“ definiert.



Es gelten folgende Rechenregeln:

Satz 4.1. *Seien $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt*

1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$, *Antikommutativität*
2. $\alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\alpha\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\alpha\boldsymbol{b})$
3. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

4. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{c}$ *(Graßmann)*

5. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})$

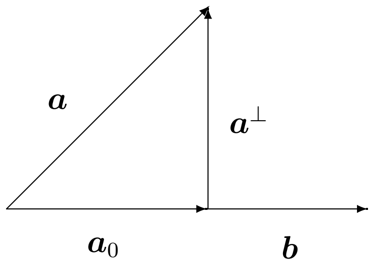
6. $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \times |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$ *(Lagrange)*

Orthogonale Zerlegung

Seien $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, dann existiert genau ein Vektor $\boldsymbol{a}_b^\perp$ und ein $\boldsymbol{a}_0$ mit $\boldsymbol{a}_b^\perp \perp \boldsymbol{b}$, d.h. $\boldsymbol{a}_b^\perp \cdot \boldsymbol{b} = 0$ und $\boldsymbol{a}_b^\perp + \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}$. Die Zerlegung in eine Summe orthogonaler Vektoren wollen wir **orthogonale Zerlegung** nennen.

Dabei ist $\boldsymbol{a}_0 = \lambda \boldsymbol{b}$ mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $\boldsymbol{a}_0$ ist parallel zu $\boldsymbol{b}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_0 &= |\boldsymbol{a}| \cos \alpha \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2} \cdot \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{a}_b^\perp &= \boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2} \cdot \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{a}_b^\perp &= \frac{\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|^2}
\end{aligned}$$



Satz 4.2. (Spatprodukt)

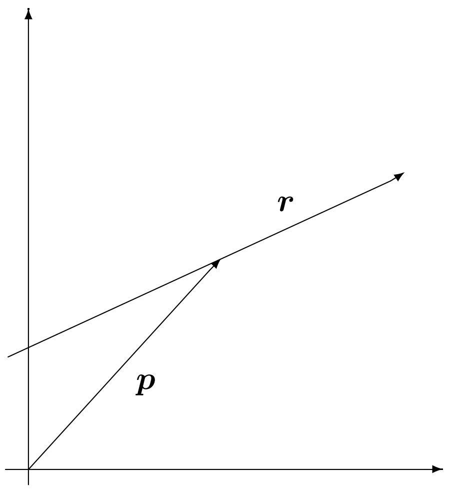
Seien $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$, *dann gilt* $V = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$

4.2 Geraden und Ebenen im Raum

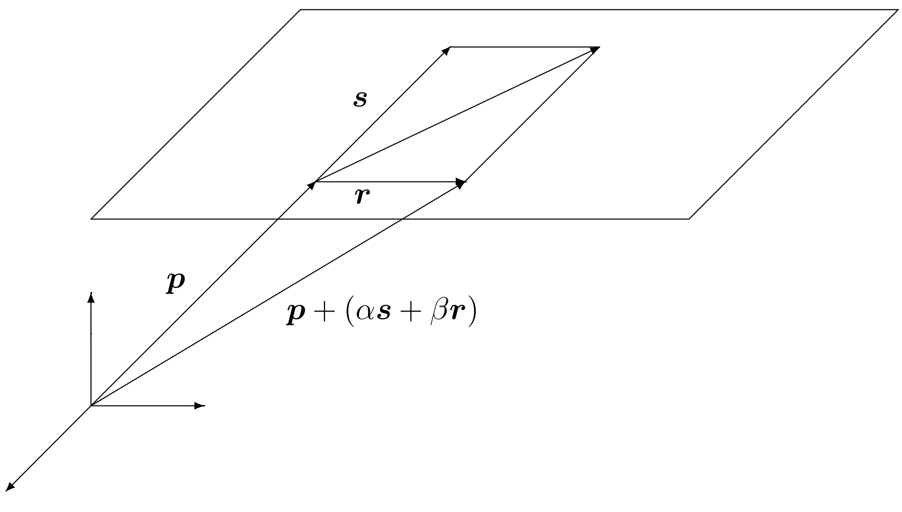
1. Parameterdarstellung einer Geraden
   (a) durch $\mathbf{0}$ in Richtung des Richtungsvektors $\boldsymbol{r}$, $G = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{r} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}\}$, falls die Gerade durch den Nullpunkt geht,
   (b) durch $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ mit $G = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \alpha \boldsymbol{r} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}\}$ mit dem Richtungsvektor $\boldsymbol{r}$. Sind zwei Geradenpunkte $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in G$ gegeben, so ist $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$ Richtungsvektor, also $G = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \alpha(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}\}$.

2. Parameterdarstellung der Ebene
   (a) durch $\mathbf{0}$ und zwei linear unabhängigen Vektoren $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$, die in der Ebene liegen $E = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{s} + \beta\boldsymbol{t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, wenn die Ebene durch den Nullpunkt läuft.
   (b) durch $\boldsymbol{p}$ und zwei linear unabhängige Vektoren $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$ die in der Ebene liegen $E = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \alpha\boldsymbol{s} + \beta\boldsymbol{t}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ im allgemeinen Fall. Sind drei Ebenenpunkte $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ gegeben, so erhält man die Parameterdarstellung der Ebene durch $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$, vorausgesetzt $\boldsymbol{s}$ und $\boldsymbol{t}$ sind linear unabhängig, d.h. die Punkte $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ liegen nicht auf einer Geraden.

Alternativ gilt $E = \{\boldsymbol{x} : \det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = 0\}$, dies bedeutet $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{s}$ und $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{t}$.
Der Vektor $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{t}}{|\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{t}|}$ steht orthogonal auf E und heißt **Normaleneinheitsvektor**.
Die Darstellung $E = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{n}\boldsymbol{x} = d, \quad d \geq 0\}$ heißt **Hesse'sche Normalform**.
Der Abstand D eines Punktes $\boldsymbol{Q}$ von der Ebene ergibt sich aus $D = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{n} - d$.

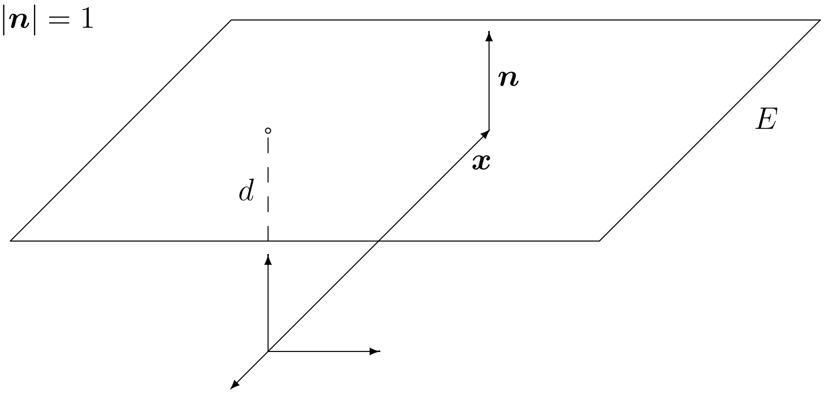


Skizze zur Parameterdarstellung



Skizze Hesse-Normalform

$|\boldsymbol{n}| = 1$



4.3 Aufgaben

4.1. Gegeben sei das Dreieck mit den Eckpunkten $A(6, -5)$, $B(5, 1)$ und $C(-3, 13)$. Geben Sie die Seitenhalbierende der Seite BC vektoriell an und ermitteln Sie ihre Länge!

4.2. Geben Sie die Gleichung der Ebene durch die Punkte $(1, 1, 0)$, $(2, 3, 3)$ und $(1, 2, 4)$ in Parameterform und in parameterfreier Form an!

4.3. In welchen Punkten schneiden folgende Geraden die Ebene durch die Punkte $(1, 1, 0)$, $(2, 3, 3)$ und $(1, 2, 4)$:

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$?

Welcher Zusammenhang besteht zur Lösung von Aufgabe 2.10a)?

4.4. Gegeben sei das Dreieck mit den Eckpunkten $A(1, 1, 1)$, $B(2, -1, 4)$ und $C(4, 2, -4)$.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks!
b) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks!
c) Berechnen Sie den Winkel beim Punkt A !
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit Hilfe des Kreuzproduktes!

4.5. a) Ermitteln Sie mit Hilfe des Kreuzproduktes die Gleichung der Ebene, die die Punkte $(3, 1, 1)$ und $(2, 2, 2)$ enthält und zum Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel ist!

b) Bestimmen Sie die Gleichung des Lotes von $P(-10, 6, -10)$ auf diese Ebene und den Lotfußpunkt!

c) Wie groß ist der Abstand des Punktes $P(-10, 6, -10)$ von der Ebene?

4.6. Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene

a) durch die Punkte $(0,0,0)$, $(2,1,-2)$ und $(7,5,-4)$,
b) durch die Punkte $(1,1,1)$, $(3,2,-1)$ und $(2,3,3)$,
c) durch den Punkt $(1,1,1)$, auf der der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht steht!

In welcher Beziehung liegen die Ebenen zueinander?

4.7. In welchen Punkten bzw. Kurven schneiden sich die Ebenen
a) $x-2y+3z=4,\ 3x+y-5z=5$ und $2x-3y+3z=\ 8$,
b) $x-2y+3z=4,\ 3x+y-5z=5$ und $5x-3y+\ z=\ 8$,
c) $x-2y+3z=4,\ 3x+y-5z=5$ und $5x-3y+\ z=13$?

4.8. Die Ebene E sei durch die Punkte $(2,1,0)$, $(5,2,1)$ und $(4,0,0)$ gegeben.
a) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene in Parameterform und in parameterfreier Form!
b) Geben Sie die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen und die Schnittgeraden der Ebene mit den Koordinatenebenen an!
c) Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebene E mit der Ebene $x+3y+z=3$!
d) Ermitteln Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt $P(6,14,-12)$ auf die Ebene E sowie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E!

4.9. Die Ebene E sei durch die Punkte $(1,0,1)$, $(2,2,0)$ und $(3,-1,-2)$ gegeben.
a) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene in Parameterform und in parameterfreier Form!
b) Geben Sie den Schnittpunkt der Ebene mit der z–Achse und die Schnittgerade der Ebene mit der x–y–Ebene an!
c) Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der Ebene E mit der Ebene $x+3y+z=3$!
d) Ermitteln Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt $P(17,2,9)$ auf die Ebene E sowie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E!

4.10. Seien $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ die Ortsvektoren der Eckpunkte eines Dreiecks ABC sowie $\boldsymbol{s}_A$, $\boldsymbol{s}_B$ und $\boldsymbol{s}_C$ die (Richtungs-, d.h. freien) Vektoren der Seitenhalbierenden zu den gegenüberliegenden Seiten. Berechnen Sie $\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{s}_A$, $\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{s}_B$ und $\boldsymbol{c}+\frac{2}{3}\boldsymbol{s}_C$! Welche geometrischen Aussagen können aus dem Ergebnis geschlossen werden?

4.11. Die Ebene E sei durch die Punkte $(1,1,1)$, $(2,-1,4)$ und $(4,2,-4)$ gegeben.
a) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene in Parameterform und in parameterfreier Form!
b) Geben Sie den Schnittpunkt der Ebene mit der z–Achse und die Schnittgerade der Ebene mit der x–y–Ebene an!
c) Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der Ebene E mit der Ebene $3x+2y+3z=4$!

d) Bestimmen Sie die Gleichung des Lotes vom Punkt $(6, 5, 6)$ auf die Ebene E und den Lotfußpunkt!

e) Wie groß ist der Abstand des Punktes $(6, 5, 6)$ von der Ebene E?

4.12. Die Ebene E enthalte die Gerade $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ und sei zur Gerade $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ -21 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ parallel.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E in parameterfreier Form!

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Ebene E mit der y–Achse!

c) Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der Ebene E mit der x–z–Ebene!

d) Bestimmen Sie die Gleichung des Lotes vom Punkt $(7, 18, -21)$ auf die Ebene E!

e) Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Punkt $(7, 18, -21)$ und der Ebene E!

4.13. Sei $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ sowie das Volumen des von den Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ aufgespannten Spates (Parallelepipeds)!

4.14. Gegeben seien die Punkte $A(0, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(4, 3, 7)$ und $D(2, 5, 11)$. Vom Punkt A ausgehend werde von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ ein Spat aufgespannt!

a) Bestimmen Sie alle Eckpunkte des Spates!

b) Ermitteln Sie das Volumen des Spates!

c) Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Oberfläche des Spates!

d) Ermitteln Sie für alle den Punkt A enthaltenden Seitenflächen die Winkel beim Punkt A!

4.15. a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms!

b) Welches dreidimensionale Analogon hat das Ergebnis?

Kapitel 5 Hauptachsentransformation

Im folgenden Kapitel wollen wir uns mit der Hauptachsentransformation befassen. Die positiv definiten symmetrischen Matrizen spielen in diesem Zusammenhang ein besonders wichtige Rolle, weshalb wir in Abschnitt 5.1 näher auf deren Eigenschaften eingehen wollen.

5.1 Positiv definite symmetrische Matrizen

Eine symmetrische Matrix, charakterisiert durch $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$, heißt positiv definit, falls $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ist.

Satz 5.1. *Die Matrix* $\boldsymbol{A}$ *ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren, d.h. alle Unterdeterminanten* $\det(\boldsymbol{A}_k)$ *mit* $\boldsymbol{A}_k = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,k},\; k = 1, \ldots, n$ *positiv sind.*

Wir benötigen zum Verständnis der Hauptachsentransformation den Begriff der Koordinatentransformation, den wir in Abschnitt 5.2 näher beleuchten.

5.2 Koordinatentransformationen

Eine Koordinatentransformation ist der Übergang von kartesischen Koordinaten $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ zu einem schiefwinkligen Koordinatensystem $K = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ mit Ursprung $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ und der Matrix $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$, wobei die Vektoren $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ linear unabhängig sind.

Sei $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{p}$ mit $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ und $\det(\boldsymbol{B}) \neq 0$, dann ist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})$. Einfachheitshalber sei im folgenden $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$.

Sei $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}$, dann folgt daraus $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\eta}$ bzw. $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}$.

Betrachten wir η_i als die Komponenten von $\boldsymbol{y}$ bzgl. der Basis $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$, so wird die Wirkung der Matrix $\boldsymbol{A}$ auf einen Vektor $\boldsymbol{x}$ in der Basis $\boldsymbol{B}$ durch die Matrix $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$ realisiert.

Bemerkung 5.1. *Im Fall symmetrischer Matrizen* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *existieren Eigenwerte* $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$ *und Eigenvektoren* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *mit* $|\boldsymbol{v}_i| = 1, \quad i = \{1, \ldots, n\}$ *die ein (orthogonales) Basissystem aufbauen, d.h.*

$$\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{v}_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \textit{falls } i = j \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Bezüglich dieser Basis besitzt die durch $\boldsymbol{A}$ *bewirkte lineare Abbildung die Darstellung*

$$\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \boldsymbol{\Lambda}, \quad \boldsymbol{V} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n).$$

5.3 Quadratische Formen und Hauptachsentransformation

Ein quadratisches Polynom in n Variablen $\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ ist ein Ausdruck der Form

$$P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{2} \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\gamma}$$

mit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}$.

Unter einer quadratischen Form verstehen wir die Teilmenge Q des $\mathbb{R}^n$, für die gilt

$$Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : P(\boldsymbol{x}) = 0\} .$$

Durch eine geschickte Koordinatentransformation, die sogenannte Hauptachsentransformation, ist es nun möglich, jede quadratische Form in eine recht einfache Normalform zu überführen. Seien dazu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu > 0$, $\lambda_{\mu+1}, \dots, \lambda_{\mu+\nu} < 0$ und $\lambda_{\mu+\nu+1}, \dots, \lambda_n = 0$, wobei auch $\mu, \nu = 0$ möglich ist. Weiterhin seien $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ die zugehörigen Eigenvektoren mit $\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{v}_j = \delta_{i,j}$. Dann gilt für $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\xi}$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(\boldsymbol{\xi}) &= P(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})) = P(\boldsymbol{V}\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{V} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{2}\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{\xi} + \gamma \\
&= \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{2}\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{\xi} + \gamma \\
&= \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{2}\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{\xi} + \gamma = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun noch $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)^T \text{ und } b_i = \begin{cases} (\boldsymbol{V}\boldsymbol{a})_i \, \lambda_i^{-1}, & \text{falls } \lambda_i \neq 0 \\ 0, & \text{falls } \lambda_i = 0 \end{cases} ,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\hat{P}(\boldsymbol{z}) &= \tilde{P}(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{z})) = (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{b})^T \boldsymbol{\Lambda} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{2}\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{V} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{\gamma} \\
&= \boldsymbol{z}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{z} + \boldsymbol{2} \tilde{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{z} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

mit $\tilde{a}_i = 0$ für $i = 1, \dots, \mu + \nu$. Diese Substitution entspricht einer Verschiebung des Ursprungs, um die linearen Terme soweit möglich zu beseitigen Gilt jetzt $\tilde{\boldsymbol{a}} = 0$, d.h.

$$\hat{P}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{z} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}, \tag{5.1}$$

so sind wir fertig. Andernfalls können wir wir einen Index i mit $\tilde{a}_i \neq 0$ wählen und erhalten durch Verschieben des Ursprungs um $-d/(2a_i)$ Einheiten in z_i–Richtung die Form

$$\hat{P}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{z} + \boldsymbol{2} \tilde{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$$

Jetzt setzen wir noch $\varphi_1 = (\tilde{a}_{\mu+\nu+1}, \ldots, \tilde{a}_n)^T / |\tilde{\boldsymbol{a}}|$ und ergänzen φ_1 durch $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-\mu-\nu}$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^{n-\mu-\nu}$. Die abschließende Transformation

$$\hat{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{\mu+\nu} & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \boldsymbol{z} \qquad \text{mit } \Phi = [\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-\mu-\nu}]$$

führt schließlich auf

$$\hat{P}(\hat{\boldsymbol{z}}) = \hat{\boldsymbol{z}}^T \boldsymbol{\Lambda} \hat{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{2}\tilde{\boldsymbol{a}}_{\mu+\nu+1} \hat{\boldsymbol{z}}_{\mu+\nu+1} = \boldsymbol{0}. \tag{5.2}$$

Die Gleichungen 5.1 und 5.2 führen uns somit auf folgenden Satz

Satz 5.2 (Normalform)**.** *Sei $Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : P(\boldsymbol{x}) = 0\}$ eine quadratische Form in $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Koordinatentransformation $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})$ mit $\det(\boldsymbol{B}) \neq 0$, natürliche Zahlen μ, ν sowie reelle Zahlen $\beta_i > 0$ mit $i = 1, \ldots, \mu+\nu$, so dass Q in den neuen Koordinaten durch eine der folgenden Gleichungen, die auch als Normalformen bezeichnet werden, beschrieben wird:*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\xi_i^2}{\beta_i^2} - \sum_{i=\mu+1}^{\mu+\nu} \frac{\xi_i^2}{\beta_i^2} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\xi_i^2}{\beta_i^2} - \sum_{i=\mu+1}^{\mu+\nu} \frac{\xi_i^2}{\beta_i^2} &= 1 \\ \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\xi_i^2}{\beta_i^2} - \sum_{i=\mu+1}^{\mu+\nu} \frac{\xi_i^2}{\beta_i^2} &= \xi_{\mu+\nu+1}. \end{aligned}$$

Beispiel 5.1 (Normalformen im $\mathbb{R}^2$)**.** *Haben wir eine quadratische Form $Q = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : P(x_1, x_2) = 0\}$ auf ihre Normalform gebracht, so können wir Informationen über die Art der durch $P(x_1, x_2) = 0$ beschriebenen Fläche gewinnen. Es liegt*

1. *im Falle $\mu = 2$, $\nu = 0$, $\dfrac{\xi_1^2}{\beta_1^2} + \dfrac{\xi_2^2}{\beta_2^2} = 1$ eine Ellipse mit den Halbachsen β_1 und β_2;*
2. *im Falle $\mu = 1$, $\nu = 1$, $\dfrac{\xi_1^2}{\beta_1^2} - \dfrac{\xi_2^2}{\beta_2^2} = 1$ eine Hyperbel;*
3. *im Falle $\mu = 1$, $\nu = 0$, $\dfrac{\xi_1^2}{\beta_1^2} = \xi_2$ eine Parabel*

vor.

5.4 Aufgaben

5.1. Aus dem kartesischen Koordinatensystem (x, y) der Ebene gehe durch Verschiebung des Koordinatenursprungs in den Punkt $(2, 4)$ und Drehung um 45^{O} in positive Richtung das Koordinatensystem (ξ, η) hervor. Beschreiben Sie die Gerade $y = \frac{x}{2} + 3$ in dem neuen Koordinatensystem!

5.2. Beweisen Sie, dass sich jede orthogonale zweireihige Matrix in der Form $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ \sin\alpha & \pm\cos\alpha \end{pmatrix}$ darstellen lässt! Welche Folgerung ergibt sich daraus für Koordinatentransformationen mit orthogonalen Matrizen?

5.3. Führen Sie für die Kurve $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 20x + 140y + 500 = 0$ die Hauptachsentransformation aus und stellen Sie diese grafisch dar!

5.4. a) Führen Sie die Hauptachsentransformation für die Kurve $2xy + \sqrt{2}(x+y) = 0$ durch!

b) Zeichnen Sie die Kurve!

5.5. Bringen Sie unter Benutzung des Ergebnisses von Aufgabe 3.8 die Gleichung der Fläche $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 108 = 0$ in Hauptachsenform! Um was für eine Fläche handelt es sich?

5.6. Führen Sie die Hauptachsentransformation für $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 8xy - 2xz + 8yz = 12$ aus! Um was für eine Fläche handelt es sich? Wie groß sind die Hauptachsenabschnitte? Skizzieren Sie die Fläche in den transformierten Koordinaten!

5.7. Gegeben sei die Fläche $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz = 0$.

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch!
Hinweis: 6 ist ein Eigenwert.

b) Bestimmen Sie die Gleichungen der Schnittkurven der Fläche mit den Koordinatenebenen des transformierten Koordinatensystems! Um was für Kurven handelt es sich?

c) Um was für eine Fläche handelt es sich?

d) Skizzieren Sie grob die Fläche in den transformierten Koordinaten!

5.8. Untersuchen Sie mit Hilfe der Hauptminoren, ob folgende Matrizen positiv bzw. negativ definit sind:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$!

Berechnen Sie für a) bis e) auch die Eigenwerte der Matrizen! Welcher Zusammenhang besteht zur Definitheit?

5.9. a) Zeigen Sie, dass durch die Gleichung $25x^2 + 150x + 9y^2 - 36y + 36 = 0$ eine Ellipse beschrieben wird!
b) Geben Sie den Mittelpunkt und die Halbachsen der Ellipse an!
c) Transformieren Sie die Koordinaten so, dass der Mittelpunkt der Ellipse im Ursprung des neuen Koordiantensystems liegt!

5.10. Gegeben seien die Kurven
(I) $4x^2 + 25y^2 - 56x + 100y + 196 = 0$und(II) $2x^2 + 2y^2 - 28x + 20y + 76 = 0$.
a) Um was für Kurven handelt es sich? Bestimmen Sie ggf. ihre Mittelpunkte und Halbachsen!
b) Skizzieren Sie die Kurven!

5.11. Aus dem kartesischen Koordinatensystem (x, y) der Ebene gehe durch Drehung um 45^{O} in positive Richtung das Koordinatensystem (ξ, η) hervor. Transformieren Sie die Gleichung $xy = 8$ in das neue Koordinatensystem! Skizzieren Sie die Kurve! Um was für eine Kurve handelt es sich?

5.12. Im kartesischen Koordinatensystem (x, y) der Ebene sei die Gerade $y = 4x + \frac{22}{13}$ gegeben. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Gerade in dem Koordinatensystem (ξ, η), das aus dem System (x, y) durch Verschiebung des Koordinatenurprungs in den Punkt $(x, y) = \left(-\frac{27}{13}, \frac{20}{13}\right)$ und Drehung um den Winkel $\arctan\frac{12}{5}$ in positive Richtung hervorgeht!

Hinweis: Die Verwendung der Zahlen 13, 12 und 5 soll die Rechnung zahlenmäßig vereinfachen. Warum ist das so?

5.13. Gegeben sei die Kurve $50x^2 - 240xy + 288y^2 + 104x - 689y + 169 = 0$.
a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch!
b) Um was für eine Kurve handelt es sich?
c) Um welchen Winkel wurde das Koordinatensystem bei der Hauptachsentransformation gedreht?
d) Skizzieren Sie die Kurve unter Angabe beider Koordinatensysteme!

5.14. Gegeben sei die Fläche $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4xz - 8yz = 144$.
a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch!
b) Um was für eine Fläche handelt es sich?
c) Skizzieren Sie die Fläche im transformierten Koordinatensystem!

Kapitel 6
Lineare Optimierung

6.1 Allgemeine Form

Ein lineares Optimierungsproblem besteht aus folgenden Elementen:

1. einer **Zielfunktion** $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \text{bzw.} \min$
2. den **Nebenbedingungen** $$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & \triangleright\triangleleft & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{m,n}x_n & \triangleright\triangleleft & b_m \end{array}$$
3. den **Nichtnegativitätsbedingungen** $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

   Gegeben sind die Koeffizienten c_i und $a_{i,j}$ mit $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Die Nichtnegativitätsbedingungen können unvollständig sein oder ganz fehlen.

Die Zeichen $\triangleright\triangleleft$ stehen für „$\leq$“, „$\geq$“ oder „$=$“ und können in jeder Zeile eine andere Bedeutung haben.

Definition 6.1 (Zulässiger Bereich)**.** *Ein Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ heißt zulässige Lösung, falls er 2. und 3. erfüllt. Die Menge aller zulässigen Lösungen heißt* **zulässiger Bereich**.

Definition 6.2 (Optimallösung)**.** *Eine zulässige Lösung, die die Zielfunktion optimiert, heißt* **Optimallösung**.

Die Kurzschreibweise des linearen Optimierungsproblems lautet mit einem Koeffizientenvektor $\boldsymbol{c}^T = (c_1, \ldots, c_n)^T$ und der Koeffizientenmatrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

1. $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \to \max \quad \text{bzw.} \quad \min$
2. $A\boldsymbol{x} \triangleright \triangleleft \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$
3. $\boldsymbol{x} \geq 0$.

6.2 Grafische Lösung für $n = 2$

1. Bestimmung des zulässigen Bereiches B
   (a) Der zulässige Bereich B wird begrenzt durch
      - die Koordinatenachsen
      - die Geraden $G_i : a_ix = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$.

(b) Zu entscheiden ist, ob die Punkte im zulässigen Bereich jeweils oberhalb oder unterhalb den Geraden G_i liegen. Aufgrund der Nichtnegativitätsbedingungen liegt B auf jeden Fall im 1. Quadrant. Eine eindeutige Lösung kann es nur dann geben, wenn der zulässige Bereich ein Vieleck ist.

2. Zeichne Höhenlinie(n) (Gerade $G^\alpha : c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$) und prüfe in welche Richtung $K = c_1x_1 + c_2x_2$ wächst (oder fällt).

3. Verschiebe G^α solange parallel, bis G^α nur einen gemeinsamen Punkt mit B besitzt. Dieser Punkt ist die Optimallösung. Berechne den Wert der Zielfunktion K an dieser Stelle.

Beispiel 6.1.

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1+ & 8x_2 & \to & \min \\ x_1+ & x_2 & \le & 500 \\ x_1+ & 3x_2 & \le & 900 \\ 3x_1+ & 2x_2 & \le & 1200 \\ & x_1, x_2 & \ge & 100 \end{array}$$

Bemerkung 6.1. *Lösungsverhalten:*

1. *Ist der zulässige Bereich nicht leer und beschränkt, so existiert mindestens eine Optimallösung. Dabei existieren entweder genau eine oder unendlich viele Lösungen.*

2. *Ist der zulässige Bereich unbeschränkt, so tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein.*

   (a) *Es gibt keine Lösung.*

   (b) *Es gibt genau eine Optimallösung.*

   (c) *Es gibt unendlich viele Optimallösungen.*

6.3 Transformation auf Normalform

Definition 6.3 (Normalform einer LOA)**.** *Eine lineare Optimierungsaufgabe liegt in* **Normalform** *vor, falls*

1. $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \to \max$

2. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{b} \ge 0$

3. $\boldsymbol{x} \ge 0.$

Die Positivität der b_i und die Forderung nach einer Maximierungsaufgabe lassen sich durch die Multiplikation der entsprechenden Nebenbedingung mit (-1), bzw. durch Multiplikation der Zielfunktion mit (-1) erreichen.

Das Gleichheitszeichen in den Nebenbedingungen erhält man, indem man sogenannte Schlupfvariablen einführt, die nichtnegativ sein müssen.

Beispiel 6.2. *Einführen von Schlupfvariablen*

a) $x_1 + 2x_2 \leq 140 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + u_1 = 140, \quad u_1 \geq 0$

b) $x_1 + 2x_2 \geq 140 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - u_1 = 140, \quad u_1 \geq 0$

Fehlende Positivitätsbedingungen lassen sich durch Variablenerweiterung $x_i = x_i^+ - x_i^-$ *, mit* $x_i^+, x^- \geq 0$*, erreichen.*

Satz 6.1. *Jedes lineare Optimierungsproblem lässt sich durch ein lineares Optimierungsproblem in Normalform ersetzen.*

Beispiel 6.3. *Wir greifen Beispiel 6.1 nochmals auf. Diese Aufgabe hat die folgende Normalform.*

$-2x_1 - 8x_2 \to \max, \qquad \tilde{x}_1 = x_1 - 100,\ \tilde{x}_2 = x_2 - 100$

$$\begin{array}{rrrrrrcr}
\Longrightarrow & -2\,\tilde{x}_1 - & 8\,\tilde{x}_2 & & & & \to & \max \\
& \tilde{x}_1 + & \tilde{x}_2 + & u_1 & & & = & 300 \\
& \tilde{x}_1 + & 3\,\tilde{x}_2 & & + \quad u_2 & & = & 500 \\
& 3\,\tilde{x}_1 + & 2\,\tilde{x}_2 & & & + \quad u_3 & = & 700 \\
& & & \multicolumn{3}{r}{\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ u_1,\ u_2,\ u_3} & \geq & 0
\end{array}$$

Zusammenfassung der Transformation einer LOA in die Normalform

Ausgangsaufgabe	Transformation	Ergebnis	Bem.
$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \to \min$	(-1)	$-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \to \max$	
$b_i < 0$	(-1)	$-\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = -b_i > 0$	
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \leq b_i$		$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j + u_i = b_i$, $u_i \geq 0$	Schlupfvar.
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \geq b_i$		$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j - u_i = b_i$, $u_i \geq 0$	Schlupfvar.
$x_i \leq 0$	(-1)	$-x_i \geq 0$	
$x_i \in \mathbb{R}$ beliebig		$x_i = x_i^+ - x_i^-$, $x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$	
$x_i \leq S_i$		$\tilde{x}_i := S_i - x_i \geq 0$	
$x_i \geq S_i$		$\tilde{x}_i := x_i - S_i \geq 0$	

6.4 Basislösungen

Wir gehen von einer linearen Optimierungsaufgabe in Normalform aus.

$$\left.\begin{array}{rcl} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & \to & \max \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b} \geq 0 \\ \boldsymbol{x} & \geq & 0 \end{array}\right\} (*)$$

O.B.d.A. ist $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit

- $m < n$ und
- rang $\boldsymbol{A} = m$.

Durch Gauß-Elimination überführt man $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ in $(\boldsymbol{I}_m, \boldsymbol{R})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ bzw. mit $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N)$ in $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$, d.h. $\boldsymbol{x}$ erfüllt $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow (\boldsymbol{I}_m, \boldsymbol{R})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Definition 6.4 (Basisvariablen)**.** *Die m-Komponenten von $\boldsymbol{x}_B$ heissen Basisvariablen, während die $n - m$ Komponenten von $\boldsymbol{x}_N$ Nichtbasisvariablen heissen.*

Definition 6.5 (Basislösungen)**.** *Jedes $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_B^T, \boldsymbol{x}_N^T)^T = (\boldsymbol{b}^T, \boldsymbol{0}^T)^T$, dies ist gleichbedeutend mit $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0})$ heißt* **Basislösung**.

Eine Basislösung heißt **zulässig**, *falls $\boldsymbol{b} \geq 0$ und folglich $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}^T, \boldsymbol{0}^T) \geq 0$.*

Zwei Basislösungen heissen **benachbart**, *falls genau $m - 1$ Basisvariablen identisch sind.*

6.5 Der Simplexalgorithmus

Ausgangspunkt ist eine zulässige Basislösung einer LOA in Normalform. Man bestimme eine benachbarte zulässige Basislösung mit zumindest nicht schlechterem Zielfunktionswert.

Teilschritte:

1. Bestimme eine Nichtbasisvariable, die zur Basisvariablen wird!
2. Bestimme eine Basisvariable, die zur Nichtbasisvariablen wird!
3. Führe die Gauß–Elimination durch!

6.5.1 Auswahl der neuen Basisvariablen

Es seien $x_1, \ldots, x_m$ die „alten“ Basisvariablen. Wir definieren Optimalitätsindikatoren

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{m} c_j a_{i,j} - c_i, \quad i = m + 1, \ldots n.$$

Satz 6.2. *Die Aufnahme von $x_k, k \in \{m+1, \ldots, n\}$ in die Menge der Basisvariablen führt zu einem nicht schlechteren Zielfunktionswert, falls $\Delta_k \leq 0$. Ist $\Delta_j \geq 0$, für alle $j = m + 1, \ldots, n$, dann ist die zulässige Basislösung eine Optimallösung.*

Bemerkung 6.2. *Bei der Anwendung des Lösungsverfahrens wählt man $k \in \{m + 1, \ldots, n\}$ so, dass $\Delta_k = \min_{m<j\leq n} \Delta_j$ gilt.*

6.5.2 Auswahl der Nichtbasisvariablen

Die neue Nichtbasisvariable muss so gewählt werden, dass die neue Basislösung auch eine zulässige Basislösung ist.

Seien $x_1, \ldots, x_n$ die alten Basisvariablen und x_k die neu hinzukommenden. Für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $a_{j,k} \geq 0$ bestimmt man die Quotienten $\Theta_j = \frac{b_j}{\tilde{a}_{j,k}} > 0$ und wählt den Index $l \in \{1, \ldots, m\}$ so, dass $\Theta_l = \min\limits_{1 \leq j \leq m} \Theta_j$ gilt.

Falls dies nicht möglich ist, das heißt, falls es ein $k \in \{m+1, \ldots, n\}$ mit $\Delta_k > 0$ und $a_{j,k} < 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ gibt, dann besitzt die lineare Optimierungsaufgabe keine Lösung. Die Zielfunktion ist über dem zulässigen Bereich nach oben hin unbeschränkt.

6.5.3 Das Simplexschema

Das angesprochene Vorgehen läßt sich übersichtlich im Simplexschema darstellen:

	BV	c_B	c_1	c_2	$\ldots$	c_m	c_{m+1}	$\ldots$	c_n	x_B	Θ
1	x_1	c_1	1	0		0	$a_{1,m+1}$		$a_{1,n}$	$\tilde{b}_1$	
2	x_2	c_2	0	1		0	$a_{2,m+1}$		$a_{2,n}$	$\tilde{b}_2$	
$\vdots$											
m	x_m	c_m	0	0		1	$a_{m,m+1}$		$a_{m,n}$	$\tilde{b}_m$	
			$\Delta_1 = 0$			$\Delta_m = 0$	Δ_{m+1}		Δ_n	$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}_B$	

Beispiel 6.4. *Es liegt folgende lineare Optimierungsaufgabe in Normalform vor:*

Zielfunktion: $-2x_1 - 8x_2 = z \to \max$

$$
\begin{array}{lllll}
\frac{3}{2}x_1 & +x_2 & & & -\frac{1}{2}u_3 = 350 \\
\frac{1}{2}x_1 & & +u_1 & & -\frac{1}{2}u_3 = 50 \\
\frac{7}{2}x_1 & & & +u_2 & -\frac{3}{2}u_3 = 550
\end{array}
$$

Das heißt: $c^T = (-2, -8, 0, 0, 0)$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & & & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & 1 & & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & & & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 350 \\ 50 \\ 550 \end{pmatrix}$.

Da zu x_2, u_1 und u_2 Einheitsspalten gehören, bietet es sich an, diese Variablen als Basisvariablen zu verwenden.

	BV	c_B	-2	-8	0	0	0	$x_B = \tilde{b}$	Θ
1	x_2	-8	$1,5$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	350	$\frac{700}{3}$
2	u_1	0	$0,5$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	50	100
3	u_2	0	$3,5$	0	0	1	$\frac{3}{2}$	550	$\frac{1100}{7}$
			-10	0	0	0	4	$z = -2800$	

Erläuterung:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 1,5 \cdot (-8) + 0 \cdot 0,5 - (-2) = -10 \\
\Delta_5 &= -\frac{1}{2} \cdot (-8) - 0 = 4 \\
\Theta_1 &= \frac{350}{1,5} = \frac{700}{3} \\
\Theta_2 &= \frac{50}{0,5} = 100 \\
\Theta_3 &= \frac{550}{3,5} = \frac{1100}{7}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ *x_1 wird neue Basisvariable und u_1 stattdessen Nichtbasisvariable.*

	BV	c_B	-2	-8	0	0	0	$x_B = \tilde{b}$	Θ
1	x_2	-8	0	1	-3	0	1	200	200
2	x_1	-2	1	0	2	0	-1	100	$-$
3	u_2	0	0	0	-7	1	2	200	100
			0	0	20	0	-6	-18000	
1	x_2	-8	0	1	$0,5$	$-0,5$	0	100	200
2	x_1	-2	1	0	$-1,5$	$0,5$	0	200	$-$
3	u_3	0	0	0	$-3,5$	$0,5$	1	100	$-$
			0	0	-1	3	0	-1200	
1	u_1	0	0	2	1	-1	0	200	$-$
2	x_1	-2	1	3	0	-1	0	500	$-$
3	u_3	0	0	7	0	-3	1	800	$-$
			0	2	0	2	0	-1000	

Die Optimallösung liegt bei $(500, 0, 200, 0, 800)^T$ und ergibt einen optimalen Zielfunktionswert von -1000.

6.5.4 Die Zweiphasenmethode

Der bisher vorgestellte Simplexalgorithmus setzt voraus, dass wir eine zulässige Basislösung als „Startvektor“ zur Verfügung haben. Bei „kleineren Problemen“ lässt sich eine solche durch systematisches Probieren bestimmen. Wir wollen nun eine Methode vorstellen, mit der man durch Lösung eines Hilfsproblems sich eine zulässige Basislösung systematisch beschaffen kann.

Sei die L.O.A.

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \to \max \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \geq 0, \qquad \boldsymbol{x} \geq 0$$

gegeben. Dazu betrachten wir, um eine zulässige Lösung zu erhalten das folgende Hilfsproblem: $(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_m)^T = \binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{v}}$

H1) $-(1, \ldots, 1)\boldsymbol{v} = -\sum\limits_{i=1}^{m} v_i \to \max$

H2) $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}_m)\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{b}$

H3) $\boldsymbol{x} \geq 0, \quad \boldsymbol{v} \geq 0$

Dieses Problem besitzt folgende Eigenschaften:

1. Wegen H3) ist die Zielfunktion $-v_1 - v_2 - \ldots - v_m \leq 0$, d.h. der optimale Wert ist ≤ 0. Falls dieser gleich Null ist, dann ist die Optimallösung von H, $\boldsymbol{v}^H = \boldsymbol{0}$, d. h. $v_1^H = \ldots = v_m^H = 0$ und wegen $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}_m)(\boldsymbol{x}^H, 0)^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^H = \boldsymbol{b}$ und wegen H3) $\boldsymbol{x}^H \geq 0$ ist $\boldsymbol{x}^H$ eine zulässige Basislösung der L.O.A.

2. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \geq 0 \quad \boldsymbol{x} := \boldsymbol{0}$ ist eine zulässige Basislösung von (H).

   Damit kann der Simplexalgorithmus für das Hilfsproblem gestartet werden.

3. Es gilt:

   Satz 6.3. *Das Hilfsproblem besitzt immer eine optimale Lösung.*

   Beweis: Der zulässige Bereich ist nicht leer (siehe (2)) und die Zielfunktion ist nach oben beschränkt.

   □

4. Falls für die Optimallösung $-(1, \ldots, 1)\boldsymbol{v}^H > 0$ gilt, d.h. es gibt ein $v_i^H < 0$, dann existiert keine zulässige Basislösung der L.O.A.

6.6 Aufgaben

6.1. In einem Betrieb werden aus Rohstoffen R_1 und R_2 Erzeugnisse E_1 und E_2 hergestellt, wobei je Erzeugnis E_1 3 Geldeinheiten und je Erzeugnis E_2 7 Geldeinheiten Gewinn erwirtschaftet werden.

Für die Herstellung eines Erzeugnisses E_1 werden 1 Einheit R_1, 2 Einheiten R_2, 5 Einheiten Energie und 20 Minuten Arbeitszeit benötigt, während für die Herstellung eines Erzeugnisses E_2 je 3 Einheiten R_1 und R_2, 8 Einheiten Energie und 1 Stunde Arbeitszeit benötigt werden.

Stellen Sie das Modell für die Gewinnmaximierung auf, wenn insgesamt 50 Einheiten R_1, 60 Einheiten R_2, 150 Einheiten Energie und 24 Stunden Arbeitszeit zur Verfügung stehen!

6.2. In einer Tischlerei sind unter anderem drei Sorten Tische in der Produktion. Die Lieferung einer gewissen Anzahl von Tischen wurde bereits fest vereinbart. Der Zeit- und Materialaufwand soll jeweils gewisse Fonds nicht überschreiten:

in gewissen Einheiten	Tisch 1	Tisch 2	Tisch 3	Fonds
Gewinn je Stück	3	1	2	
Zeitaufwand je Stück	2	1	1	40
Materialaufwand je Stück	4	2	3	100
fest vereinbart	3	2	2	

Stellen Sie das Modell zur Maximierung des Gewinns unter den vorgegebenen Bedingungen auf!

6.3. Ein Unternehmen produziert drei Erzeugnisse E_1, E_2 und E_3, für deren Herstellung Erzeugnisse E_1 bis E_3 selbst sowie Rohstoffe R_1 bis R_4 gemäß folgender Tabelle benötigt werden:

	Eigenverbrauch an			Verbrauch an				Gewinn
	E_1	E_2	E_3	R_1	R_2	R_3	R_4	
je E_1	1/2	0	1/4	2	4	0	2	2
je E_2	0	0	1/4	1	1	1	0	1
je E_3	1/2	1/2	0	0	3	0	4	3

Stellen Sie das Modell für die Gewinnmaximierung auf, wenn bereits 5 E_1, 8 E_2 und 6 E_3 vertraglich gebunden sind sowie an Rohstoffen 150 Einheiten R_1, 200 Einheiten R_2, 50 Einheiten R_3 und 200 Einheiten R_4 zur Verfügung stehen!

6.4. Lösen Sie die Optimierungsaufgaben

(I)
$$\begin{aligned} -x_1+x_2 &\to \max \\ 2x_1-x_2 &\geq 2 \\ -x_1+2x_2 &\leq 5 \\ x_1\geq 2,\ x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

(II)
$$\begin{aligned} -x_1+x_2 &\to \min \\ 2x_1-x_2 &\geq 2 \\ -x_1+2x_2 &\leq 5 \\ x_1\geq 2,\ x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

(III)
$$\begin{aligned} -4x_1+2x_2 &\to \max \\ 2x_1-x_2 &\geq 2 \\ -x_1+2x_2 &\leq 5 \\ x_1\geq 2,\ x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

(IV)
$$\begin{aligned} -x_1+x_2 &\to \max \\ 2x_1-x_2 &\geq 2 \\ 3x_1-x_2 &\leq 3 \\ x_1\geq 2,\ x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

jeweils a) grafisch,
b) durch Überführung in Normalform und Anwendung der Simplexmethode!

6.5. Überführen Sie das Modell von Aufgabe 6.2 in Normalform und lösen Sie die Aufgabe mit der Simplexmethode!

6.6. Ein Tischlermeister lässt in seiner Werkstatt Tische und Stühle herstellen. Die Produktion eines Tisches dauert 5 Stunden und kostet 180 DM (Materialkosten und Arbeitslohn). Die Produktion eines Stuhles dauert 75 Minuten und kostet 30 DM. Insgesamt soll der Aufwand höchstens 5400 DM betragen, dabei sollen nicht mehr als 200 Arbeitsstunden aufgewendet werden.

Wie viele Tische und Stühle sind herzustellen, um unter diesen Bedingungen einen maximalen Gewinn zu erzielen, wenn pro Tisch ein Verkaufserlös von 260 DM und pro Stuhl ein Verkaufserlös von 45 DM erzielt werden kann?

6.7. Lösen Sie die Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rcl} -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 & \to & \min \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 & = & 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_5 & = & 12 \\ x_1,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_5 & \geq & 0 \\ x_2 & \leq & 0\ ! \end{array}$$

6.8. Gegeben sei die Optimierungsaufgabe (G):

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 + 2x_3 & \to & \max \\ x_1 - x_3 & = & 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1,\quad x_2,\quad x_3 & \geq & 0\ . \end{array}$$

a) Ermitteln Sie durch Einführung einer künstlichen Variablen v_1 für die erste Zeile des Gleichungssystems ($x_1 - x_3 + v_1 = 1$) und Lösung der entsprechenden Hilfsaufgabe (H) eine zulässige Basislösung von (G)!

b) Lösen Sie ausgehend von dieser zulässigen Basislösung die Optimierungsaufgabe (G)!

6.9. In einem Landwirtschaftsbetrieb werden Kühe und Schafe gehalten. Der Betrieb verfügt über Ställe für 75 Kühe und 300 Schafe sowie über 27 ha Weideland. Von letzterem werden pro Kuh 2500 m^2 und pro Schaf 500 m^2 benötigt. Zur Versorgung des Viehs können jährlich bis zu 15000 Arbeitsstunden geleistet werden. Für eine Kuh sind jährlich 150, für ein Schaf jährlich 25 Arbeitsstunden erforderlich. Der jährlich erzielbare Gewinn beträgt 100 € pro Kuh und 18 € pro Schaf. Ermitteln Sie mit Hilfe des Simplexverfahrens, welcher Gewinn maximal erzielbar ist! Welche Bedeutung haben die in der optimalen Lösung erreichten Werte der Schlupfvariablen?

6.10. In einer Schmiede werden verzinkte Zaunteile gefertigt. Zur Herstellung eines größeren Einzelteiles werden 4 Stunden benötigt, die entsprechenden Material-plus Arbeitslohnkosten belaufen sich auf 144 €; ein kleineres Einzelteil wird in 1 Stunde hergestellt, die Material- und Arbeitslohnkosten dafür betragen 24 €. Für einen größeren Auftrag sollen maximal 80 Arbeitsstunden und 2160 € Gesamtkosten veranschlagt werden. Der Verkaufspreis eines größeren Einzelteiles beläuft sich auf 208 €, ein kleineres kann für 36 € verkauft werden. Berechnen Sie mittels Simplexalgorithmus, wieviele größere und kleinere Einzelteile herzustellen sind, damit der Gewinn maximal wird! Ermitteln Sie diesen maximalen Gewinn!

6.11. Überführen Sie die Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & \to & \max \\ x_1 + x_2 & \geq & 12 \\ 2x_1 + x_2 & \geq & 20 \\ x_1 \geq 3, & & x_2 \leq 0 \end{array}$$

in Normalform, bestimmen Sie mit Hilfe eines Hilfsproblems eine zulässige Basislösung und lösen Sie davon ausgehend die Ausgangsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus! Hätte das auf diesem Wege erhaltene Ergebnis auch einfacher ermittelt werden können?

Kapitel 7
Folgen und Reihen

7.1 Definitionen

Definition 7.1. *Eine (reelle) Zahlenfolge ist eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a_k \in \mathbb{R}$ zuordnet.*

Schreibweise: $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Die Zahl a_k heißt $k - tes$ Glied der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Beispiel 7.1. *Folgen sind beispielsweise $a_k = (-1)^k$, $a_k = k$ oder $a_k = \frac{1}{2^k}$. Es gibt aber auch Folgen bei denen die Zuordnungsvorschrift* **rekursiv** *definiert ist, wie z.B. $a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + \frac{5}{a_k})$.*

Definition 7.2. *Eine Folge heißt* **beschränkt***, falls $c > 0$ existiert, so daß $|a_k| < c$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.*

Definition 7.3. *Eine Folge heißt* **monoton wachsend** *(monoton fallend), falls $a_k \leq a_{k+1}$ ($a_k \geq a_{k+1}$) für alle $k \in \mathbb{N}$.*

7.2 Grenzwerte und Konvergenz von Folgen

Definition 7.4. *Eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt* **konvergent** *gegen den* **Grenzwert** *$a \in \mathbb{R}$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $|a - a_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq N_0$ gilt.*

Schreibweise: $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$.

Definition 7.5. *Eine nichtkonvergente Folge heißt* **divergent**.

Satz 7.1. *Ist die Folge* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$

i.) konvergent, so ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *beschränkt.*

ii.) monoton und beschränkt, dann ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergent.*

1. Die Umkehrung von *i.*) gilt nicht, denn z. B. $(-1)^k$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.
2. Auch bei *ii.*) gilt die Umkehrung nicht, z. B. $(-\frac{1}{2})^k$ ist konvergent, aber nicht monoton.

Satz 7.2 (Limesregeln)**.** *Seien* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten* $a = \lim\limits_{k\to\infty}(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $b = \lim\limits_{k\to\infty}(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, *dann gilt*

i.) die Folge $(a_k \pm b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent gegen den Grenzwert* $a \pm b$*;*

$$\lim_{k\to\infty}(a_k \pm b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k \pm \lim_{k\to\infty} b_k = a \pm b.$$

ii.) die Folge $(a_k \cdot b_k)$ *ist konvergent gegen den Grenzwert* $a \cdot b$*;*

$$\lim_{k\to\infty}(a_k \cdot b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k \cdot \lim_{k\to\infty} b_k = a \cdot b.$$

iii.) im Falle von $b_k \neq 0$ *für alle* $k > k_0$ *und* $\lim\limits_{k\to\infty} b_k \neq 0$, *daß die Folge* $(a_k/b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *gegen den Grenzwert* $\frac{a}{b}$ *konvergiert*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} a_k}{\lim\limits_{k\to\infty} b_k} = \frac{a}{b}.$$

Bemerkung: Ausdrücke der Form $\frac{a}{0}$, $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$ sind nicht definiert bzw. unbestimmt.

7.3 Reihen

Definition 7.6. *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge, so heißt* $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *die* $n-$*te* **Partialsumme** . *Eine* **Reihe** *heißt* **konvergent**, *falls die Partialsummenfolge gegen einen Grenzwert* s *konvergiert;*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad .$$

In diesem Fall heißt s *der Wert der Reihe.*

Satz 7.3. *Ist die Reihe*

i.) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent, so ist* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0.$

ii.) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergent, so ist auch* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent.*

Satz 7.4 (Majorantenkriterium). *Seien* $0 \le a_k \le b_k$ *, für alle* $k \ge N_0$. *Dann gilt:*

i.) Konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, *so konvergiert auch* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$;

ii.) Divergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, *so divergiert auch* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Satz 7.5 (Leibnizkriterium). *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine monotone und konvergente Folge mit* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, *so konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Satz 7.6 (Quotienten- und Wurzelkriterium). *Für Reihen gilt:*

i) (Quotientenkriterium)

Gilt $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \le q < 1$ *für alle* $k \ge N_0$, *so ist die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent.*

ii) (Wurzelkriterium)

Gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \le q < 1$ *für alle* $k \ge N_0$, *so ist die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent.*

7.4 Aufgaben

7.1. Seien γ und a_0 positive Zahlen mit $a_0 \neq \sqrt{\gamma}$. Durch $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\gamma}{a_n}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sei rekursiv eine Folge definiert.
a) Zeigen Sie, dass für $n \ge 1$ $a_n > \sqrt{\gamma}$ gilt!
b) Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\}$ für $n \ge 1$ streng monoton fällt!
c) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge und ermitteln Sie ihren Grenzwert!

7.2. a) Berechnen Sie die Partialsumme der geometrischen Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ und allgemein von $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$, $q \in \mathbb{R}$!

b) Für welche $q \in \mathbb{R}$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$, geben Sie im Fall der Konvergenz die Summe an!

7.3. Ermitteln Sie in folgenden Fällen, ob die Folgen $\{a_n\}$ und die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren:

a) $a_n = \dfrac{99^n}{100^n}$, b) $a_n = \dfrac{101^n}{100^n}$, c) $a_n = 2^{-3n} + 3^{-2n}$, d) $a_n = \sin^2 n$, e) $a_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$,

f) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, g) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$, h) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$!

Bestimmen Sie im Konvergenzfall die Grenzwerte bzw. Summen!

7.4. Welche der folgenden Reihen sind konvergent:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{9^n}{10^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 - \dfrac{1}{n}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2} \sin^2 n$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln n)$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$, h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^{-n} + 3^{-2n})$, i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} 3^{-2n}$?

Bestimmen Sie im Konvergenzfall die Summen!

7.5. Ein Vermögen V_0 unterliegt einer jährlichen Verzinsung von 4 %, Abschreibung von 5 % und Besteuerung von 1 % jeweils auf das bzw. aus dem aktuellen Vermögen.

a) Geben Sie die Folge V_n der Vermögenswerte nach n Jahren an!
b) Beweisen Sie mit Hilfe der Definition, dass (V_n) gegen 0 konvergiert!
c) Ermitteln Sie, nach wieviel Jahren ein Vermögen von $V_0 = 200\,000$ € unter (i) 100 000 €, (ii) 10 000 €, (iii) 1000 €, (iv) 100 € gefallen ist!

7.6. Berechnen Sie mit der Formel für die Partialsumme der geometrischen Reihe

a) $\sum\limits_{n=0}^{8} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, b) $\sum\limits_{n=1}^{8} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, c) $\sum\limits_{n=9}^{16} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, d) $\sum\limits_{n=0}^{8} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$, e) $\sum\limits_{n=9}^{16} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$!

7.7. Untersuchen Sie folgende Reihen mit Quotienten- bzw. Wurzelkriterium auf Konvergenz:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(k!)^2}{(2k)!}$, b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3^k k!}{k^k}$, c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^k k!}{k^k}$, d) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln k)^k}$!

Hinweis: $\mathrm{e} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k$

7.8. Die Folge $a_k = \dfrac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$ konvergiert für $k \to \infty$ gegen 0, weil für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq N_0(\varepsilon)$ gilt. Bestimmen Sie ein solches $N_0(\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.001$ und allgemein für beliebiges $\varepsilon > 0$!

7.9. Berechnen Sie die Grenzwerte
a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\dfrac{1}{n^2-2n+3}-\dfrac{1}{2n^2+2n+3}\right)$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+5}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{2}$
!

7.10. Berechnen Sie a) $\sum\limits_{m=2}^{\infty} 2^{-2m}3^m$ und b) $\sum\limits_{m=2}^{50} 2^{2m}3^{-m}$!
Platzhalter für weitere Aufgaben

Kapitel 8
Finanzmathematik

8.1 Zinsrechnung

In der Wirtschaft spielen Zinsen als Äquivalent für das Überlassen von Kapital eine wesentliche Rolle. Damit verbunden ist die Frage nach der Bewertung von Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Offensichtlich ist die sofortige Zahlung eines Geldbetrages mehr wert als die Zahlung des gleichen Geldbetrages in einem Jahr. Deshalb müssen Wege gefunden werden, solche Zahlungen vergleichbar zu machen. Wir benötigen einige **Begriffe**:

- **Zinsen**: Z, s. oben
- **Zinsperiode**: Zeitraum, für den die Zinsen gezahlt werden, meist (nicht immer) das Jahr oder Kalenderjahr
- **Zinssatz**: p (z.B. 5): Prozentzahl vom Kapital, der für die Periode an Zinsen gezahlt wird - in der Regel nachschüssig (am Ende der Periode)
- **Zinsrate**: $i = p/100$, z.B. $0.05 = 5\,\%$
- **Rendite = Effektivzins**: Durch unterschiedliche Zinsperioden, Zahlungstermine, Gebühren, Kapitalbewertungen usw. sind die tatsächlichen Äquivalente für das Überlassen von Kapital oft schwer vergleichbar. Deshalb ist es günstig, einen (fiktiven) Effektivzinssatz zu ermitteln, der entsteht, wenn man alle Zahlungen (egal, wie sie heißen) genau in ihrem jeweiligen Zeitpunkt berücksichtigt. I.A. wird Effektivzinssatz auf das Jahr bezogen.
- **Barwert**: Wert des Kapitals zu einem festen Zeitpunkt (z.B. am heutigen Tag)
- **Anfangskapital**: K_0: Wert des Kapitals zum Zeitpunkt der Hingabe
- **Endkapital**: K_t: Wert des Kapitals zum Zeitpunkt der Rückgabe

Einfache Verzinsung

Zeitraum nicht größer als Zinsperiode

t: Anteil des Zeitraums an der Zinsperiode ($t \leq 1$)

Zinsen: $\boxed{Z = K_0 \cdot i \cdot t}$ Endkapital: $\boxed{K_t = K_0(1 + it)}$

Beispiel 8.1.

Zinsperiode Jahr, Anlage von 2000 DM für 36 Tage zu 3 % p.a.,
Jahr zu 360 Zinstagen gerechnet,

$$Z = 2000\ DM \cdot 0.03 \cdot \frac{36}{360} = 6\ DM, \quad K_t = 2000\ DM(1 + 0.03\frac{36}{360}) = 2006\ DM$$

Aus dem Endkapital kann durch $K_0 = \dfrac{K_t}{1 + it}$ das Anfangskapital ermittelt werden.

Benutzt man einen Kalkulationszinssatz (einen Zinssatz, den man bei Anlage des Geldes erhalten würde oder bei Aufnahme eines Darlehens zahlen müsste), so kann man auf diese Weise den Barwert einer späteren Zahlung ermitteln:

Beispiel 8.2.

- *Rechnung über 22000 DM, Zahlungsfrist 30 Tage, unterstellter Zinssatz 2.5 % p.a.*

  Zahlung am Fristende entspricht einem Barwert am Rechnungsdatum von
  $$K_0 = \frac{22000\ DM}{1 + 0.025\frac{1}{12}} = 21954.26\ DM$$

- *Rechnung über 22000 DM, Skonto von 2 % bei Zahlung innerhalb von 10 Tagen, unterstellter Zinssatz 2.5 % p.a.*

  Zahlung nach 10 Tagen entspricht einem Barwert am Rechnungsdatum von
  $$K_0 = \frac{22000\ DM * 0.98}{1 + 0.025\frac{10}{360}} = 21545.04\ DM$$

- *Will man keinen (fiktiven) Zinssatz für die Barwertermittlung vorgeben, so kann man zum Vergleich der Zahlungen ermitteln, welcher Verzinsung der Abschlag bei der früheren Bezahlung entspricht:*

  K_0: 10 Tage nach Rechnung, K_t: 30 Tage nach Rechnung zu bezahlender Betrag

  $$K_0 = 22000\ DM * 0.98 = 21560\ DM, \quad K_t = 22000\ DM, \quad t = \frac{20}{360}$$

  Gleichsetzen der Barwerte zum Rechnungsfälligkeitsdatum (30 Tage nach Rechnung):

$$K_t = K_0(1+it), \quad 1+it = \frac{K_t}{K_0}, \quad 1+i\frac{20}{360} = \frac{1}{0.98}$$

$$i = \frac{360}{20}\left(\frac{1}{0.98} - 1\right) = 36.73\,\%\ p.a.$$

Man müsste also 21560 DM zu 36.73 % p.a. anlegen, um nach 20 Tagen 22000 DM zu erhalten.

Die beiden im Beispiel beschriebenen Methoden können auch für kompliziertere Situationen genutzt werden, s. unten.

Ratenzahlungen

Häufig sind innerhalb einer Zinsperiode mehrere Raten zu zahlen. Dann stellt sich die Frage, welchen Wert diese Zahlungen am Ende der Zinsperiode haben. Wir betrachten den Fall von 12 in einem Jahr jeweils am Monatsende zu zahlenden Raten r bei einer Verzinsung von i p.a. Dann wird die erste Rate 11 Monate lang, die zweite Rate 10 Monate lang usw., die vorletzte Rat 1 Monat lang und die letzte Rate überhaupt nicht vor Jahresende verzinst. Insgesamt haben die Zahlungen einen Wert von

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Valuta}\\ 30.01.}}{r\left(1+i\,\frac{11}{12}\right)} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Valuta}\\ 30.02}}{r\left(1+i\,\frac{10}{12}\right)} + \cdots + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Valuta}\\ 30.11.}}{r\left(1+i\,\frac{1}{12}\right)} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Valuta}\\ 30.12.}}{r} = r\left(12+i\,\frac{11+10+\cdots+1}{12}\right) = \underbrace{r(12+5.5i)}_{\text{Wert } 30.12}$$

Beispiel 8.3. *Monatsrate 300 DM, Verzinsung 2 % p.a.,*
Wert am Jahresende $300\ DM(12+5.5*0.02) = 3633\ DM$

8.2 Zinseszinsen und Rendite

Wird Kapital über mehrere Zinsperioden (i.a. Jahre oder Kalenderjahre) angelegt und werden die Zinsen am Ende der jeweiligen Zinsperiode dem Kapital zugeschlagen und mit diesem verzinst, so entstehen Zinseszinsen. Sei jetzt

- **Endkapital**: K_n: Kapital nach n Zinsperioden
- **Aufzinsungsfaktor**: $q = 1+i$, i Zinsrate

Dann gilt $K_1 = K_0(1+i) = K_0 q$ (einfache Verzinsung, $t=1$)

$$K_2 = K_1(1+i) = K_1 q = K_0 q^2 \quad \text{usw.}$$

$$\boxed{K_n = K_0(1+i)^n = K_0 q^n}$$

Beispiel 8.4. *Kapital 3000 DM, Verzinsung 4 % p.a. für 5 Jahre:*
$K_5 = 3000\ DM \cdot 1.05^5 = 3649.96\ DM$

Mit der Formel $K_n = K_0(1+i)^n$ kann aus drei der Werte $K_n,\ K_0,\ n,\ i$ der vierte Wert berechnet werden.

Beispiel 8.5.

Für den Verkauf eines Grundstücks liegen 2 Angebote vor:
A: sofortige Zahlung von 200000 DM,
B: Zahlung von 100000 DM in 3 Jahren und 200000 DM in 10 Jahren

Bei einem (fiktiven) Kalkulationszinssatz von 6 % p.a. hat das Angebot B den Barwert

$$\frac{100000\ DM}{1.06^3} + \frac{200000\ DM}{1.06^{10}} = 83961.63\ DM + 111678.96\ DM = 195640.88\ DM,$$

so dass Angebot A besser ist.

Beispiel 8.6 (Finanzierungsschätze)**.** *Rendite zweijähriger am 20.12.2002 fälliger Finanzierungsschätze des Bundes, die am 20.12.2000 mit einem Diskontabschlag von 8.42 % (4.21 % p.a.) verkauft wurden*

Für zum Fälligkeitstermin zum Nennwert von 511.29 €= 1000 DM fällige Finanzierungsschätze waren 2 Jahre zuvor 915.80 DM zu zahlen.

Ist i die Rendite (Effektivverzinsung), $q = 1+i$, so gilt

$$K_2 = K_0 q^2,\ q = \sqrt{\frac{K_2}{K_0}} = \sqrt{\frac{1000.00\ DM}{915.80\ DM}} = 1.04496 \quad \Longrightarrow \quad i = 0.04496.$$

Da Renditen meist auf zwei Stellen nach dem Komma angegeben werden, wird die Rendite mit 4.50 % notiert.

Gemischte Verzinsung

In der Praxis fallen Ein- und Auszahlungen häufig nicht mit Anfang und Ende von Zinsperioden zusammen. In solchen Fällen muss man einfache Verzinsung und Zinseszinsen kombinieren.

Beispiel 8.7. *Kapital von 2000 DM angelegt vom 27.2.2000 bis 15.5.2003*

- *Verzinsung kalenderjährlich mit 4 %:*
  Endkapital $2000\ DM \left(1 + 0.04 * \frac{303}{360}\right) 1.04^2 \left(1 + 0.04 * \frac{135}{360}\right) = 2269.57\ DM$
- *Verzinsung jährlich mit 4 %, erstmals am 27.2.2001:*
  Endkapital $2000\ DM \cdot 1.04^3 \left(1 + 0.04 * \frac{78}{360}\right) = 2269.23\ DM$

Unterjährige Verzinsung

Vielfach (z.B. Tagesgeldkonten, Darlehen) werden Zinsen nicht für das Jahr, sondern z.B. für Monate oder Quartale gezahlt, dennoch aber für das Jahr ausgewiesen. Die Zinsperiode ist also kürzer als das Jahr, so dass der auf das Jahr bezogenen Effektivzinssatz vom auf das Jahr bezogenen Nominalzinssatz abweicht.

Beispiel 8.8. *Tagesgeldkonto mit Gutschrift von 3.5 % Zinsen p.a. jeweils für das Quartal am Quartalsende*

$$\begin{array}{ll} \textit{Anfangskapital Jahresbeginn} & K_0 \\ \textit{Kapital nach 1. Quartal} & K_0\left(1+\frac{0.035}{4}\right) \\ \textit{Kapital nach 2. Quartal} & K_0\left(1+\frac{0.035}{4}\right)^2 \\ \textit{Kapital nach 3. Quartal} & K_0\left(1+\frac{0.035}{4}\right)^3 \\ \textit{Kapital Jahresende} & K_0\left(1+\frac{0.035}{4}\right)^4 = K_0 \cdot 1.03546, \end{array}$$

d.h. Effektivzinssatz wie üblich gerundet auf 2 Stellen nach dem Komma 3.55 %.

Allgemein gilt bei m Zinsperioden im Jahr: $\boxed{K_{1,m} = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^m}$

Beispiel 8.9. *Darlehen zu 6.5 % p.a., Zinsen monatlich nachträglich fällig, sonst keine Gebühren usw.*

$$\left(1+\frac{0.065}{12}\right)^{12} = 1.06697, \textit{ d.h. effektiver Jahreszins 6.70 \%.}$$

Renditerechnung

In der Praxis sind mit einer Kapitalanlage, Investitionen usw. oft Einnahmen und Ausgaben zu vielen Terminen verbunden. Um verschiedene derartige Anlagen vergleichen zu können, bieten sich, wie oben im Beispiel Skonto erläutert, zwei Methoden an:

- Barwert aller Zahlungen zu einheitlichem Termin mit angenommenem Kalkulationszinssatz ausrechnen, Summe der Barwerte aller Einnahmen und Ausgaben voneinander abziehen
  $\longrightarrow$ Kapitalwert der Maßnahme

- Barwert aller Zahlungen zu festem Termin mit unbekannter Zinsrate i ansetzen, Summen der Barwerte aller Einnahmen und aller Ausgaben gleichsetzen (d.h. Barwert 0 annehmen) und aus dieser Gleichung i ermitteln
  $\longrightarrow$ Rendite der Maßnahme

Letzteres geschieht z.B. bei der Renditebestimmung festverzinslicher Wertpapiere:

Beispiel 8.10 (Rendite festverzinslicher Wertpapiere)**.**

Kauf eines festverzinslichen Wertpapieres zum Kurs von 104.00,
Restlaufzeit genau 2 Jahre, Zinsen 7.00 % p.a. vom Nennwert

Wir stellen die Barwerte aller Zahlungen bezogen auf den Zeitpunkt der Endfälligkeit (d.h. nach 2 Jahren) gegenüber, die sich bei Kauf eines Papiers zum Nennwert von 100 DM ergeben.

	Einnahmen	*Ausgaben*
Zahlung bei Anlage		$104(1+i)^2$
Zahlung nach 1 Jahr (Zinsen)	$7(1+i)$	
Zahlung nach 2 Jahren (Zinsen und Tilgung)	107	

$1+i=q$
$7q+107=104q^2$
$104q^2-7q-107=0$
$q^2-\frac{7}{104}q-\frac{107}{104}=0$
$q_{1,2}=\frac{7}{208}\pm\sqrt{\frac{49+44512}{43264}}=\begin{cases} 1.0485325 & \\ -0.9812248 & \textit{nicht sinnvoll}\end{cases}$

$q=1.0485 \implies i=0.0485$, *die Rendite beträgt also* $i=4.85$ %.

Eine Sparanlage von 104 DM zu 4.85 % Zinsen bringt nach 2 Jahren

$$104\ DM \cdot 1.0485^2 = 114.33\ DM.$$

Der Kauf der Anleihe zum Verkaufspreis von 104 *DM bringt nach 1 Jahr* 7 *DM, von denen in der Renditerechnung angenommen wird, dass sie zu 4.85 % wieder angelegt werden. Nach 2 Jahren hat man dann insgesamt*

$$107\ DM + 7\ DM \cdot 1.0485 = 114.34\ DM.$$

Die Pfennigabweichung ist ein Rundungseffekt.

8.3 Renten- und Tilgungsrechnung

Die Rentenrechnung beschäftigt sich damit,

- regelmäßig wiederkehrende Zahlungen zu einem Wert zusammenzufassen bzw.
- einen gegebenen Wert unter Beachtung zwischenzeitlicher Zinsen auf mehrere (Renten-) Zahlungen aufzuteilen (Verrentung des Kapitals).

Rente: in gleichen Zeitabständen erfolgende Zahlung in gleicher Höhe

Wir wollen den End- und den Barwert einer **vorschüssigen Rente** berechnen, bei der n Perioden lang jeweils zu Periodenbeginn eine Rate r gezahlt wird. Wie bisher sei i die effektive Verzinsung und $q = 1 + i$ der zugehörige Aufzinsungsfaktor.

Zahlungszeitpunkt	Rate	Endwert dieser Rate
Beginn der Periode 1	r	rq^n
Beginn der Periode 2	r	rq^{n-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Beginn der Periode n	r	rq

Endwert $E_n = r(q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2 + q)$

Satz 8.1 (Partialsumme der geometrischen Reihe)**.** *Für $q \neq 1$ hat die* **geometrische Reihe** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ *die Partialsummen* $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^k = q\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Beweis:

Es gilt

$s_n = (q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2 + q^1), \quad qs_n = (q^{n+1} + q^n + \cdots + q^3 + q^2),$

$qs_n - s_n = (q^{n+1} + q^n + \cdots + q^2 + q - q^n - \cdots - q^2 - q), \quad (q-1)s_n = (q^{n+1} - q) = q(q^n - 1)$

Daraus folgt die Behauptung.

□

Also gilt für den Endwert der vorschüssigen Rente $\boxed{E_n^{\text{vor}} = rq\dfrac{q^n - 1}{q - 1}}$.

Entsprechend gilt für den Barwert der vorschüssigen Rente

$\boxed{B_n^{\text{vor}} = \dfrac{E_n^{\text{vor}}}{q^n} = \dfrac{r}{q^{n-1}}\dfrac{q^n - 1}{q - 1}}$.

Sind der Bar- oder Endwert und der Aufzinsungsfaktor gegeben, so kann aus den Formeln umgekehrt die Rate errechnet werden.

Beispiel 8.11 (Sparplan).

Ein 50–Jähriger schließt einen Sparplan ab, bei dem er 15 Jahre lang vorschüssig jeweils 3000 DM einzahlt und dafür anschließend 10 Jahre lang vorschüssig einen bestimmten Betrag ausgezahlt bekommt. Wie hoch ist der Betrag, wenn die Verzinsung mit 6 % angenommen wird?

Endwert aller Einzahlungen der Sparphase = Barwert aller Auszahlungen der Auszahlphase

$$E_{15} = 3000\ DM \cdot 1.06 \frac{1.06^{15} - 1}{1.06 - 1} = 74017.58\ DM$$

$$\overline{B}_{10} = 74017.58\ DM = \frac{\overline{r}}{1.06^9} \frac{1.06^{10} - 1}{1.06 - 1}$$

Daraus ergibt sich als Auszahlungsrate $\overline{r} = 9487.38$ *DM.*

Bei **nachschüssigen Renten** erfolgen alle Zahlungen „eine Periodenlänge später“, deshalb müssen in diesem Falle die obigen Formeln durch q dividiert werden:

$$\boxed{E_n^{\text{nach}} = r \frac{q^n - 1}{q - 1}}, \qquad \boxed{B_n^{\text{nach}} = \frac{r}{q^n} \frac{q^n - 1}{q - 1}}.$$

Eine häufige Anwendung sind Annuitätendarlehen, bei denen eine einheitliche Zins- und Tilgungsrate gleichbleibender Höhe („Annuität“) zu zahlen ist. Mit fortschreitender Tilgung fällt der Zinsanteil, so dass der Tilgungsanteil der Annuität steigt.

Beispiel 8.12 (Annuitätendarlehen).

Darlehen von 100 000 DM zu 5.5 % mit einer Tilgung von 3 % p.a. zuzüglich der durch die Tilgung ersparten Zinsen. Zinsen und Tilgung sind jährlich nachträglich zu entrichten. Wie hoch ist der Schuldsaldo nach 5 Jahren?

Annuität (jährliche Rate): 8.5 % · 100 000 DM = 8500 DM.

Endwert der Zahlungen des Schuldners nach 5 Jahren:
$$E_5^{nach} = 8500\ DM \frac{1.055^5 - 1}{1.055 - 1} = 47439.27\ DM.$$

Wert des ausgereichten Darlehensbetrages nach 5 Jahren:
$100000\ DM \cdot 1.055^5 = 130696.00\ DM.$

Schuldsaldo nach 5 Jahren: $130696.00\ DM - 47439.27\ DM = 83256.73\ DM.$

Der Schuldsaldo kann auch durch einen „Zins- und Tilgungsplan“ ausgerechnet werden.

Jahr	*Restschuld zu Periodenbeginn*	*Zins*	*Tilgung*	*Annuität*	*Restschuld zu Periodenende*
1	*100000.00*	*5500.00*	*3000.00*	*8500.00*	*97000.00*
2	*97000.00*	*5335.00*	*3165.00*	*8500.00*	*93835.00*
3	*93835.00*	*5160.92*	*3339.08*	*8500.00*	*90495.92*
4	*90495.92*	*4977.28*	*3522.72*	*8500.00*	*86973.20*
5	*86973.20*	*4783.53*	*3716.47*	*8500.00*	*83256.73*

Es könnte auch die Frage gestellt werden, wann zu diesen Bedingungen das Darlehen vollständig getilgt ist. Dann ist n (bisher 5) unbekannt und der Wert aller Zahlungen des Schuldners muss gleich dem aktuellen Wert des ausgereichten Darlehens sein, d.h.

$$8500\ DM \frac{1.055^n - 1}{1.055 - 1} = 100000\ DM \cdot 1.055^n.$$

$$\frac{8500}{100000}\frac{1}{0.055}(1.055^n - 1) = 1.055^n$$

$$\left(\frac{8500}{100000}\frac{1}{0.055} - 1\right) 1.055^n = \frac{8500}{100000}\frac{1}{0.055}$$

$$1.055^n = \frac{1.5454546}{0.5454546} = 2.8333, \quad n = \frac{\lg 2.8333}{\lg 1.055} = 19.45$$

Nach 20 Jahren ist das Darlehen vollständig getilgt, dabei ist die letzte Rate kleiner als 8500 DM.

8.4 Aufgaben

8.1. Eine Bank verzinst Einlagen mit 5 % p.a.

a) Auf welchen Wert wächst ein Anfangskapital von 7000 DM innerhalb eines Dreivierteljahres an?

b) Welcher Betrag muss angelegt werden, damit ein Jahr später eine Summe von 10000 DM zur Verfügung steht?

c) In welcher Zeit bringt ein Kapital von 10000 DM Zinsen in Höhe von 361 DM?

d) Auf welchen Wert wächst ein Kapital von 7000 DM in drei Jahren an?

e) Am 16. Februar 2001 wurden 7000 DM angelegt, die Zinsen werden kalenderjährlich gutgeschrieben. Welches Guthaben steht am 16. Februar 2004 zur Verfügung, wenn das Konto an diesem Tag aufgelöst wird?

8.2. a) Mit welchem Zinssatz muss Kapital angelegt werden, damit es sich in 15 Jahren verdreifacht?

b) Wie hoch war die durchschnittliche jährliche Inflationsrate, wenn für einen Warenkorb, für den vor 13 Jahren 100 Währungseinheiten zu zahlen waren, jetzt 155 Währungseinheiten zu zahlen sind?

8.3. Eine Handwerkerrechnung ist 30 Tage nach Rechnungsdatum zur Zahlung fällig. Bei Zahlung innerhalb von 10 Tagen nach Rechnungsdatum wird ein Skonto von 2 % gewährt. Bei welchem Kalkulationszinssatz sind die Barwerte zum Rechnungsdatum gleich?

8.4. Eine Handwerkerrechnung über 5542 DM ist 30 Tage nach Rechnungsdatum zur Zahlung fällig. Bei Zahlung innerhalb von 10 Tagen nach Rechnungsdatum wird ein Skonto von 2 % gewährt.

a) Ermitteln Sie die Barwerte zum Rechnungsdatum, die sich bei einem Kalkulationszinssatz von 3 % für die Zahlung nach 30 Tagen sowie für die Zahlung nach 10 Tagen mit Skontoabzug ergeben!

b) Bei welchem Kalkulationszinssatz sind die Barwerte gleich?

c) Welcher Verzinsung p.a. für die 20 Tage frühere Bezahlung entspricht der Skontoabzug?

d) In welcher Höhe könnte 10 Tage nach Rechnungsdatum ein mit 11.5 % p.a. zu verzinsender Überziehungskredit in Anspruch genommen werden, um einschließlich Überziehungszinsen die gleichen Schulden zu verursachen wie bei Inanspruchnahme in Höhe von von 5542 DM 30 Tage nach Rechnungsdatum? Vergleichen Sie mit dem bei Inanspruchnahme des Skontos 10 Tage nach Rechnungsdatum zu zahlendem Betrag!

8.5. Wie hoch ist die Rendite (d.h. der effektive Jahreszins) eines festverzinslichen Wertpapiers mit einer Verzinsung von 7 % und einer Restlaufzeit von genau 2 Jahren, wenn es zum Kurs von 105,45 verkauft wird?

8.6. Ein zu 5 % p.a. verzinstes Guthaben von 100 000 DM soll sofort beginnend in 5 gleichen Jahresraten vollständig verbraucht werden. Wie hoch sind die Jahresraten?

8.7. Ein 40–Jähriger schließt einen Sparplan ab, bei dem er 20 Jahre lang jeweils zu Beginn des Sparjahres 2000 DM einzahlt und dafür anschließend 15 Jahre lang ebenfalls jährlich vorschüssig einen bestimmten Betrag ausgezahlt bekommt. Wie hoch ist dieser Betrag, wenn die Verzinsung mit 6 % p.a. angenommen wird?

8.8. Ein 50–Jähriger schließt einen Sparplan ab, bei dem er 15 Jahre lang jeweils zu Beginn des Sparjahres 3000 DM einzahlt und dafür anschließend 10 Jahre lang ebenfalls jährlich vorschüssig einen bestimmten Betrag ausgezahlt bekommt. Wie hoch ist dieser Betrag, wenn die Verzinsung mit 6 % p.a. angenommen wird?

8.9. Für ein Grundstück sind inklusive 3.48 % Maklercourtage 200 000 DM zu zahlen. Der Betrag von 200 000 DM soll durch ein jährlich mit 6 % zu verzinsendes und mit 1 % zuzüglich der durch die bisherige Tilgung ersparten Zinsen zu tilgendes Darlehen finanziert werden.

a) Wie hoch ist der Grundstückspreis, wie hoch ist die Courtage?
b) Wie hoch ist die Restschuld des Darlehens nach 4 Jahren, wenn Zins und Tilgung jährlich nachträglich in einer Jahresrate zu erbringen sind?
c) Wie hoch ist die Restschuld des Darlehens nach 4 Jahren, wenn Zins und Tilgung quartalsweise nachträglich in einer Quartalsrate zu erbringen sind?
d) Welche dieser beiden Darlehensbedingungen sind für den Darlehensnehmer effektiver?

8.10. Wie hoch ist die Rendite eines Tagesgeldkontos mit einer Verzinsung von 2,8 % p.a., wenn die Zinsgutschrift
a) monatlich bzw.
b) vierteljährlich
erfolgt?

8.11. a) Wie hoch ist die effektive Aufzinsung, wenn bei einer Verzinsung von i p.a. das Jahr in m gleiche Abschnitte aufgeteilt wird und die anteiligen Zinsen am Ende jedes Abschnitts dem Kapital gutgeschrieben und mit diesem verzinst werden?
b) Welcher Grenzwert ergibt sich für $m \longrightarrow \infty$ (kontinuierliche Verzinsung)?

8.12. Bei der Bestellung einer Ware zum Preis von 2000 € wird eine sofort zu leistende Anzahlung von 5 % sowie Lieferung und Rechnungslegung in 2 Monaten vereinbart. Der offene Rechnungsbetrag soll 30 Tage nach Rechnungslegung zur Zahlung fällig sein, wobei bei Zahlung innerhalb von 10 Tagen ein Skonto von 2 % des offenen Betrages gewährt wird.
a) Ermitteln Sie die Barwerte zum Bestelldatum, die sich bei einem Kalkulationszinssatz von 3 % für die Zahlung ohne und mit Skontoabzug ergeben, wenn jeweils am letzten Tag der Frist gezahlt wird!
b) Bei welchem Kalkulationszinssatz sind die Barwerte gleich?

8.13. Für ein Grundstück liegen zwei Angebote vor:
A: sofortige Zahlung von 100000 €,
B: Zahlung von 50000 € in 4 Jahren und 100000 € in 8 Jahren.

a) Vergleichen Sie die beiden Angebote durch Ermittlung des Barwertes des Angebotes B bei Kalkulationszinssätzen von 5 % und 7 % p.a.!
b) Bei welchem Kalkulationszinssatz sind die Angebote gleich?

8.14. Eine DM–Auslandsanleihe mit einer Verzinsung von 8 % und einer Restlaufzeit von genau 2 Jahren wird zum Kurs von 93,00 verkauft. Wie hoch ist die Rendite?

8.15. Ein Darlehen von 150 000 € soll p.a. mit 5 % verzinst und mit 3 % zuzüglich der durch die bisherige Tilgung ersparten Zinsen getilgt werden.
a) Zins und Tilgung sind monatlich nachtäglich in einer Monatsrate zu erbringen. Wie hoch ist die Restschuld nach 6 Monaten und nach 12 Monaten?

b) Wie hoch wäre die Restschuld nach einem Jahr, wenn Zins und Tilgung jährlich nachträglich in einer Jahresrate zu erbringen wären? Ist diese Zahlungsvariante für den Darlehensnehmer günstiger?

8.16. Für die Berechnung eines *„effektiven Jahreszinses“* bei Krediten schreibt § 6 Abs. 2 der Preisangabenverordnung in der ab 1. September 2000 geltenden Fassung (BGBl. I 2000 Nr. 37 S. 1244) vor: *„Es gilt die exponentielle Verzinsung auch im unterjährigen Bereich.“* Das bedeutet, dass die Formel der Zinseszinsrechnung für beliebige, auch gebrochene Vielfache der Zinsperiode von einem Jahr anzuwenden ist. Ferner ist nach dem Anhang zu § 6 von einem Jahr mit 12 gleichlangen Monaten zu je $30,41\overline{6}$ Tagen auszugehen („Zinsusance 30,41666/365“). Um die Berechnung im Detail ausführen zu können, muss man auf die Begründung der Verordnung zur Änderung der Preisangaben- und der Fertigpackungsverordnung vom 28. Juli 2000 (Bundesrat Drucksache 180/00) zurückgreifen. Darin heißt es mit Bezug auf Berechnungsbeispiele aus dem Anhang zu § 6 u.a.:

„Das Berechnungsbeispiel 6.5 zeigt, dass es keinen Einfluss auf die Höhe des effektiven Jahreszinses hat, ob Zahlungszeitpunkte auf einen 30. oder 31. eines Monats bzw. auf den 28. oder 29. Februar fallen oder ob innerhalb einer Zeitspanne von Zahlungszeitpunkten ein Monat mit 30 oder 31 Tagen bzw. ein Februar mit 28 oder 29 Tagen liegt. Der 30. eines Monats mit tatsächlich 31 Tagen und der 28. Februar in einem Schaltjahr werden jeweils als das Monatsende angesehen. Das Berechnungsbeispiel 6.6 stellt die Vorgehensweise dar, wenn sich die Zeitspanne zwischen zwei Zahlungszeitpunkten nicht auf einen vollen standardisierten Monat oder auf ein Vielfaches von vollen standardisierten Monaten zurückführen lässt. Dabei werden zunächst volle standardisierte Monate in Ansatz gebracht und der dann am Ende noch verbliebene Rest als Bruchteil eines Jahres mit 365 Tagen hinzugefügt. Hierbei gilt der 30. des übrig gebliebenen Monats wiederum als das Monatsende; dies gilt in diesem Fall ebenfalls für den Februar (...). Das tatsächliche Monatsende bleibt in diesen Fällen erneut unberücksichtigt.“

Ein Verkäufer bietet bei einem Kauf am 7. Februar eine „Zahlpause“ bis zum 22. März des gleichen Jahres gegen einen Preisaufschlag von 1 % an.

a) Welcher Verzinsung entspricht das Kreditangebot bei Anwendung der üblichen Formel der einfachen Verzinsung und der klassischen „Deutschen Zinsmethode 30/360“?
b) Berechnen Sie den „effektiven Jahreszins“ nach Preisangabenverordnung!

8.17. Ein Kredit der Höhe B mit einer Verzinsung von 20 % pro Halbjahr ist in zwei gleichen nachträglich zu entrichtenden Halbjahresraten von 500 € vollständig zurückzuzahlen.

a) Wie hoch ist der Kredit?
b) Bestimmen Sie den Zins- und Tilgungsplan des Kredits!
c) Geben Sie den „effektiven Jahreszins“ nach Preisangabenverordnung an!
d) Bestimmen Sie den Zinssatz p.a., für den bei einfacher Verzinsung die Barwerte der Zahlung des Kreditgebers und der Zahlungen des Kreditnehmers jeweils bezogen auf den Zeitpunkt der vollständigen Kreditrückzahlung gleich

sind! (Das ist in diesem Falle der „effektive Jahreszins“ nach bis 31. August 2000 geltendem Recht.)

Platzhalter für weitere Aufgaben

Kapitel 9
Differentialrechnung in einer Veränderlichen

9.1 Stetigkeit

Der Funktionsbegriff ist bereits im Abschnitt 1.2.3 eingeführt worden. Im folgenden sei f stets eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definition 9.1. *Falls sich für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k \in D$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \in D$ ein und derselbe Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ ergibt, so heißt dieser* **Funktionsgrenzwert** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Definition 9.2. *Die Funktion f heißt* **stetig** *in x_0, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.*

Satz 9.1. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (für alle $x \in [a,b]$) und $f(a) \cdot f(b) < 0$ (Vorzeichenwechsel), so existiert ein $x^* \in (a,b)$ mit $f(x^*) = 0$, x^* heißt* **Nullstelle** *von f.*

9.2 Polynome und Interpolation

Definition 9.3. *Eine Funktion $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (\mathbb{C} \to \mathbb{C})$ der Form $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0$ heißt ein* **Polynom n–ten Grades**.

Satz 9.2 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Für Polynome gilt:*

a) Jedes reelle Polynom n–ten Grades hat höchstens n Nullstellen in $\mathbb{R}$.

b) Jedes komplexe Polynom n–ten Grades hat unter Berücksichtigung evtl. Vielfachheiten genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$.

Es gibt darüber hinaus die folgende Zerlegung in Linearfaktoren:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$$

Die Stellen $x_k \in \mathbb{C}$ sind dabei genau die Nullstellen.

Polynome kann man zur Interpolation nutzen, wenn von einer Funktion $f(x)$ nur die Werte an n „Stützstellen“ $x_1, \dots, x_n$ bekannt sind. Durch die Punkte (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$ kann man ein Polynom $(n-1)$–ten Grades legen. Konkret ist durch 1 Punkt eine Konstante (Polynom 0–ten Grades), durch 2 Punkte eine Gerade (Polynom 1–ten Grades), durch 3 Punkte eine Parabel (Polynom 2–ten Grades) usw. bestimmt.

Satz 9.3 (Lagrangesche Interpolationsformel)**.** *Das Interpolationspolynom $(n-1)$–ten Grades durch die n Punkte (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$, ist eindeutig durch die Formel*

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

bestimmt.

Beweis:

Es gilt

$$\frac{(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{i-1})(x_j - x_{i+1})\cdots(x_j - x_n)}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

und daher $L(x_i) = y_i$.

□

9.3 Differentiation

Definition 9.4 (Differenzierbarkeit, Ableitung)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f heißt* **differenzierbar** *im Punkt $x_0 \in (a, b)$, falls*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert. Der Grenzwert heißt **Ableitung** *der Funktion $f(x)$ im Punkt x_0. Die Funktion f heißt differenzierbar im Intervall (a, b), falls f in jedem Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist.*

Beispiel 9.1 (Geschwindigkeit)**.** *Wird für eine Ortsveränderung der zurückgelegte Weg s als Funktion der Zeit t angegeben, $s = s(t)$, so lässt sich im Falle eines linearen Zusammenhanges die Geschwindigkeit v durch $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ermitteln. Ist der Zusammenhang nicht linear, so hängt die Geschwindigkeit von der Zeit ab. Zur Ermittlung der Augenblicksgeschwindigkeit muss man an der entsprechenden Stelle Δt immer kleiner werden lassen, d.h. $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'$.*

Satz 9.4. *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, dann ist*

1. *$f + g$ differenzierbar und $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.*
2. *$f \cdot g$ differenzierbar und $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$. Man nennt dies die* **Produktregel**.
3. *falls $g(x) \neq 0$ ist, $\frac{f}{g}$ differenzierbar und $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$. Man nennt dies die* **Quotientenregel**.

Satz 9.5. *Jede differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist in (a, b) auch stetig.*

Bemerkung: Mit Hilfe der Ableitung erfolgt eine Linearisierung. Für eine differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist nämlich $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + g_{x_0}(x)$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} g_{x_0}(x) = 0$.

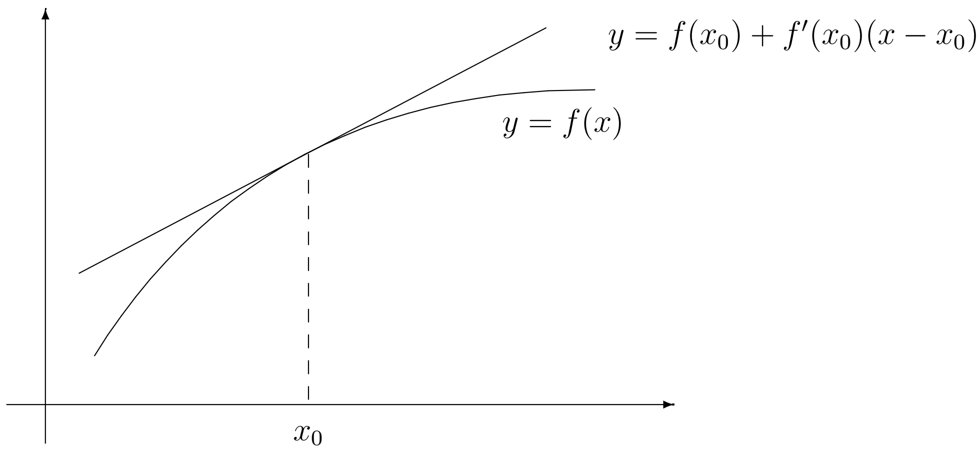


Abbildung 9.1: Die Tangente an die Funktion f im Punkt x_0.

Beim Grenzübergang in Definition 9.4 wird von der Sekante zur Tangente übergegangen. Die Ableitung $f'(x_0)$ ist der Anstieg der Tangente im Punkt x_0. Ist $f'(x) > 0$ in (a, b), dann ist f dort monoton wachsend, ist $f'(x) < 0$ in (a, b), dann ist f dort monoton fallend (vgl. die noch folgende Definition 9.8).

Ist in der Grafik für eine Ortsveränderung der zurückgelegte Weg als Funktion der Zeit dargestellt, so ist der Anstieg der Tangente die Augenblicksgeschwindigkeit. Auf der Tangente kann abgelesen werden, welcher Weg zurückgelegt werden würde, wenn die Augenblicksgeschwindigkeit beibehalten würde (für $t > t_0$) bzw. zurückgelegt worden wäre, wenn schon vorher mit der Augenblicksgeschwindigkeit gefahren worden wäre (für $t < t_0$).

Korollar

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Für natürliche α ergibt sich dies mit Hilfe des binomischen Satzes, z.B.

$(x^2)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

Definition 9.5 (Elastizität)**.** *Ist f differenzierbar und $f(x) \neq 0$, so heißt*

$$\varepsilon_{f,x}(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} x$$

Elastizität *der Funktion $f(x)$.*

Bemerkung: Für hinreichend kleine Änderungen ist die **Ableitung** ein Maß für das Verhältnis der **absoluten** Änderungen zweier voneinander abhängiger Größen, während die **Elastizität** ein Maß für das Verhältnis der **relativen** (prozentualen) Änderungen zweier voneinander abhängiger Größen ist:

$$f' \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}, \qquad \varepsilon_{f,x} \approx \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Beispiel 9.2. *Für $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2x$, $\varepsilon_{f,x}(x) = 2$. An der Stelle $x = 2$ beträgt die Ableitung $f'(2) = 4$ und die Elastizität $\varepsilon_{f,x}(2) = 2$. Vergrößert man x von $x = 2$ aus um 0.1, d.h. 5 %, so wächst $f(x)$ ca. um absolut $f'(2) \cdot 0.1 = 0.4$ bzw. relativ $\varepsilon_{f,x}(2) \cdot 5\,\% = 10\,\%$.*

Beispiel 9.3 (Preiselastizität der Nachfrage)**.** *Beträgt die Nachfrage N nach einem Erzeugnis in Abhängigkeit vom Preis p $\quad N(p) = 30\,000 - 200p$, so ergibt sich als Elastizität $\varepsilon_{N,p}(p) = \frac{p}{p-150}$. Für $p = 100$ ist z.B. $\varepsilon_{N,p}(100) = -2$. Eine Preiserhöhung um 1.5 % wird also zu einer Senkung der Nachfrage um $|-2| \cdot 1.5\,\% = 3\,\%$ führen.*

Beispiel 9.4 (Grenzkosten)**.** *Sind $K(x)$ die Gesamtkosten für die Produktion von x Einheiten einer Ware, so entstehen für die Herstellung Δx (zusätzlicher) Einheiten Kosten in Höhe von $\Delta K \approx K'(x)\,\Delta x$. Für $\Delta x = 1$ ergibt sich speziell $\Delta K \approx K'(x)$. Man nennt $K'(x)$ die* **Grenzkosten***. Sie geben die Kosten für die Produktion einer zusätzlichen Einheit an.*

Definition 9.6 (Differential)**.** *Ist die Funktion f differenzierbar im Punkt x, so heißt die Funktion*

$$df(\Delta x) = f'(x)\,\Delta x$$

Differential *der Funktion f im Punkt x.*

Für hinreichend kleine Δx ist $\mathrm{d}f \approx \Delta f$. Betrachtet man $x = x(x)$ als Funktion von sich selbst, so gilt $\mathrm{d}x(\Delta x) = x'(x)\,\Delta x = \Delta x$, also ist $\mathrm{d}x = \Delta x$ und damit

$$\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

Den rechtsstehenden Ausdruck nennt man **Differentialquotient**. Beim Differentialquotienten handelt es sich um den Grenzwert von Differenzenquotienten. Mit den Differentialen kann weitgehend wie mit Zahlen gerechnet werden, d.h., der Differentialquotient kann als Bruch verstanden werden.

Satz 9.6 (Kettenregel)**.** *Sind* $g : (a,b) \to (c,d)$, $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen, dann ist auch* $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ *eine in* (a,b) *differenzierbare Funktion mit* $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ *(„äußere Ableitung“ mal „innere Ableitung“).*

Es gilt nämlich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = f'(g)g'(x).$$

Satz 9.7. *Ist die Funktion* $f : (a,b) \to (c,d)$ *differenzierbar und invertierbar mit* $g := f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$*, dann gilt* $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$ *für* $y \in (c,d)$ *mit* $f'(g(y)) \neq 0$.

Ableitung: Verhältnis der absoluten Änderungen von zwei Größen,
Anstieg der Tangente, Linearisierung einer Funktion
Elastizität: Verhältnis der relativen (prozentualen) Änderungen von zwei Größen

Differentiationsregeln

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(uv)' = u'v + uv'$ (Produktregel)

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ (Quotientenregel)

$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ (Kettenregel)

Ableitung elementarer Funktionen

$(x^n)' = nx^{n-1}$ (d.h. auch $x' = 1$, $1' = 0$)

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Abbildung 9.2: Merkstoff zum Differenzieren

Die natürliche Logarithmusfunktion, d.h. die Logarithmusfunktion zur Basis e $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion e^x. Es gilt für $a > 0$ die Beziehung $a^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}$. Für ln wird auch log ohne Angabe einer Basis geschrieben.

9.4 Höhere Ableitungen

Definition 9.7. *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann heißt*

$$f''(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

die 2. Ableitung von f an der Stelle $x_0 \in (a,b)$. Die Funktion f heißt k-mal stetig differenzierbar in (a,b), falls die l–ten Ableitungen $f^{(\ell)} : (a,b) \to \mathbb{R}, \quad \ell = 0, \dots k$, existieren und stetig sind. (0. Ableitung ist dabei die Funktion selbst.) Kurz schreibt man $f \in C^k(a,b)$.

Wir betrachten nun die **Taylorapproximation** einer Funktion f. Dabei wird davon ausgegangen, dass das lokale Verhalten der Funktion an der Stelle x_0 bekannt ist. Genauer gesagt, sollen an der Stelle x_0 der Funktionswert und die ersten k Ableitungen bekannt sein. Gesucht wird ein Polynom k–ten Grades

$$P_k(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots + a_k(x - x_0)^k$$

mit diesen Eigenschaften. Für $P_k(x)$ gilt

$$\begin{aligned}&f(x_0) = P_k(x_0) = a_0,\ f'(x_0) = P_k'(x_0) = a_1,\ f''(x_0) = P_k''(x_0) = 2a_2,\\ &f'''(x_0) = P_k'''(x_0) = 3!\, a_3, \dots,\ f^{(k)}(x_0) = P_k^{(k)}(x_0) = k!\, a_k.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$P_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Dieses Polynom heißt das **Taylorpolynom k–ten Grades** und bildet die Grundlage der Taylorentwicklung:

Satz 9.8 (Taylor). *Sei $f \in C^{k+1}(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, dann existiert $\xi \in (x_0, x)$ oder $\xi \in (x, x_0)$ mit*

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)(x - x_0)^{k+1}\\ &= \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0) + R_k(x, x_0)\end{aligned}$$

Mit der Taylorentwicklung wird eine Funktion f

- für $k = 0$ durch eine Konstante $f(x) \approx P_0(x) = f(x_0)$,
- für $k = 1$ durch eine Gerade $f(x) \approx P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (Tangente),
- für $k = 2$ durch eine Parabel $f(x) \approx P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x)(x - x_0)^2$
- usw.

approximiert. In diesem Sinne ist die Taylorapproximation (Approximation durch ein Polynom k–ten Grades) eine Verallgemeinerung der Differentiation (Approximation durch ein Polynom 1. Grades).

Falls das Restglied $R_k(x, x_0) \to 0$ für $k \to \infty$ gilt, sprechen wir von der Taylorreihe von f,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad , \quad |x| < 1 \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \\
\ln(x+1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad x \in (-1, 1)
\end{aligned}$$

9.5 Kurvendiskussion

Definition 9.8. *Eine Funktion $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt* **monoton wachsend (fallend)***, falls aus $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$ $(f(x) > f(y))$.*

Definition 9.9. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* **konvex (konkav)***, falls für alle $x < y \in I$ und $\lambda \in [0, 1] : \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda) y)$ $(\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) < f(\lambda x + (1 - \lambda) y))$ ist, d.h. die Sehne von $(x, f(x))$ nach $(y, f(y))$ oberhalb (unterhalb) des Graphen von f liegt.*

Satz 9.9.

a) Sei $f \in C^1(a, b)$. Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist, dann ist f monoton wachsend.

b) Sei $f \in C^2(a, b)$. Falls $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f konvex (d.h. die Tangente liegt unterhalb des Graphen).

Definition 9.10. *Ein Punkt* $x_0 \in (a,b)$ *heißt* **lokales Minimum** (**lokales Maximum**) *von* $f : I \to \mathbb{R}$*, falls ein* $\varepsilon > 0$ *existiert, so daß* $f(x) \geq f(x_0)$ $\quad (f(x) \geq f(x_0))$ *für alle* $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap I$ *gilt.*

Definition 9.11. *Sei* $f \in C^2(a,b)$*. Ein Punkt* $(x_0, f(x_0))$*, an dem die zweite Ableitung ihr Vorzeichen ändert heißt* **Wendepunkt**.

Satz 9.10. *Sei* $x_0 \in (a,b)$ *ein* **lokales Extremum** *(Minimum oder Maximum) und* $f \in C^1(a,b)$*, dann liegt im Falle eines Vorzeichenwechsels bei* f' *von* $+$ *nach* $-$ *an der Stelle* x_0 *ein lokales Maximum vor. Für* $f \in C^2(a,b)$ *mit* $f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) < 0$ *ist dies ebenso der Fall.*

Satz 9.11. *Sei* $(x_0, f(x_0))$ *ein Wendepunkt von* $f \in C^2(a,b)$*, dann ist* $f''(x_0) = 0$*. Ist* $f \in C^3(a,b)$ *und gilt für* $x_0 \in (a,b)$ $\quad f''(x_0) = 0$ *und* $f^{(3)}(x_0) \neq 0$*, so ist* $(x_0, f(x_0))$ *ein Wendepunkt von* f*.*

	$f''(x) > 0$	$f''(x) = 0$	$f''(x) < 0$
$f'(x) > 0$	mon. wachsend u. konvex	wachsend	mon. wachsend u. konkav
$f'(x) = 0$	relatives Minimum		relatives Maximum
$f'(x) < 0$	mon. fallend u. konvex	fallend	mon. fallend u. konkav

Kurvendiskussion

Es sind folgende Eigenschaften einer Funktion zu diskutieren:

1. Definitionsbereich
2. Symmetrien (falls vorhanden)
3. Nullstellen (Schnitte mit x–Achse)
4. Schnitt mit y–Achse
5. Polstellen
6. Asymptotik: Verhalten an Polstellen, an den Randpunkten des Definitionsbereiches bzw. im Unendlichen
7. Monotonie
8. Extrema
   (a) globale Extrema

(b) lokale Extrema

9. Krümmungsverhalten
10. Wendepunkte
11. Wertebereich

9.6 Regel von l'Hospital

Satz 9.12 (Regel von l'Hospital). *Seien f und g stetig und differenzierbar. Ist $f(t) = g(t) = 0$ bzw. $f(t) = g(t) = \pm\infty$, dann gilt*

$$\lim_{x\to t} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to t} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechts stehende Grenzwert existiert. t darf dabei auch $\pm\infty$ sein.

9.7 Aufgaben

9.1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+3}{4x^2+5x+6}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{2+\sqrt[3]{x^5}}$, c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}\right)$!

9.2. Für die Größen x und y liegen folgende Werte vor:

x	2	2.5	4
$y(x)$	0.5	0.4	0.25

(z.B. erfüllt von $y(x) = \frac{1}{x}$).

a) Ermitteln Sie eine Näherung für $y(3)$ durch lineare Interpolation aus $y(2)$ und $y(4)$!

b) Ermitteln Sie eine Näherung für $y(3)$ durch lineare Interpolation aus $y(2.5)$ und $y(4)$!

c) Ermitteln Sie eine Näherung für $y(3)$ durch quadratische Interpolation aus $y(2)$, $y(2.5)$ und $y(4)$!

9.3. Für die Größen x und y liegen folgende Werte vor:

x	4	5	8
$y(x)$	0	24	60

(z.B. erfüllt von $y(x) = 120 - \frac{480}{x}$).

a) Ermitteln Sie eine Näherung für $y(6)$ durch lineare Interpolation aus $y(5)$ und $y(8)$!

b) Ermitteln Sie eine Näherung für $y(6)$ durch quadratische Interpolation aus $y(4)$, $y(5)$ und $y(8)$!

9.4. Das Anfangskapital $K(0)$ werde zu i p.a. kontinuierlich verzinst (s. Aufgabe 8.11), $t \in \mathbb{R}$ sei die Zeit in Jahren.

a) Zeigen Sie, dass das Kapital proportional zu seiner Höhe wächst! Wie groß ist der Proportionalitätsfaktor?

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $K(t)$ im Punkt $(t, K(t))$!

c) In welchem Punkt schneidet die Tangente die t–Achse?

9.5. Differenzieren Sie nach x:

a) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$, b) $y = x + \sqrt{x}$, c) $y = x \sin(x + 3)$,

d) $y = \frac{\cos x}{x^2}$, e) $y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$, f) $y = x + \sqrt{x^2 + 3}$,

g) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$, h) $y = (x \cos x)^x$!

9.6. Ermitteln Sie $f'(\frac{\sqrt{\pi}}{2})$ für $f(t) = \sqrt{1 + \cos^2 t^2}$!

9.7. Bestimmen Sie die n–te Ableitung von $y = xf(x)$!

9.8. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$ im Punkt $x = \pi$ und skizzieren Sie $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$!

9.9. Ein Unternehmen erzielt beim Absatz von x Mengeneinheiten einer Ware eine Gewinn von $G(x) = 100\sqrt{x} - 3x$. Danach wird eine Mengensteuer von $T(x) = rx$ erhoben. Bestimmen Sie denjenigen Steuersatz r, bei dem der Staat höchste Steuereinnahmen hat, wenn man nettogewinnorientiertes Verhalten des Unternehmers unterstellt!

9.10. Ein Mann befindet sich in einem Ruderboot vor einer geradlinigen Küste. Der Abstand zum nächsten Küstenpunkt K beträgt 8 km. Der Mann möchte zum Küstenpunkt Z, der vom Punkt K genau 10 km entfernt liegt. Der Mann rudert mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h zu einem Küstenpunkt M zwischen K und Z und läuft anschließend mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h zum Punkt Z. Welchen Küstenpunkt muss der Mann ansteuern, um sein Ziel in kürzester Zeit zu erreichen?

9.11. Welches Rechteck mit gegebenem Umfang U hat die größte Fläche?

9.12. Wie sind die Ausmaße einer zylindrischen Konservendose zu wählen, damit sie den Inhalt 1 Liter hat und zu ihrer Herstellung möglichst wenig Material benötigt wird? Wie groß ist der Materialverbrauch pro Dose (ohne Verschnitt)?

9.13. Diskutieren Sie den Verlauf folgender Funktionen und skizzieren Sie sie:

a) $y = x^3(x - 3)$, b) $y = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1}$!

9.14. Sei $a, b, c > 0$. Diskutieren Sie den Verlauf der logistischen Funktion $y = \dfrac{a}{b + \mathrm{e}^{-ct}}$ und skizzieren Sie sie!

9.15. Diskutieren Sie den Verlauf folgender Funktionen und skizzieren Sie sie:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4x + 4}$!

9.16. Diskutieren Sie den Verlauf folgender Funktionen und skizzieren Sie sie:

a) $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$, b) $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x + \cos x$!

9.17. Die über einem Teil der reellen Achse definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin|x| & 0 \le |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \end{cases}$$

werde so auf die komplette reelle Achse fortgesetzt, dass eine Funktion mit der Periodenlänge 2π entsteht. Diskutieren und skizzieren Sie den Verlauf dieser Funktion!

9.18. a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x^3$ im Punkt $x_0 = 1$ nach der Taylorschen Formel!
b) Geben Sie das Restglied bei Abbruch nach dem konstanten, linearen, quadratischen bzw. kubischen Glied an!
c) Skizzieren Sie die Funktion und die Taylorpolynome nullten bis dritten Grades!

9.19. a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sinh x$ im Punkt $x_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel!
b) Wie lauten die Taylorpolynome dritten und vierten Grades $P_3(x)$ und $P_4(x)$?
c) Geben Sie die jeweiligen Lagrangeschen Restglieder an!
d) Zeigen Sie durch Abschätzung des Lagrangeschen Restgliedes, dass für $|x| \le 1$ die Abschätzung $|P_4(x) - \sinh x| < \frac{1}{75}$ gilt!
e) Wie groß ist der Fehler bei Verwendung des Taylorpolynoms vierten Grades für $x = 1$ tatsächlich?
f) Beweisen Sie, dass die Taylorreihe für $\sinh x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für alle x konvergiert!

9.20. Entwickeln Sie $f(x) = \cos x$ für $x_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel, geben Sie das Restglied an und beweisen Sie die Konvergenz der Taylorreihe!

9.21. Schätzen Sie ab, für welche Winkel φ bei Anwendung der Näherungsformel $\cos\varphi \approx 1 - \dfrac{\varphi^2}{2}$ die Fehlerschranke 0.0001 eingehalten wird!

9.22. Die Anzahl z der Fahrzeuge, die eine bestimmte Straße stündlich passieren können, lasse sich aus der mittleren Geschwindigkeit v in m/s bei einer mittleren

Fahrzeuglänge von 4 m nach folgender Formel berechnen:

$$z(v) = 1000 \frac{v}{4 + \frac{v}{4} + \frac{v^2}{12}}.$$

a) Die Straße werde durchschnittlich mit $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$ passiert. Approximieren Sie z um v_0 durch ein Taylorpolynom 2. Grades!

b) Welche Schlussfolgerungen lassen sich daraus für die Durchlassfähigkeit der Straße ziehen, wenn sich die Durchschnittsgeschwindigkeit gegenüber v_0 erhöht?

c) Bei welcher Durchschnittsgeschwindigkeit in km/h ist die Durchlassfähigkeit der Straße am größten?

9.23. Sei m eine beliebige reelle Zahl.

a) Entwickeln Sie $f(x) = (1+x)^m$ nach Potenzen von x !

b) Beweisen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums, dass die Reihe für $|x| < 1$ konvergiert!

c) Zeigen Sie, dass für $|x| < 1$ $\quad (1+x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2}(-x)^n$ gilt!

d) Stellen Sie 1.001^{-3} und die Approximation davon durch Taylorpolynome nullten, ersten, zweiten und dritten Grades gegenüber!

9.24. Wenden Sie die l'Hospitalsche Regel auf folgende Grenzwerte an:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$, b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$!

9.25. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{3x} - 1}{\ln(1+x)}$, c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x - 1}$, d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2}$,

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\ln(1+2x)}$, f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + \sin^2 x}$, g) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$, h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{\sin x - x}$,

i) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \mathrm{e}^{2x}) \cot x$, j) $\lim\limits_{x \to \pi} (\pi - x) \tan \frac{x}{2}$, k) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + \cos x}{x + \sin x}$!

9.26. a und b seien reelle Parameter. Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax^2 + 2000x + 2}{bx^2 - 5x - 8}$!

9.27. In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen stetig:

a) $f(x) = |x|$, b) $f(x) = \frac{(1-x)^2}{1 - x^2}$, c) $f(x) = \cos x \sin x$, d) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$?

9.28. Für die Produktion von $x \leq 2000$ Einheiten einer Ware lautet die (Gesamt-)Kostenfunktion $K(x) = 1500 + 5x - 0.001x^2$. Ermitteln Sie die Durchschnitts- und die Grenzkostenfunktion sowie für $x = 1000$ und $x = 1900$ jeweils die

Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkosten sowie die tatsächlichen Mehrkosten für die Produktion einer zusätzlichen (d.h. der 1001. bzw. 1901.) Einheit!

9.29. Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x) = (2x+3)^2 e^{2x+3} \ln(2x+3)$, b) $f(x) = \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}$, c) $f(x) = \ln\sqrt{x^8+2x^4}$,

d) $f(x) = \dfrac{(x+2)\sin(3x+4)}{x^2+x}$, e) $f(x) = (\lg x^3)^{\frac{3}{2}}$!

9.30. Die vom Preis p abhängige Nachfragefunktion eines Produktes laute $f(p) = \dfrac{20\,000}{2p+3}$. Ermitteln Sie für einen Preis von $p = 2$ die Auswirkungen einer Preiserhöhung von 1 % mit Hilfe der Elastizität sowie exakt!

9.31. Sei $x > 0$. Berechnen Sie die Elastizität der Funktion $f(x) = 2x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{x}$! Wo ist die Funktion elastisch ($|\varepsilon| > 1$), proportionalelastisch ($|\varepsilon| = 1$) bzw. unelastisch ($|\varepsilon| < 1$)? Skizzieren Sie die Funktion und ihre Elastizitätsbereiche!

9.32. In einem Betrieb werden m Mengeneinheiten einer Ware pro Jahr gleichmäßig verbraucht. Dafür werden regelmäßig x Einheiten dieser Ware bestellt, die vor der nächsten Bestellung vollständig verbraucht werden. Für jede Bestellung entstehen Kosten in Höhe von B. Der Wert einer Mengeneinheit der Ware beträgt w, der Wert des durch eingelagerte Ware gebundenen Kapitals wird mit i p.a. verzinst.

a) Ermitteln Sie die Bestellmenge, bei der die Gesamtkosten für Bestellung und Lagerung minimiert werden!

b) Sei $m = 2800$, $B = 50$ €, $w = 100$ €, $i = 7$ %. Wie hoch ist die optimale Bestellmenge, welche Gesamtkosten entstehen dabei für Bestellung und Lagerung?

9.33. Untersuchen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a das Verhalten der Funktion $f(x) = (a-2x)\cot 3x$ für $x \to \pi$!

9.34. Berechnen Sie a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}}{\cot x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$!

9.35. Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{48-2x}$, $x \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie sie!

9.36. a) Die Funktion $K(x) = 5\cdot 10^{-9}x^3 - 6\cdot 10^{-4}x^2 + 20.5x + K_0$ gebe die Kosten für die Produktion von x Stück einer Ware in € an, wenn x positiv und $K(x)$ konkav ist. Für welchen Bereich von Stückzahlen x ist die Funktion $K(x)$ als Gesamtkostenfunktion anwendbar?

b) Es sei bekannt, dass für $x = 10000$ die Elastizität der Gesamtkosten in Abhängigkeit von der Stückzahl 0.5 beträgt. Wie hoch sind die Anfangsinvestitionskosten K_0?

c) Welche prozentuale Kostensteigerung hat bei $x = 10000$ eine Steigerung der produzierten Stückzahl um 0.4 % ungefähr zur Folge?
d) Ermitteln Sie die Durchschnitts- und die Grenzkostenfunktion!
e) Es liegt ein Auftrag von 10000 Stück vor. Wie hoch muss der Preis pro Stück mindestens festgesetzt werden, um die entstehenden Kosten zu erwirtschaften?
f) Für ein Sonderangebot sollen über die 10000 Stück hinaus einige weitere Einheiten der Ware produziert werden. Wie hoch muss der Preis dafür mindestens festgesetzt werden, um wenigstens die Kosten zu erwirtschaften?

9.37. § 32a Absatz 1 des Einkommensteuergesetzes in der wegen der Flutkatastrophe erst und nur für das Jahr 2004 anzuwendenden Fassung bestimmt den Einkommensteuertarif in folgender Weise:

Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §32b, §34, §34b und §34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 7.426 Euro (Grundfreibetrag): 0;

2. von 7.427 Euro bis 12.755 Euro: (747,80 · y + 1.700) · y;

3. von 12.756 Euro bis 52.292 Euro: (278,59 · z + 2.497) · z + 1.118;

4. von 52.293 Euro an: 0,47 · x – 9.232.

„y“ ist ein Zehntausendstel des 7.426 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „z“ ist ein Zehntausendstel des 12.755 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „x“ ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

Von den Rundungsvorschriften soll hier abgesehen werden.

a) Ermitteln Sie den Grenzsteuersatz in Abhängigkeit vom zu versteuernden Einkommen x und stellen Sie diesen grafisch dar!
b) Ermitteln Sie für ein Einkommen von 20000 € die zu entrichtende Steuer, ihren prozentualen Anteil am Einkommen sowie den Grenzsteuersatz!

9.38. Sei $x < 0$. Schätzen Sie ab, für welche x bei Anwendung der Näherungsformel $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$ die Fehlerschranke 0.0001 eingehalten wird!

9.39. α und β seien beliebige reelle Parameter. Berechnen Sie den Grenzwert
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2\alpha x} - \mathrm{e}^{3\beta x}}{\sin 4\alpha x - \sin 6\beta x} \quad !$$

Kapitel 10
Integralrechnung in einer Veränderlichen

10.1 Das bestimmte Integral (Riemann–Integral)

Definition 10.1. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir nennen eine Funktion $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine* **Treppenfunktion***, falls es eine* **Zerlegung** *$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ gibt, so daß t in jedem Intervall (x_i, x_{i+1}), $i = 0, \ldots, n-1$ konstant ist, d.h. $t(x) = \xi_i \quad \forall x \in (x_i, x_{i+1})$.*

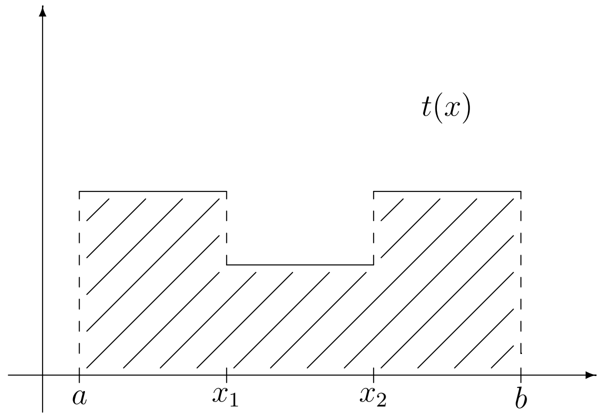


Abbildung 10.1: Beispiel einer Treppenfunktion im Intervall (a, b).

Für Treppenfunktionen definieren wir das **bestimmte Integral** durch

$$\int_a^b t(x)\mathrm{d}x := \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(x_{i+1} - x_i).$$

Für $t(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ entspricht dies dem Flächeninhalt zwischen dem Graph der Treppenfunktion und der x - Achse (siehe Abbildung 10.1).

Um für die beschränkte Funktion f das Riemann–Integral zu definieren, brauchen wir noch den Begriff des Infimums. Das **Infimum** oder auch größte untere Schranke einer Menge A ist definiert durch $\inf A := \max\{x \in \mathbb{R} : x \leq a \quad \forall a \in A\}$. Das **Supremum** oder auch kleinste obere Schranke einer Menge A ist definiert durch $\sup A := \min\{x \in \mathbb{R} : x \geq a \quad \forall a \in A\}$.

Hiermit definieren wir das Integral über die Funktion f als

$$I_0(f) := \inf_t \{\int_a^b t(x)\mathrm{d}x, \quad t : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad t(x) \leq f(x), \quad \forall x \in [a, b]\}.$$

Das Infimum wird also über alle Treppenfunktionen mit $t(x) \leq f(x)$ gebildet.

Definition 10.2. *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt* **Riemann–integrierbar**, *falls $I_0(f)$ existiert. In diesem Fall heißt $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := I_0(f)$ das* **bestimmte Integral**.

Satz 10.1.

(a) Ist $f \in C^0([a,b])$ (also stetig auf $[a,b]$), dann ist f auch Riemann–integrierbar.

(b) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und monoton, dann ist f ebenfalls Riemann-integrierbar.

Satz 10.2. *Sind f, g beide Riemann–integrierbar, , so sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ Riemann–integrierbar. Es gelten folgende Beziehungen:*

1. $\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

2. $\int_a^b (\lambda f)(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \qquad$ *für jedes $c \in (a,b)$*

4. *Aus $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in (a,b)$ folgt* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

5. $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Bemerkung 10.1. *Das Riemann–Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ einer Funktion $f(x) \ge 0$ (punktweise) in einem Intervall $x \in [a,b]$ ist anschaulich der Flächeninhalt der vom Graph von f und der x–Achse eingeschlossenen Fläche.*

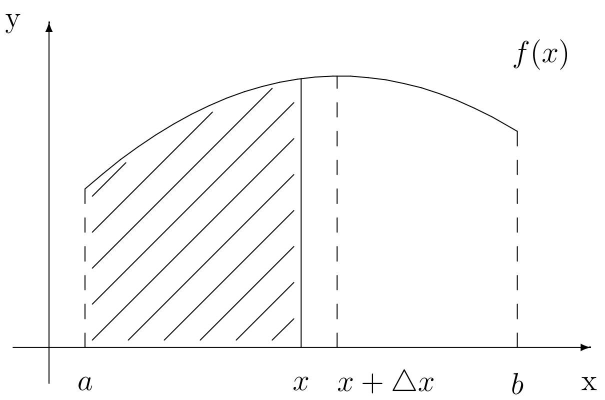
Definition 10.3. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar. Eine differenzierbare Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt* **Stammfunktion von f**, *falls $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$ gilt.*

Satz 10.3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei $f \in C^0[a,b]$.*

1. *Die durch $F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(\tau)\mathrm{d}\tau$ definierte Funktion ist* **eine** *Stammfunktion von f, d. h. $F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\int_a^x f(\tau)\mathrm{d}\tau) = f(x), \quad x \in [a,b]$. Jede Stammfunktion von f hat die Form $F(x) + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.*

2. Für jede beliebige Stammfunktion F von f gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b := F(b) - F(a).$$



$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

Abbildung 10.2: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 10.4 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Ist $f \in C^0[a,b]$, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi)$.*

10.2 Die partielle Integration

Satz 10.5 (Partielle Integration)**.** *Seien $f, g \in C^1[a,b]$, dann gilt*

$$\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(t)g(t)\Big|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis:

Sei $H(x) := f(x)g(x) - f(a)g(a)$, dann gibt die Anwendung der Produktregel $H'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Der Hauptsatz der Integralrechnung liefert die Behauptung.

□

Beispiel 10.1. $f'(t) = \cos t \qquad g(t) = \cos t$

$$\begin{aligned}\int_0^x \cos^2 t \,\mathrm{d}t &= \sin t \cos t\big|_{t=0}^x - \int_0^x \sin t(-\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sin t \cos t\big|_{t=0}^x + \int_0^x 1\,\mathrm{d}t - \int_0^x \cos^2 t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad 2\int_0^x \cos^2 t\,\mathrm{d}t = [t + \sin t \cos t]_0^x = x + \sin x \cos x$$

10.3 Integration durch Substitution

Satz 10.6 (Substitutionsregel)**.** *Sei $f \in C^0[a,b]$ und $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine invertierbare Funktion mit $\varphi \in C^1[c,d]$, dann gilt:*

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

beziehungsweise

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^x f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Beweis:

Wir betrachten $H(x) := F(\varphi(x)) = \int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t + c$. Mit der Kettenregel folgt $H'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ und

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Beispiel 10.2. *Gegeben sei das Integral* $I = \int\limits_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$. *Zur Berechnung des Integrals wenden wir die Substitutionsregel an, wobei wir* t *durch* $t = \tan\tau = \frac{\sin\tau}{\cos\tau} = \varphi(\tau)$ *ersetzen. Wir erhalten dann* $\varphi'(\tau) = \frac{1}{\cos^2\tau}$ *und* $\tau = \varphi^{-1}(t) = \arctan t$.
Damit folgt nach Satz 10.6

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int\limits_{\varphi^{-1}(0)}^{\varphi^{-1}(1)} \frac{\mathrm{d}\tau}{\cos^2\tau(1+\frac{\sin^2\tau}{\cos^2\tau})^2} = \int\limits_{\arctan 0}^{\arctan 1} \frac{\mathrm{d}\tau}{\cos^2\tau(\frac{\cos^2\tau+\sin^2\tau}{\cos^2\tau})^2} \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\tau}{\frac{1}{\cos^2\tau}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\tau\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

und weiter mit Beispiel 10.1 folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\tau \mathrm{d}\tau = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin t\cos t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

Zur Übung: Berechnen Sie die folgenden Integrale mit der Substitutionsregel:

a) $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$, b) $\int e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$, c) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

10.4 Integration rationaler Funktionen

Definition 10.4. *Eine Funktion* f *der Form* $x \mapsto f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *mit den Polynomen* p *und* q *heißt* rationale Funktion.
Falls der Grad von p *kleiner als der Grad von* q *ist, nennt man sie* echt rational.

Lemma 10.1. *Sei* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, *dann existiert eine Darstellung der Form* $f(x) = p(x) + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$ *und* $\frac{\tilde{p}}{q}$ *ist echt rational.*

Beweis:

Man erhält diese Darstellung durch Polynomdivision.

□

Satz 10.7 (Partialbruchzerlegung)**.** *Sei* $x \mapsto f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \in \mathbb{R}$ *eine* echt *rationale Funktion, und* q *besitzt die Zerlegung*

$$q(x) = l_1^{s_1}(x) \cdots l_r^{s_r}(x) \cdot q_1^{t_1}(x) \cdots q_k^{t_k}(x)$$

mit den **Linearfaktoren** $l_i(x) = x - \alpha_i, \alpha \in \mathbb{R}$*, und den quadratischen Funktionen* $q_i(x) = x^2 + a_i x + b_i$*, mit* $4b_i > a_i^2$*.*

Dann existieren in eindeutiger Weise reelle Zahlen $A_{i,\omega}, B_{i,\omega}, C_{i,\omega}$*, so dass gilt:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{A_{i_1}}{l_i(x)} + \frac{A_{i_2}}{(l_i(x))^2} + \cdots + \frac{A_{i_{s_i}}}{(l_i(x))^{s_i}} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{B_{i_1} + xC_{i_1}}{q_i(x)} + \cdots + \frac{B_{i_{t_i}} + xC_{i_{t_i}}}{(q_i(x))^{t_i}} \right). \end{aligned}$$

Jede echt rationale Funktion lässt sich also mit Hilfe der Partialbruchzerlegung als Summe echt rationaler Funktionen darstellen. Damit ist das Problem der Integration rationaler Funktionen auf die Bestimmung einer Summe von Integralen mit entweder linearen oder quadratischen Funktionen im Nenner zurückgeführt. Diese Integrale können alle bewältigt werden.

Beispiel 10.3. *Die auftretenden Integrale sind in der Regel von dem Typ*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^s} = \begin{cases} \log|x-\alpha| + c & \text{für } s = 1 \\ \frac{(x-\alpha)^{1-s}}{1-s} + c & \text{für } s > 1 \end{cases}$$

oder

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + c.$$

Beispiel 10.4. *Für Integrale der folgenden Form gilt*

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \beta}{(x^2 + ax + b)^s}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2(s-1)(x^2 + ax + b)^{s-1}} \\ &\quad + \left(\beta - \frac{a}{2}\right) \int \frac{x + \beta}{(x^2 + ax + b)^{s-1}}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Beispiel 10.5. *Ebenso gilt*

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + ax + b)^s} &= \frac{2x + a}{(s-1)(4b - a^2)(x^2 + ax + b)^{s-1}} \\ &\quad + \frac{2(2s-3)}{(s-1)(4b - a^2)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + ax + b)^{s-1}} \end{aligned}$$

Beispiel 10.6. *Ein kompliziertes Beispiel zur Partialbruchzerlegung.*
Sei $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x^4+3x^3+4x^2+8x+8}{x^5+3x^4+4x^3-4x-4}\mathrm{d}x$.
Zunächst stellen wir fest, dass der Nenner mit $x = 1$ *nur eine reelle Nullstelle besitzt. Wir können also schreiben* $q(x) = (x-1)(x^2+2x+2)^2$. *Die Anwendung von Satz 10.7 führt auf den Ansatz*

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1x + C_1}{x^2+2x+2} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Bringt man die Quotienten auf den Hauptnenner und multipliziert aus, so folgt

$$\begin{aligned} 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 8x + 8 \quad = \quad & (A + B_1)x^4 + (4A + B_1 + C_1)x^3 \\ & +(8A + C_1 + B_2)x^2 \\ & +(8A - 2B_1 - B_2 + C_2)x \\ & +(4A - 2C_1 - C_2). \end{aligned}$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{llllll} A & +B_1 & & & & = 2 \\ 4A & +B_1 & +B_2 & & & = 3 \\ 8A & & +B_2 & +C_1 & & = 4 \\ 8A & -2B_1 & -B_2 & & +C_2 & = 8 \\ 4A & & & -2C_1 & -C_2 & = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcr} A & = & 1 \\ B_1 & = & 1 \\ C_1 & = & -2 \\ B_2 & = & -2 \\ C_2 & = & 0 \end{array}$$

und damit folgt aus dem Ansatz

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{x-2}{x^2+2x+2} + \frac{-2x}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Alle auftretenden Integrale lassen sich geschlossen integrieren, wie wir oben gesehen haben.

Viele Integrale lassen sich durch eine Substitution auf die Integration rationaler Funktionen zurückführen.

10.5 Uneigentliche Integrale

Definition 10.5 (Uneigentliche Integrale)**.** *Ist* f *für jedes* $x > a$ *im Intervall* $[a, x]$ *integrierbar und existiert der Grenzwert*

$$I = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

so nennt man

$$I = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

uneigentliches Integral *von* f *über* $[a, \infty]$.

Analog werden die uneigentlichen Integrale über $[-\infty, a)$ sowie über den endlichen Intervallen $[a, b), (a, b], (a, b)$ definiert, falls der Integrand an den Intervallgrenzen nicht definiert ist.

Beispiel 10.7. *Sei* $\alpha > 1$, *dann ergibt sich*

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x &= \int_1^\infty x^{-\alpha}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\alpha}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}b^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = -\frac{1}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

10.6 Aufgaben

10.1. Ermitteln Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$!

10.2. Gegeben ist die Grenzkostenfunktion $K'(x) = 6x^2-10x+15$. Bei der Produktion von 10 Mengeneinheiten entstehen Kosten in Höhe von 2000 Geldeinheiten. Wie lautet die Gesamtkostenfunktion und die Durchschnittskostenfunktion?

10.3. Für die Produktion von $0 \le x \le 2000$ Einheiten einer Ware laute die Grenzkostenfunktion $K'(x) = 5 - 0.002x$. Bei der Produktion von 1000 Einheiten entstehen Kosten in Höhe von 5500 Geldeinheiten. Wie lautet die Gesamtkostenfunktion und die Durchschnittskostenfunktion? Berechnen Sie die Werte dieser Funktionen für $x = 1900$!

10.4. Integrieren Sie durch Substitution:

a) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\cos x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$!

10.5. Berechnen Sie folgende unbestimmten Integrale durch Substitution:

a) $\displaystyle\int (e^{-x}+e^{-2x})\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int (2\sin 3x + 3\cos 4x)\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \sqrt[7]{6x+5}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int \frac{(\ln x^3)^2}{x}\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\mathrm{d}x$, g) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+3}}\mathrm{d}x$,

h) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)\mathrm{d}x$, i) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$!

10.6. Berechnen Sie die Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{\cos x + 3}$ mit Hilfe der Substitution $t = \tan\dfrac{x}{2}$!

10.7. Ermitteln Sie das Integral $\displaystyle\int_0^3 xe^{3x}\,\mathrm{d}x$ durch partielle Integration!

10.8. Ermitteln Sie durch partielle Integration:

a) $\displaystyle\int x\sin x\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int x^2\cos x\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \arctan x\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln x\mathrm{d}x$!

10.9. Berechnen Sie $\int e^x\cos x\mathrm{d}x$, indem Sie das Integral zunächst durch partielle Integration auf $\int e^x \sin x\mathrm{d}x$ und letzteres Integral wieder auf $\int e^x\cos x\mathrm{d}x$ zurückführen!

10.10. Ermitteln Sie $\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x$ durch Rückführung auf Grundintegrale mittels partieller Integration mit $u = \sin^3 x,\ v' = \sin x$!
Hinweis: Nutzen Sie ggf. die Beziehung $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ und behandeln Sie $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ auf analoge Weise!

10.11. a) Wenden Sie auf das Integral $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ die Formel für die partielle Integration $\displaystyle\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$ mit $u = \dfrac{1}{(x^2+1)^n}$, $v=1$ an!

b) Stellen Sie $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ durch $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}}$ dar!

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$!

10.12. Berechnen Sie durch Partialbruchzerlegung:

a) $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x-2}{(x^2+1)(3x+1)}\,\mathrm{d}x$!

10.13. Berechnen Sie durch Partialbruchzerlegung:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^3-x^2-10x+19}{x^2+x-6}\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \frac{3x^2+7x+1}{x^3+2x^2+x}\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x^2+27x+12}{x^2+2x+10}\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \frac{x^4-5x^3+7x^2-13x-10}{x^3-5x^2}\mathrm{d}x$!

10.14. Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{3x}+5}$, b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$, c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{8-4\sin x+7\cos x}$, d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1-x)^2}$, f) $\displaystyle\int \sin 4x \sin 6x \mathrm{d}x$!

10.15. Berechnen Sie folgende bestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin x|\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos 3x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}\mathrm{d}x$!

10.16. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von $y=(x-1)(x-2)(x-3)$, $x=0$, $x=4$ und $y=0$ begrenzt wird!

10.17. Berechnen Sie den Inhalt der von den Kurven $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ und $y=-x^3+6x^2-8x$ begrenzten endlichen Fläche!

10.18. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$!

10.19. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale, wobei α eine beliebige reelle Zahl sei:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha}\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{\alpha}\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_2^{11} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}$, d) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, e) $\displaystyle\int_0^{\infty} 2xe^{-2x}\mathrm{d}x$!

10.20. Ermitteln Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{(x^2+2)^3}{x^3}\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{5}x\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{7}{x}\right)\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}^{x+1}+2^{-x}-\pi\right)\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$!

10.21. Integrieren Sie durch Substitution:

a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int (5\sin 4x-3\cos 2x)\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int \sqrt[5]{6x+7}\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x^2+4}x\,\mathrm{d}x$!

10.22. Ermitteln Sie durch partielle Integration:

a) $\int x e^{2x}\,\mathrm{d}x$, b) $\int \sin x \; x^2\,\mathrm{d}x$!

10.23. a) Berechnen Sie $\int\limits_{-2}^{2} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x$!

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von $y = x^3 - x$, $x = -2$, $x = 2$ und $y = 0$ begrenzt wird!

10.24. Ermitteln Sie folgende Integrale:

a) $\int\limits_{-1}^{3} |x-1|\,\mathrm{d}x$, b) $\int\limits_{0}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$, c) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin x|\,\mathrm{d}x$!

10.25. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

a) $\int\limits_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$, b) $\int\limits_{8}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$, c) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, d) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$, e) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$!

10.26. Die Herstellungskosten für ein Produkt werden für die 12 Monate eines Jahres mit $K_m = 100\left(10 + m + 2m\mathrm{e}^{-m/12}\right)$, $m = 1, 2, \ldots, 12$ prognostiziert. Durch Addition erhält man als Jahressumme $\sum\limits_{m=1}^{12} K_m = 27834.94$.

a) Die Kostenprognose für das Jahr soll mit Hilfe des Integrals $\int\limits_{0}^{12} K(t)\mathrm{d}t$ erfolgen, wobei $K(t) = 100\left(10 + t + 2t\mathrm{e}^{-t/12}\right)$ ist. Berechnen Sie dieses Integral!

b) Stellen Sie das Integral und die Summe als Flächen dar!

c) Warum wird bei der Prognose mit dem Integral die Jahressumme unterschätzt? Wie könnte für die gegebene Funktion die Jahressumme besser mit einem Integral prognostiziert werden?

10.27. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

a) $\int \left(6\sin(4-3x) + 3\mathrm{e}^{-2x} + 5\right)\,\mathrm{d}x$, b) $\int \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x} + x^8}\,(\mathrm{e}^{2x} + 4x^7)\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{1}{x^2+49}\,\mathrm{d}x$, d) $\int \frac{1}{x^2+2x+50}\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \mathrm{e}^x \cos 3x\,\mathrm{d}x$!

10.28. Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

a) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, b) $\int\limits_{-4}^{7} x|x|\,\mathrm{d}x$, c) $\int\limits_{2}^{4\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}\,\mathrm{d}x$!

10.29. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale, sofern diese existieren:

a) $\int\limits_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x$, b) $\int\limits_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x$, c) $\int\limits_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$, d) $\int\limits_{-\infty}^2 \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$, e) $\int\limits_{-\infty}^0 x\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$!

10.30. Ermitteln Sie den Inhalt der von $y = \sin(2x+\pi)$, der x–Achse zwischen 0 und $\frac{9}{8}\pi$ sowie $x = \frac{9}{8}\pi$ begrenzten Fläche!

10.31. Welchen Wert hat das Integral $\int\limits_{-1}^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$?

Kapitel 11
Kurven im Raum, Kurvenintegrale

11.1 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 11.1 (Kurve). *Sei $\boldsymbol{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $t \to \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ eine in jeder Komponente stetig differenzierbare Funktion; $\boldsymbol{x} \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Dann wird durch die Menge*

$$K := \{\boldsymbol{x}(t) : t \in [a,b]\}$$

eine Kurve bzw. ein Kurvenstück im $\mathbb{R}^n$ definiert.

Definition 11.2 (Geschlossene Kurve). *Eine Kurve heißt* geschlossen, *falls $\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}(b)$ gilt.*

Definition 11.3 (Doppelpunktfreie Kurve). *Eine Kurve heißt* doppelpunktfrei, *falls $\boldsymbol{x}(t_1) \neq \boldsymbol{x}(t_2)$ für alle $t_1 \neq t_2 \in [a,b]$ ist.*

Man nennt $t \to \boldsymbol{x}(t)$ eine **Parameterdarstellung** der Kurve K.

Bemerkung 11.1. *Sei $s \to t(s), t : [a,b] \to [a,b]$ eine beliebige, stetig differenzierbare Abbildung, dann liefert $s \to \boldsymbol{x}(t(s)) = \boldsymbol{y}(s)$ eine weitere Parameterdarstellung von K.*

Beispiel 11.1. *Parameterdarstellung eines Kreises und eines Halbkreis.*

Sei $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ mit $x(t) = \cos(t)$ und $y(t) = \sin(t)$. Für $t = [0,2\pi)$ erhält man den Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$, für $t = [0,\pi]$ den oberen Halbkreis.

Setzt man nun $s = \cos(t)$*, so erhält man mit*

$$\boldsymbol{x}(s) = \begin{pmatrix} s \\ \sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}, \qquad s \in [-1,1]$$

eine weitere Parametrisierung des Halbkreises. Vertauscht man die Intervallgrenzen, so entspricht das der Umkehrung der Orientierung.

Beispiel 11.2. *Eine Schraubenlinie im* $\mathbb{R}^3$ *erhält man z.B. mit*

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{(s. Abb. in Bsp. 11.5).}$$

Definition 11.4 (Reguläre Parametrisierung)**.** *Sei* $\boldsymbol{x} \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$*, dann heißt* K regulär *bezüglich* $\boldsymbol{x}$ *parametrisiert, falls* $|\dot{\boldsymbol{x}}(t)| = |\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)| \neq 0$ *für alle* $t \in [a,b]$ *ist.*

Satz 11.1 (Tangente, Bogenlänge)**.** *Sei* $I = [a,b]$ *und* $\boldsymbol{x} \in C^1(I,\mathbb{R})$ *eine reguläre Parametrisierung von* $K = \{\boldsymbol{x}(t) : t \in I\}$*.*

Für $t_0 \in I$ *ist die Gerade* $\tau = \{\boldsymbol{p}(t) := \boldsymbol{x}(t_0) + \dot{\boldsymbol{x}}(t_0)(t-t_0), \quad t \in \mathbb{R}\}$ *mit dem Tangentenvektor* $\dot{\boldsymbol{x}}(t_0) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}\Big|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t_0) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t_0) \end{pmatrix}$ *die Tangente an* K *im Punkt* $\boldsymbol{x}(t_0)$*.*

Ferner ist $s(t) = \int\limits_a^t |\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)|\, d\tau$ *die* **Bogenlänge** *der Kurve vom Anfangspunkt* $\boldsymbol{x}(a)$ *bis zum Punkt* $\boldsymbol{x}(t)$*.*

Beweis:

Die Gerade durch $\boldsymbol{x}(t_1)$ und $\boldsymbol{x}(t_0)$ ist gegeben durch

$$\boldsymbol{p}_{t_1}(t) = \boldsymbol{x}(t_0) + \frac{(\boldsymbol{x}(t_1) - \boldsymbol{x}(t_0))}{(t_1 - t_0)}(t - t_0)$$

Bildet man den Grenzwert $t_1 \to t_0$, dann ergibt sich die 1. Aussage.

□

Beispiel 11.3. *Wir betrachten wieder die Parametrisierung eines Kreises, mit* $x(t) = \cos t$ *und* $y(t) = \sin t$ *für* $t = [0, 2\pi)$*. Dann erhalten wir für die Bogenlänge*

$$s = \int\limits_0^t \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau)}\,d\tau = \int\limits_0^t \sqrt{(-\sin\tau)^2 + (\cos\tau)^2}\,d\tau = \int\limits_0^t d\tau = t$$

Im Falle $t = 2\pi$ *erhalten wir mit* $s = 2\pi$ *den Kreisumfang.*

Es gilt $\dot{s}(t) = \dfrac{d}{dt}s(t) = |\dot{\boldsymbol{x}}(t)|$.

11.2 Begleitendes Dreibein und Krümmung

Wir betrachten nun speziell Kurven im $\mathbb{R}^3$.

Definition 11.5. *Sei* $|\dot{\boldsymbol{x}}(t)| \neq 0$.

$$\begin{aligned}
&\textit{Dann heißt} \quad \boldsymbol{T}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{x}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{x}}(t)|} = \frac{1}{\dot{s}(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(t) && \textbf{Tangentenvektor}\\
&\textit{und} \quad \boldsymbol{N}(t) = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{T}}(t)|}\dot{\boldsymbol{T}}(t) && \textbf{Hauptnormalenvektor}\\
&\textit{sowie} \quad \boldsymbol{B}(t) := \boldsymbol{T}(t) \times \boldsymbol{N}(t) && \textbf{Binormalenvektor}
\end{aligned}$$

Die drei Vektoren $(\boldsymbol{T}(t), \boldsymbol{N}(t), \boldsymbol{B}(t))$ bilden das **begleitende Dreibein** (s. Folie Abb. 20.7 und Abb. in Bsp. 11.5) der Kurve K an der Parameterstelle $t \in I$.

Das begleitende Dreibein spannt 3 Ebenen auf: Die **Schmiegebene** ist die Grenzlage der Ebenen, die durch den Kurvenpunkt $\boldsymbol{x}(t)$ und zwei benachbarte Kurvenpunkte $\boldsymbol{x}(t_1)$ und $\boldsymbol{x}(t_2)$ gehen, bei $t_1 \to t$ und $t_2 \to t$. Sie wird von $\boldsymbol{T}(t)$ und $\boldsymbol{N}(t)$ aufgespannt, ihr Stellungsvektor ist $\boldsymbol{B}(t)$. Die **Normalebene** wird von $\boldsymbol{N}(t)$ und $\boldsymbol{B}(t)$ aufgespannt, ihr Stellungsvektor ist $\boldsymbol{T}(t)$. Die **rektifizierende Ebene** wird von $\boldsymbol{B}(t)$ und $\boldsymbol{T}(t)$ aufgespannt, ihr Stellungsvektor ist $\boldsymbol{N}(t)$.

Die Änderungsrate $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\boldsymbol{T}(t) - \boldsymbol{T}(t_0)}{s(t) - s(t_0)} = \dfrac{\dot{\boldsymbol{T}}(t_0)}{\dot{s}(t_0)}$ liefert wegen dem Satz von l'Hospital die **Krümmung**

$$\mathcal{H}(t_0) = \left|\frac{\dot{\boldsymbol{T}}(t_0)}{\dot{s}(t_0)}\right| = \frac{\left|\dot{\boldsymbol{T}}(t_0)\right|}{\left|\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)\right|}$$

(s. Abb. in Bsp. 11.5).

Gemäß Definition ist

$$\begin{aligned}
& & \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \dot{s}(t)\boldsymbol{T}(t).\\
&\text{und} & \ddot{\boldsymbol{x}}(t) &= \ddot{s}(t)\boldsymbol{T}(t) + \dot{s}(t)\dot{\boldsymbol{T}}(t)\\
& & &= \ddot{s}(t)\boldsymbol{T}(t) + \dot{s}^2(t)\mathcal{H}(t)\frac{\dot{\boldsymbol{T}}(t)}{\left|\dot{\boldsymbol{T}}(t_0)\right|}\\
& & &= \ddot{s}(t)\boldsymbol{T}(t) + \dot{s}^2(t)\mathcal{H}(t)\dot{\boldsymbol{N}}(t).
\end{aligned}$$

Somit gilt für den Binormalenvektor

$$|\dot{\boldsymbol{x}} \times \ddot{\boldsymbol{x}}| = \dot{s}\ddot{s}\boldsymbol{T} \times \dot{\boldsymbol{T}} + \dot{s}^3\mathcal{H}\dot{\boldsymbol{T}} \times \boldsymbol{N} = \left|\dot{s}^3\mathcal{H}\boldsymbol{B}\right| = \dot{s}^3\mathcal{H}$$

und daraus folgt

$$\mathcal{H} = \frac{|\dot{\boldsymbol{x}} \times \ddot{\boldsymbol{x}}|}{|\dot{\boldsymbol{x}}|^3}.$$

Die Grenzlage der Kreise, die durch den Kurvenpunkt $\boldsymbol{x}(t)$ und zwei benachbarte Kurvenpunkte $\boldsymbol{x}(t_1)$ und $\boldsymbol{x}(t_2)$ gehen, bei $t_1 \to t$ und $t_2 \to t$ heißt **Krümmungskreis**. Der Krümmungskreis liegt in der Schmiegebene, sein Radius ist das Reziproke des Betrages der Krümmung und heißt **Krümmungsradius** (s. Abb. in Bsp. 11.5).

Definition 11.6 (Natürliche Parametrisierung). *Durch die Wahl der Bogenlänge s als Parameter ist eine Parametrisierung ausgezeichnet. Man nennt diese* **natürliche Parametrisierung**. *Hierbei gilt*

$$\boldsymbol{T}(s) = \dot{\boldsymbol{x}}(s), \quad |\dot{\boldsymbol{x}}(s)| = 1 \quad \textit{und} \quad \mathcal{H}(s) = |\ddot{\boldsymbol{x}}(s)| \quad \textit{sowie} \quad \dot{\boldsymbol{T}}(s) = \mathcal{H}(s)\boldsymbol{N}(s).$$

Beispiel 11.4. *Gegeben sei ein Kreis: $x(s) = \cos s, y(s) = \sin s$ in natürlicher Parametrisierung. Dann erhalten wir für den Krümmungsvektor*

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(s) = \begin{pmatrix} -\cos s \\ -\sin s \end{pmatrix}.$$

Somit ist

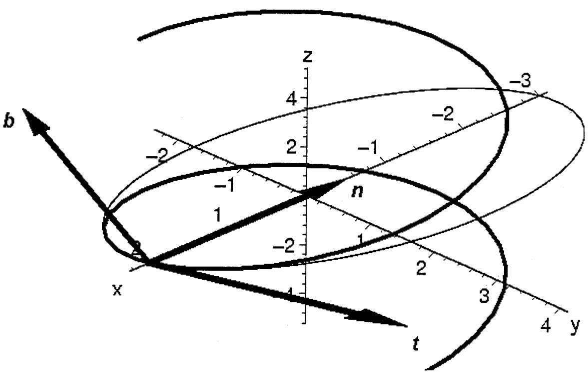
$$\mathcal{H}(s) = |\ddot{\boldsymbol{x}}(s)| = \sqrt{\cos^2 s + \sin^2 s} = 1.$$

Das bedeutet, dass die Krümmung konstant ist.

Beispiel 11.5 (Schraubenlinie).

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{pmatrix}$$

Für $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:



In der Abbildung sind nicht normierte Vektoren dargestellt, die mit den entsprechenden Kleinbuchstaben bezeichnet sind.

Tangenteneinheitsvektor $\boldsymbol{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hauptnormaleneinheitsvektor $\boldsymbol{N}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Binormaleneinheitsvektor $\boldsymbol{B}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schmiegebene $-y + 2z = 0$

Krümmungsradius $\frac{5}{2}$, *–mittelpunkt* $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Krümmungskreis $\boldsymbol{X}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1/2 + 5/2 \cos\varphi \\ \sqrt{5}\sin\varphi \\ \sqrt{5}/2 \sin\varphi \end{pmatrix}$

(Kreis mit Radius $5/2$ *in der Ebene* $-y + 2z = 0$*)*

11.3 Kurvenintegral

Definition 11.7 (Eindimensionales Kurvenintegral)**.** *Sei* $f : K \to \mathbb{R}$ *und* $f \circ \boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}, f \circ \boldsymbol{x}(t) = f(\boldsymbol{x}(t))$*, stetig, dann heißt*

$$\int_a^b f(\boldsymbol{x}(t))|\boldsymbol{x}(t)|dt = \int_K f(\boldsymbol{x})ds$$

das Kurvenintegral von f *längs* K*.*

Mit dem Kurvenintegral kann z.B. der **Schwerpunkt** eines Kurvenstücks berechnet werden.

Definition 11.8 (Mehrdimensionales Kurvenintegral)**.** *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n, K \subset D, I = [a, b], \boldsymbol{x} : I \to K$ *und* $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^n$*, dann heißt*

$$\int_K < \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x} > := \int_a^b < \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)), \dot{\boldsymbol{x}}(t) > dt$$

das Kurvenintegral von $\boldsymbol{v}$ *längs* $\boldsymbol{x}$*.*

11.4 Von Kurven eingeschlossene Flächen

Definition 11.9 (Fläche)**.** *Seien* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Die Inhalt der Fläche* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : f(x) \le y \le g(x), x \in [a, b]\}$ *beträgt* $F = \int\limits_a^b |g(x) - f(x)| dx$*.*

Definition 11.10 (Sektorfläche)**.** *Sei* $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, t \in [a, b]$ *die Parameterdarstellung eines Kurvenstücks* K*, wobei* $\tau \boldsymbol{x}(t) \notin K \quad \forall t \in [a, b], \;\; \tau \in [0, 1)$ *gelten, d.h. die Strecke vom Koordinatenursprung zu jedem Kurvenpunkt die Kurve nicht schneiden soll. Dann ist die* **Sektorfläche** E *definiert durch*

$$E = \bigcup_{t \in [a,b]} \{\tau \boldsymbol{x}(t), \tau \in [0, 1]\}.$$

Satz 11.2 (Sektorformel)**.** *Sei* $\boldsymbol{x} \in C^1([a, b], \mathbb{R}^2)$*, dann gilt für den Flächeninhalt* A *der Sektorfläche* E

$$A = \frac{1}{2} \left| \int\limits_0^b (x_1(t)\dot{x_2}(t) - x_2(t)\dot{x_1}(t))\, dt \right|.$$

11.5 Aufgaben

11.1. Berechnen Sie die Bogenlängen folgender Kurven:

a) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (Astroide, Parameterdarstellung: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$),

b) $y = \sqrt{x^3}, \quad 0 \le x \le \dfrac{4}{3}$,

c) $x = t,\ y = t^2,\ z = \dfrac{2}{3}t^3, \quad 0 \le t \le 3$!

11.2. Berechnen Sie die Länge von

a) $y = 1 - \ln\cos x$ im Intervall $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$, b) $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \cos t \\ \mathrm{e}^t \sin t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le 2$!

11.3. Geben Sie eine Parameterdarstellung des Kreises mit dem Radius 2 um den Punkt $(1, 2)$ in der x–y–Ebene an, bestimmen Sie sein begleitendes Dreibein (Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalen-Einheitsvektor), ermitteln Sie seine Krümmung und den Krümmungsradius!

11.4. Ermitteln Sie für $t = 1$ die Gleichungen der Tangente sowie der Normal- und der Schmiegeebene an die Kurve $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$!

11.5. Bestimmen Sie ausgehend von einer Parameterdarstellung der Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ den Krümmungsradius in ihren Scheitelpunkten!

11.6. Zeigen Sie, dass in einem beliebigen Punkt der Astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ der Krümmungsradius gleich $3\sqrt[3]{a|xy|}$ ist!

Hinweis: Parameterdarstellung der Astroide: $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ z=0$

11.7. Geben Sie eine natürliche Parametrisierung des Kreises an, der beim Schnitt der Einheitskugel des dreidimensionalen Raumes mit der Ebene $y=x$ entsteht und bestimmen Sie sein begleitendes Dreibein!

11.8. a) Ermitteln Sie die Schnittkurven der Fläche $z^2=x^2+y^2$ mit den Koordinatenebenen und skizzieren Sie die Fläche grob! Um was für eine Fläche handelt es sich?

b) Zeigen Sie, dass die Gleichungen $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t$ eine konische Schraubenlinie bestimmen!

c) Ermitteln Sie das begleitende Dreibein und den Krümmungsradius im Koordinatenursprung!

11.9. Gegeben sei die Kurve $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} t-\sin t \\ 1-\cos t \\ 0 \end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$

a) Diskutieren Sie den Verlauf der Kurve und skizzieren Sie sie!

Hinweis: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}},\quad \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$

Im Folgenden soll nur der Abschnitt der Kurve von $t=0$ bis $t=2\pi$ betrachtet werden:

b) Bestimmen Sie das begleitende Dreibein!

Hinweis: $1-\cos t=2\sin^2\dfrac{t}{2},\quad \sin t=2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}$

c) Bestimmen Sie den Krümmungsradius!

d) Ermitteln Sie die Länge des Kurvenabschnitts!

e) Ermitteln Sie den Inhalt der von dem Kurvenabschnitt und der x–Achse begrenzten Fläche!

11.10. $y=y(x)$ sei eine Kurve in der Ebene mit der Parameterdarstellung $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Leiten Sie aus der Formel $\kappa=\dfrac{|\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}}|}{|\dot{\mathbf{x}}|^3}$ für die Krümmung die Formel

$\kappa=\dfrac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ her!

11.11. Gegeben sei die Kurve $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin t \\ 2-\sqrt{2}\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$.

a) Ermitteln Sie das begleitende Dreibein im Punkt $\boldsymbol{x}(t)$!
b) Ermitteln Sie für den Punkt $\boldsymbol{x}(t)$ die Schmiegebene, die Krümmung, den Krümmungsradius und den Krümmungsmittelpunkt!
c) Um was für eine Kurve handelt es sich bei $\boldsymbol{x}(t)$?

11.12. Gegeben sei die Kurve $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 6t^2 \\ 24t \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie

a) die Länge des Kurvenstücks zwischen dem Koordinatenursprung und $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$,
b) die Tangente an die Kurve im Koordinatenursprung (Was ist das für eine Gerade?),
c) die Schmiegebene der Kurve im Koordinatenursprung und
d) den Krümmungskreis der Kurve im Koordinatenursprung!

11.13. Sei K der Geradenabschnitt von $(0,0)$ nach $(1,2)$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int\limits_K \sqrt{8x^2+3y^2}\,\mathrm{d}s$!

11.14. Der Einheitskreis $x^2+y^2=1$ sei mit Masse der Dichte $\varrho(x,y)=1+y^2$ belegt. Berechnen Sie die Masse des Kreises!

Kapitel 12
Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

12.1 Funktionen

Sei $D_f \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D_f \mapsto \mathbb{R}^m$ mit $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$ eine **vektorwertige Funktion**. Eine solche Funktion nennt man im Falle $m=1$ eine skalarwertige Funktion und anderenfalls eine vektorwertige Funktion in n Variablen $x_1,\ldots,x_n$ mit $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)^T \in D_f$. Für $n=2$ schreibt man oft (x,y) statt (x_1,x_2) und für $n=3$ oft (x,y,z) anstatt (x_1,x_2,x_3).

Definition 12.1. *Der* **Graph einer Funktion** *ist definiert durch die Menge*

$$\mathit{Graph}(f) := \left\{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))^T \in \mathbb{R}^{n+m} : \boldsymbol{x} \in D_f\right\}.$$

Definition 12.2. *Im Falle* $m=1$ *sind die* **Höhenlinien** *bzw.* **Niveaulinien** *zum Niveau* $h \in \mathbb{R}$ *definiert durch* $\Gamma_h(f) = \{\boldsymbol{x} \in D_f : f(\boldsymbol{x}) = h\}$.

Definition 12.3. *Eine n-dimensionale* **Kugel** *mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $K_r(\boldsymbol{c}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}|| \leq r\}$.*

Ist $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ und $r = 1$, so spricht man von der **Einheitskugel** im $\mathbb{R}^n$. Es gilt hierfür $(||\boldsymbol{x}||^2 := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1)$.

Definition 12.4. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **offen***, falls es zu jedem Punkt $\boldsymbol{x} \in M$ eine Kugel $K_r(\boldsymbol{x})$ gibt mit $K_r(\boldsymbol{x}) \subset M$.*

Definition 12.5. *Eine Menge M heißt* **abgeschlossen***, falls ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen ist.*

Definition 12.6. *Eine Menge M heißt* **beschränkt***, falls es eine Kugel $K_r(\boldsymbol{0})$ gibt mit $M \subset K_r(\boldsymbol{0})$.*

12.2 Folgen und Grenzwerte

Definition 12.7. *Sei $(\boldsymbol{x}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge (von Vektoren) im $\mathbb{R}^n$. Diese Folge* **konvergiert gegen** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $m_0 = m_0(\varepsilon)$ existiert, so daß $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(m)}|| < \varepsilon$ für alle $m > m_0$ gilt.*

Schreibweise: $\boldsymbol{x} = \lim\limits_{m\to\infty} \boldsymbol{x}^{(m)}$ oder $\boldsymbol{x}^{(m)} \to \boldsymbol{x}$ für $m \to \infty$.

In diesem Fall heißt die Folge $(\boldsymbol{x}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ **konvergent**.

Definition 12.8. *Eine nicht konvergente Folge heißt* **divergent***.*

Satz 12.1. *Sei $(\boldsymbol{x}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}, \boldsymbol{x}^{(m)} = ((x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})^T)_{m\in\mathbb{N}^n}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt $\lim\limits_{m\to\infty} \boldsymbol{x}^{(m)} = \boldsymbol{x}$, genau dann wenn für alle Indizes $1 \leq j \leq n$*

$$\lim_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j$$

gilt.

Satz 12.2. *Seien $(\boldsymbol{x}^{(m)})$, $(\boldsymbol{y}^{(m)}) \subset \mathbb{R}^n$, mit $m \in \mathbb{N}$, konvergente Folgen wobei $\boldsymbol{x} = \lim\limits_{m\to\infty} \boldsymbol{x}^{(m)}$ und $\boldsymbol{y} = \lim\limits_{m\to\infty} \boldsymbol{y}^{(m)}$ ist. Dann gilt:*

1. $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda\boldsymbol{x}^{(m)} = \lambda\boldsymbol{x}$
2. $\lim\limits_{m\to\infty} (\boldsymbol{x}^{(m)} + \boldsymbol{y}^{(m)}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$
3. $\lim\limits_{m\to\infty} (\boldsymbol{x}^{(m)} \cdot \boldsymbol{y}^{(m)}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$

4. *Ist $y_j \neq 0$ für alle $1 \leq j \leq n$, dann existiert ein m_0, so dass $y_j^{(m)} \neq 0$ für alle $1 \leq j \leq n$ und $m \geq m_0$ sind. Und für $m \geq m_0$ gilt*

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{x_1^{(m)}}{y_1^{(m)}}, \ldots, \frac{x_n^{(m)}}{y_n^{(m)}} \right)^T = \left(\frac{x_1}{y_1}, \ldots, \frac{x_n}{y_n} \right)^T.$$

12.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Es seien $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, und $f : D_f \to \mathbb{R}$.

Definition 12.9. *Die Funktion f* **konvergiert für** $\boldsymbol{x}$ *gegen* $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$*, falls für jede Folge $(\boldsymbol{x}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$, $\boldsymbol{x}^{(m)} \in D_f$ mit $\boldsymbol{x}^{(m)} \neq \boldsymbol{x}^{(0)}$* **und** $\boldsymbol{x}^{(m)} \to \boldsymbol{x}^{(0)}$ *die Beziehung $\lim\limits_{m\to\infty} f(\boldsymbol{x}^{(m)}) = \boldsymbol{a} =: \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^{(0)}} f(\boldsymbol{x})$ gilt.*

Definition 12.10 (Stetigkeit)**.** *Die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt* **stetig** *in $\boldsymbol{x}^{(0)} \in D_f$, falls $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^{(0)}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^{(0)})$ gilt. f heißt stetig mit $M \subset D_f$ falls f für alle $\boldsymbol{x}^{(0)} \in M$ stetig ist.*

Beispiel 12.1. (Parabelfalte)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Für jede Folge $\boldsymbol{x}^{(m)} = (x^{(m)}, y^{(m)})$ mit $y^{(m)} = x^{(m)} \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{m\to\infty} \boldsymbol{x}^{(m)} = 0$ gilt $\lim\limits_{m\to\infty} f(\boldsymbol{x}^{(m)}) = \mathbf{0}$. Andererseits ist für $\boldsymbol{x}^{(m)} = (\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m})$, $\lim\limits_{m\to\infty} \boldsymbol{x}^{(m)} = (0,0) = \mathbf{0}$, aber $\lim\limits_{m\to\infty} f(\boldsymbol{x}) = 1$.

Das heißt der Funktionsgrenzwert existiert **nicht!**

Die Funktion f ist also auch nicht stetig, obwohl für jedes fixierte $y_0 \in \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{2xy_0^2}{x^2+y_0^4}, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

eine stetige Funktion in $\mathbb{R}$ ist.

Satz 12.3. *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{x}^{(0)} \in D$. Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $\boldsymbol{x}^{(0)}$ stetige Funktionen, so sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und falls $g(\boldsymbol{x}^0) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ stetige Funktionen.*

Satz 12.4 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt (d.h. M ist kompakt). Jede auf M stetige Funktion f nimmt auf M ihr Maximum und ihr Minimum an, das heißt es existiert $\boldsymbol{x}_{\mathbf{max}} \in M$ und $\boldsymbol{x}_{\mathbf{min}} \in M$ mit*

$$f(\boldsymbol{x}_{\mathbf{min}}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_{\mathbf{max}}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in M.$$

12.4 Differenzierbarkeit

Definition 12.11 (Differenzierbarkeit). *Sei $D \subset D_f \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $\boldsymbol{x}^{(0)} \in D$, so heißt $f : D_f \to \mathbb{R}^m$* differenzierbar an der Stelle $\boldsymbol{x}^{(0)}$, *falls eine $m \times n$ Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert, so dass*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^{(0)}} \left(||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(0)}||\right)^{-1} \left(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^{(0)}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(0)})\right) = 0.$$

Kurz: $f'(x^{(0)}) = \boldsymbol{A}$. Dies nennt man die **Fréchet–Ableitung** *oder auch* **totale Ableitung**. *Für $f : D_f \to \mathbb{R}$ ist $f'(x_0)$ ein Zeilenvektor.*

Definition 12.12 (Partielle Differenzierbarkeit). *Sei $D \subset \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a} \in D_f$ gegeben.*

Die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt partiell differenzierbar *in $\boldsymbol{a}$ nach der Variablen x_j, falls*

$$x \to f\left((a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n)^T\right) = \tilde{f}(x) \text{an der Stelle } x = a_j$$

differenzierbar ist.

$f_{x_j}(\boldsymbol{a}) := \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) =: \tilde{f}'(a_j)$ wird **partielle Ableitung** von f an der Stelle $\boldsymbol{a}$ genannt. Entsprechend werden höhere partielle Ableitungen definiert. Beim partiellen Differenzieren wird nur nach der entsprechenden Variablen (hier x_j) differenziert, die anderen Variablen werden vorübergehend wie Konstanten behandelt.

Bemerkung 12.1. *Unten in Bemerkung 12.3 wird deutlich, dass der Ausdruck $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ im Gegensatz zum „gewöhnlichen“ Differntialquotienten $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$* **nicht** *als Bruch verstanden werden darf. In der Schreibweise ist deshalb sorgfältig zwischen gewöhnlichen Ableitungen $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ und partiellen Ableitungen $f_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ zu unterscheiden!*

Beispiel 12.2. *Betrachten wir die Funktion*

$$f(x, y) = x^2y^3 + e^{2x+y},$$

dann erhalten wir für die partielle Ableitung nach x und y

$$f_x = 2xy^3 + 2e^{2x+y}, \quad f_y = 3(xy)^2e^{2x+y}$$

Satz 12.5. *Sei $D \subset D_f \subset \mathbb{R}^n$ offen, sowie $\boldsymbol{x}^{(0)} \in D, f : D_f \to \mathbb{R}^m$*

i.) Falls f an der Stelle $\boldsymbol{x}^{(0)}$ differenzierbar ist mit der totalen Ableitung $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dann ist f in $\boldsymbol{x}^{(0)}$ stetig und nach allen Variablen x_j partiell differenzierbar. Die Matrix $J_f(x_0) = \boldsymbol{A} = f'(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n}$ heißt **Funktional-** *oder* **Jakobimatrix**.

ii.) Ist f im Punkt $\boldsymbol{x}^{(0)}$ stetig partiell differenzierbar, d.h. sind alle Funktionen $x \to \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, \boldsymbol{x}, \ldots, x_n)$ in x_j^0 stetig, dann ist f an der Stelle $\boldsymbol{x}^0$ differenzierbar mit der totalen Ableitung $\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n}$ (Jakobi–Matrix).

Wir schreiben $f \in C^k(D)$ falls f in D k–mal stetig partiell differenzierbar ist.

Satz 12.6 (Schwarz)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(D)$, wobei D offen, dann gilt für $\boldsymbol{x} \in D$*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \qquad \textit{bzw.} \qquad f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}) = f_{x_j x_i}(\boldsymbol{x}).$$

Für „gutartige“ Funktionen sind also die gemischten zweiten Ableitungen gleich.

Beweis:

Sei $n = 2, (x_0, y_0) \in D, t \in \mathbb{R}$ so klein, daß das Quadrat Q mit den Eckpunkten (x_0, y_0), $(x_0 + t, y_0)$, $(x_0, y_0 + t)$ und $(x_0 + t, y_0 + t)$ ganz in D enthalten sind.

Definieren wir die Funktion g als

$$g(x) = f(x, y_0 + t) - f(x, y_0).$$

Dann gilt für die Ableitung

$$g'(x) = f_x(x, y_0 + t) - f_x(x, y_0).$$

Definiert man weiter

$$h(t) := f(x_0 + t, y_0 + t) + f(x_0, y_0) - f(x_0 + t_0, y_0) - f(x_0, y_0 + t),$$

so gilt

$$\begin{aligned} h(t) &= g(x_0 + t) - g(x_0) \\ &= g'(\xi_1)t \\ &= (f_x(\xi_1, y_0 + t) - f_x(\xi_1, y_0))\, t \\ &= f_{x,y}(\xi_1, \eta_1)t^2 \end{aligned}$$

Definieren wir $\tilde{g}(y) = f(x_0 + t, y) - f(x_0, y)$, dann gilt

$$\begin{aligned} h(t) &= \tilde{g}(y_0 + t) - \tilde{g}(y_0) \\ &= \tilde{g}'(\eta_2)t \\ &= (f_y(x_0 + t, \eta_2) - f_y(x_0, \eta_2))\, t \\ &= f_{yx}(\xi_2, \eta_2)t^2 \end{aligned}$$

und damit

$$f_{x,y}(\xi_1,\eta_1) = f_{yx}(\xi_2,\eta_2).$$

Auf Grund der Stetigkeit folgt beim Grenzübergang $t \to 0$, daß $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$ ist.

□

Definition 12.13. *Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine skalarwertige Funktion. Der Vektor der partiellen Ableitungen* $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = (f'(\boldsymbol{x}))^T$ *heißt* **Gradient** *der Funktion f der Stelle $\boldsymbol{x} \in D_f$. Für* $\operatorname{grad} f$ *schreibt man auch ∇f.*

Bemerkung 12.2. *Für den Gradienten sind folgende Eigenschaften hervorzuheben:*

1. *Sei $n = 2$ dann zeigt der* Gradient $\operatorname{grad} f$ *in Richtung des steilsten Anstieges.*
2. *Der Gradient steht senkrecht auf den Niveaulinien (Höhenlinien).*
3. *Die Ebene*
$$\mathbf{E} = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 : y(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^0) + \left(f'(\boldsymbol{x}^0)\right)^T \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0), \boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
ist die Tangentialebene *von f an der Stelle $\boldsymbol{x}^0 \in D$.*
4. *Sei $f \in C^1(D), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, ||\boldsymbol{a}|| = 1$, dann heißt $\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a})\big|_{t=0} =: \partial_a f(\boldsymbol{x})$ die Richtungsableitung im Punkt $\boldsymbol{x}$ in Richtung $\boldsymbol{a}$. Für $f \in C^1(D)$ gilt*
$\partial_a f(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{a} = (\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}))^T \boldsymbol{a} = f'(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{a}$.

In der letzten Formel ist die Multiplikation einmal als Skalarprodukt (mit $\cdot$ gekennzeichnet, Gradient als Spaltenvektor) und einmal als Matrixmultiplikation (Gradient transponiert als Zeilenvektor) zu verstehen.

Satz 12.7 (Kettenregel)**.** *Sei $D \subset D_f \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}, f \in C^1(D)$, $\boldsymbol{g} : [a,b] \to D$, $\boldsymbol{g} \in C^1([a,b])$, dann gilt:*

$$\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{g}(t)) = (\operatorname{grad} f(\boldsymbol{g}(t)))^T \frac{d\boldsymbol{g}}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial g_i}(\boldsymbol{g}(t)) \frac{dg_i}{dt}(t) = f'(\boldsymbol{g}(t)) \frac{d\boldsymbol{g}}{dt}(t).$$

Bemerkung 12.3. *An dieser Stelle wird deutlich, dass mit „partiellen Differentialen" im Gegensatz zu den „gewöhnlichen" Differentialen aus Definition 9.6* **nicht** *wie mit Zahlen gerechnet werden kann. Sonst würde sich nämlich ∂g_i herauskürzen und $\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{g}(t)) = n \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{g}(t))$ folgen. Das ist aber nur für $n = 1$, d.h. den Fall der gewöhnlichen Ableitung, richtig.*

Für $\boldsymbol{f} \in D_f \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{g} : D_g \to D_f$ gilt der analoge Schluß:

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}), \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial g_j}\frac{\partial g_j}{\partial x_k}.$$

Beispiel 12.3. *Betrachten wir die Funktion*

$$f(x(t), y(t)) = e^{x+y},$$

mit $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$. *Definieren wir die Funktion*

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

und

$$h(t) = f(g(t)) = e^{\cos t + \sin t},$$

so folgt für die Ableitung

$$h'(t) = \begin{pmatrix} e^{\cos t + \sin t} \\ e^{\cos t + \sin t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = e^{\cos t + \sin t}(-\sin t + \cos t).$$

12.5 Satz von *Taylor*

Definition 12.14. *Eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **konvex**, *falls, für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$ und $t \in [0,1]$, $t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \in D$ ist.*

Satz 12.8 (Taylor)**.** *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : D \to \mathbb{R}$ und $f \in C^1(D)$. Dann gilt für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \in D$:*

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}) + \partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) + \ldots + \frac{1}{k!}\partial_{\boldsymbol{v}}^k f(\boldsymbol{x}) + R_k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v})$$

mit dem Restglied

$$R_k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}) = \frac{1}{(k+1)!}\partial_{\boldsymbol{v}}^{(k+1)} f(\boldsymbol{x}+\xi\boldsymbol{v})$$

mit geeignetem $\xi \in [0,1]$ und der Richtungsableitung $\partial_{\boldsymbol{v}} = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Alternativ kann für das Restglied auch folgendende Schreibweise verwendet werden:

$$R_{m-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}) = \int_0^1 (1-t)^{m-1} \frac{1}{(m-1)!} \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}^\alpha dt.$$

Beweis:
Wir definieren $y(t) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})$ und wenden den Satz von *Taylor* für $n = 1$ an.
Es gilt dann

$$y(1) = y(0) + y'(0) + \ldots + \frac{1}{k!}y^k(0) + \frac{1}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_k), \quad \xi_k \in (0,1)$$

$$y'(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i f_{x_i}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}), \quad y''(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} v_i v_j f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}).$$

□

Definition 12.15 (Hessematrix)**.** *Für skalarwertige Funktionen f bezeichnet man die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen*

$$H_f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right) = \big(f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x})\big) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}(\boldsymbol{x})$$

als **Hessematrix**.

Bei der Hessematrix handelt es sich um die Jakobimatrix des Gradienten. Für $f \in C^2(D)$ ist $H_f(\boldsymbol{x})$ nach Satz 12.6 eine symmetrische Matrix.
Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und konvexe Menge, so gilt für $f \in C^3(D)$

$$f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^T H_f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + R_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).$$

Beispiel 12.4 (zur Taylorreihe)**.** *Sei $k = 2$, $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ (Affensattel).* $\boldsymbol{x}_0 = (1,1)^T$.

$$\begin{aligned}
f_x &= 3x^2 - 3y^2, \qquad f_x(1,1) = 0 \\
f_y &= -6xy, \qquad f_y(1,1) = -6 \\
f_{xx} &= 6x \\
f_{yy} &= -6x \\
f_{xy} &= -6y \\
\Rightarrow f'(x,y) &= (3x^2 - 3y^2, -6xy) \\
H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}, \qquad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \\
f(1,1) &= -2 \\
f(x,y) &\approx -2 + (0,-6)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + (x-1, y-1)\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\
&= -2 - 6(y-1) + 6(x-1)^2 - 6(y-1)^2 - 12(x-1)(y-1) \\
&\quad + o\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}\right)^3
\end{aligned}$$

12.6 Verschiedene Differentialoperatoren

Sei $\boldsymbol{v} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in D$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} v(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1(x_1) \\ v_2(x_2) \\ v_3(x_3) \end{pmatrix} && \text{(„Divergenz")} \\
\operatorname{rot} v(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \nabla \times \boldsymbol{v} && \text{(„Rotation")} \\
\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) &= (f'(\boldsymbol{x}))^T = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) && \text{(„Gradient")}
\end{aligned}
$$

Rechenregeln:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= 0 \\
\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} &= 0 \\
\operatorname{div} \operatorname{grad} f &= \Delta f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f \qquad \text{(„Laplaceoperator")} \\
\operatorname{div}(f\boldsymbol{v}) &= \operatorname{grad} f\boldsymbol{v} + f \operatorname{div} \boldsymbol{v} \\
\operatorname{rot}(f\boldsymbol{v}) &= \operatorname{grad} f \times \boldsymbol{v} + f \ \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \\
\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \Delta \boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

12.7 Aufgaben

12.1. Auf einem Markt wird ein Produkt von zwei verschiedenen Herstellern zu den Preisen p_1 bzw. p_2 angeboten. Die Nachfragefunktionen lauten $x_1 = 4 - 2p_1 + p_2$ und $x_2 = 6 + p_1 - p_2$. Bei der Produktion fallen beim ersten Hersteller nur variable Kosten in konstanter Höhe von 3.5 pro Erzeugnis an, während beim zweiten Hersteller keine Kosten entstehen (z.B. AB–Maßnahme). Berechnen Sie die Preise und die Nachfrage nach den Produkten der beiden Hersteller, die sich bei Marktgleichgewicht einstellen!

12.2. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowie Gradient und Hessematrix folgender Funktionen:

a) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1^4 x_2^2$ an der Stelle $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 e^{x_2} + \arctan x_3$,

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{x}$!

12.3. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowie Gradient und Hessematrix folgender Funktionen:

a) $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$,

b) $f(x, y) = \sin(ax + by)$ allgemein und für $(x, y) = (0, 0)$,

c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 \ln x_3 - x_1^2 x_2 e^{x_1}$!

12.4. Bestimmen Sie Gradient und Hessematrix der Funktion $f(x, y, z) = x^3 y^2 z + z$ allgemein und im Punkt $(-1, 1, 2)$!

12.5. Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ im Punkt $(3, 4)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$! Wie ändert sich $f(x, y)$ näherungsweise, wenn x von 3 auf 3.01 und y von 4 auf 4.024 wächst? Vergleichen Sie das Ergebnis mit der tatsächlichen Änderung!

12.6. Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion $f(x, y) = x^2 y^3$ im Punkt $(1, -2)$ in die Richtung, die durch Drehung der positiven x–Achse um den Winkel $\pi/6$ in positiver Richtung entsteht.

12.7. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x, y) = \dfrac{8}{x^2 + y^2}$ im Punkt $(x, y) = (\sqrt{3}, 1)$ in die Richtung, die mit der positiven x–Achse einen Winkel von $\dfrac{5\pi}{3}$ bildet!

12.8. Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion $f(x, y) = x^2 y^3$ im Punkt $(1, -2)$ in die Richtung, die durch Drehung der positiven x–Achse um den Winkel $\frac{\pi}{6}$ in positiver Richtung entsteht!

12.9. Sei $z = 3x^2 + 2xy$ mit $x = \sin t$ und $y = \cos t$. Berechnen Sie $\dot{z} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

a) mit der Kettenregel,

b) durch Einsetzen!

12.10. Sei $z = \ln(e^x + e^y)$, $y = x^2$. Berechnen Sie $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ und $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$!

12.11. Sei $F(x) = f(x, g(x))$. Berechnen Sie $F'(x)$

a) allgemein,

b) für $f(x, y) = \ln(x + y)$, $g(x) = \sin x$, $x = \dfrac{\pi}{2}$!

12.12. Sei $u = f(\xi, \eta)$ mit $\xi = x + y,\ \eta = x - y$. Berechnen Sie $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial u}{\partial y}$!

12.13. Sei $f(x, y) = u(\xi, \eta) = \sin \xi + \xi^2 \eta$ mit $\xi = x^2 + y^2,\ \eta = xy$.
Berechnen Sie $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}$!

12.14. Gegeben sei die Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = 2^{x_1} e^{x_2} 3^{x_3}$.

a) Entwickeln Sie die $f(x_1, x_2, x_3)$ an der Stelle $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})$ nach der Taylorformel bis zu den linearen Gliedern!

b) Ein Produktionsergebnis hänge durch die Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ von den Faktoren x_1, x_2 und x_3 ab. Ermitteln Sie näherungsweise die relative Zunahme des Produktionsergebnisses, die die Vergrößerung des Faktors x_i $(i = 1, 2, 3)$ um ein Prozent ausgehend von $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}) = (2, 1, 1)$ mit sich bringt!

12.15. a) Zeigen Sie, dass die Kurve $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t^2$ auf dem elliptischen Paraboloid $z = x^2 + y^2$ verläuft!

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi^2}{4})$ Doppelpunkt auf dieser Kurve ist!

c) Ermitteln Sie für diesen Punkt die Gleichungen der beiden Tangenten an die Kurve sowie die Gleichung der Tangentialebene an das Paraboloid!

d) Entwickeln Sie $f(x, y) = x^2 + y^2$ für $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$ in eine Taylorreihe!

e) Bestimmen Sie die Tangentialebene mit Hilfe der Taylorentwicklung!

12.16. Entwickeln Sie $z = \dfrac{\cos x}{\cos y}$ an der Stelle $(x, y) = (0, 0)$ nach der Taylorformel bis zu den quadratischen Gliedern und geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an!

12.17. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = \sqrt{xy}$ im Punkt $(x, y, z) = (3, 12, 6)$!

12.18. Sei $f(x, y) = \sqrt{1 - x - y}$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades für die Funktion $f(x, y) = \sqrt{1 - x - y}$ um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$!

b) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an $z = f(x, y)$ im Punkt $(0, 0)$ an!

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $x = t,\ y = t,\ z = \sqrt{1 - 2t}$ im Punkt $(0, 0, 1)$!

d) Zeigen Sie, dass die in c) ermittelte Tangente in der in b) ermittelten Tangentialebene liegt!

12.19. Entwickeln Sie $f(x, y) = x^y$ für $(x_0, y_0) = (1, 1)$ nach der Taylorformel bis zu den quadratischen Gliedern!

12.20. Entwickeln Sie $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ für $(x_0, y_0) = (0, 0)$ nach der Taylorschen Formel bis zu den Gliedern vierter Ordnung!

12.21. Ein Produktionsergebnis P hänge von den Faktoren x_1 und x_2 (z.B. Arbeitszeit, Kapitaleinsatz) nach der Formel $P(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1\, x_2^2}$ ab.

a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Cobb-Douglas-Funktion handelt!

b) Wie ist der Definitionsbereich sinnvollerweise zu wählen? Welcher Wertebereich ergibt sich?

c) Es sei vorgegeben, dass das Produktionsergebnis C erzielt werden muss. Lässt sich der damit implizit gegebene Zusammenhang zwischen x_1 und x_2 explizit nach x_1 bzw. x_2 auflösen?

d) Mit welchen Kombination der Produktionsfaktoren x_1 und x_2 lassen sich die Ergebnisse $P = 1$, $P = 2$, $P = 3$ bzw. $P = 4$ erreichen?

e) Stellen Sie die Funktion grafisch durch Niveaulinien dar!

f) Stellen Sie die Funktion als Fläche („Gebirge" über der x_1–x_2–Ebene) dar!

Hinweis: Als Cobb–Douglas–Funktion bezeichnet man eine Funktion der Art $f(\boldsymbol{x}) = \alpha_0 \prod\limits_{i=1}^{n} {x_i}^{\alpha_i}$ mit $\alpha_i > 0$, $i = 0, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

12.22. Die Höhe eines Geländepunktes werde durch $h(x, y) = 36 + 6x - x^2 + 10y - y^2$ angegeben.

a) Stellen Sie die Funktion $h(x, y)$ durch Höhenlinien grafisch dar!

b) Hat die Funktion $h(x, y)$ absolute Maxima bzw. Minima? Wenn ja, wo liegen diese, wie kann man sie interpretieren?

c) Der Meeresspiegel entspreche dem Höhenniveau 0. Welche Geländepunkte liegen auf Meeresspiegelhöhe?

12.23. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 6y$.

a) Von welcher Art sind die Niveaulinien der Funktion?

b) Skizzieren Sie das Niveaulinienbild!

c) Ist die Funktion beschränkt?

12.24. Gegeben sei die Funktion $f(x, y, z) = \dfrac{100}{x^2 + y^2 + z^2 + 10y}$.

a) Beschreiben Sie den Definitions- und den Wertebereich der Funktion!

b) Sei C eine beliebige reelle Zahl. Beschreiben Sie die Niveaufläche $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = C\}$!

12.25. Auf einem Markt wird ein Produkt von zwei verschiedenen Herstellern zu den Preisen p_1 bzw. p_2 angeboten. Die Nachfragefunktionen lauten $x_1 = 400 - 200p_1 + 100p_2$ und $x_2 = 600 + 100p_1 - 100p_2$. Bei der Produktion fallen beim ersten Hersteller nur variable Kosten in konstanter Höhe von 3.5 pro Erzeugnis an, während beim zweiten Hersteller keine Kosten entstehen (z.B. Arbeitsbeschaffungsmaßnahme).

a) Stellen Sie den Gewinn der beiden Hersteller als vektorwertige Funktion $\boldsymbol{G}$ des Preises $\boldsymbol{p}$ dar!
b) Berechnen Sie die Preise und die Nachfrage nach den Produkten der beiden Hersteller, die sich bei Marktgleichgewicht einstellen!
c) Berechnen Sie für $p_1 = 3$, $p_2 = 4$ den Gewinn $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{p})$ und die Jacobimatrix $\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{p})$!
d) Ermitteln Sie mit Hilfe der Jacobimatrix näherungsweise, wie sich der Gewinn entwickelt, wenn die Preise ausgehend von $p_1 = 3$, $p_2 = 4$ jeweils um 1 % erhöht werden?
e) Geben Sie $\boldsymbol{G}\left(\begin{pmatrix} 3.03 \\ 4.04 \end{pmatrix}\right)$ exakt an!

12.26. Sei $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
a) Zeichnen Sie das Niveaulinienbild!
b) Um was für eine Fläche handelt es sich bei $z = f(x, y)$?
c) Ermitteln Sie den Gradienten!
d) In welche Richtung wächst $f(x, y)$ am stärksten?
e) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene an $z = f(x, y)$ für einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) sowie für den konkreten Punkt $(3, 4)$!

12.27. Betrachtet werden die Funktionen $f(x, y) = x\mathrm{e}^{x^2y-4} + 2\ \ln(xy^2)$,
$x(u, v) = \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{2v}$, $y(u, v) = \mathrm{e}^u\mathrm{e}^{2v}$ und $h(u, v) = f\left(x(u, v), y(u, v)\right)$.
a) Berechnen Sie von der Funktion $f(x, y)$ im Punkt $(x, y) = (2, 1)$ die ersten partiellen Ableitungen sowie die Ableitung in die Richtung, die mit der positiven x–Achse den Winkel $\frac{3\pi}{4}$ bildet!
b) Welchen Winkel bildet die Richtung, in die $f(x, y)$ vom Punkt $(x, y) = (2, 1)$ ausgehend am stärksten wächst, mit der positiven x–Achse?
c) Berechnen Sie von der Funktion $h(u, v)$ im Punkt $(u, v) = (0, 0)$ die ersten partiellen Ableitungen!

12.28. Für die Herstellung eines Produktes werden Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 benötigt, deren Preise mit p_1, p_2 und p_3 bezeichnet werden. Der Gewinn pro verkaufter Mengeneinheit des Produkts betrage $G(p_1, p_2, p_3) = 800 - 3p_1 - 2p_2 - 5p_3$. Es sei $p_2 = 50$ und $p_3 = 20$. Für welche Preise p_1 ist der Gewinn positiv und im Verhältnis zu p_1 elastisch?
Hinweis: Die **partielle Elastizität** wird analog der gewöhnlichen Elastizität eingeführt: Das Verhältnis der relativen Änderungen der Größen $f(x_1, \ldots, x_n)$ und x_i beträgt ungefähr $\varepsilon_{f,x_i} = \dfrac{\partial f/\partial x_i}{f} x_i$, wenn die Größen x_j, $j \neq i$ unverändert bleiben.

Kapitel 13
Bestimmung lokaler Extremstellen

13.1 Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

Definition 13.1 (ε–Umgebung). *Sei $\varepsilon > 0$. Die offene Kugel mit Radius ε um den Punkt $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ $\quad K_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| < \varepsilon\}$ heißt ε–**Umgebung** der Punktes $\boldsymbol{a}$.*

Definition 13.2 (Lokales Maximum/Minimum). *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ heißt* **lokales Maximum (Minimum)**, *falls es eine ε–Umgebung $K_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ existiert, in der $f(\boldsymbol{x}) \leq f \quad (\boldsymbol{a}) \ (f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a}))$ für alle $\boldsymbol{x} \in K_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ gilt.*

Definition 13.3 (Globales Maximum/Minimum). *Gelten oben stehende Ungleichungen für alle $\boldsymbol{x} \in D$, dann heißt $\boldsymbol{a}$* **globales Maximum (Minimum)**.

Maxima und Minima werden als **Extrema** oder **Extremstellen** bezeichnet.

Satz 13.1. *Sei $f \in C^1(K_\varepsilon(\boldsymbol{a}))$ und ist $\boldsymbol{a}$ eine lokale Extremstelle, d.h. ein lokales Maximum oder Minimum, dann gilt:*

$$\text{grad } f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a}) = (0, \ldots, 0)^T = \boldsymbol{0}.$$

Beweis:

Falls $\boldsymbol{a}$ eine lokale Extremstelle ist, besitzen $h_i(t) := f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_i), i = 1, \ldots, n$, in $t = 0$ ebenfalls lokale Extremstellen ($n = 1$!). Bekanntlich gilt hier

$$\frac{d}{dx} h_i(0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}), \qquad 1 \leq i \leq n.$$

□

Definition 13.4. *Der Punkt $\boldsymbol{a} \in D$ heißt* **stationärer Punkt** *von f, falls $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ ist.*

Im allgemeinen muss ein stationärer Punkt keine lokale Extremstelle sein (siehe z.B. Affensattel $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{in} \quad (x, y) = (0, 0)$, Beispiel 12.4).

Es gibt folgenden Extremstellentest:

Satz 13.2 (hinreichende Bedingung für Extrema). *Sei $\boldsymbol{a} \in D$ ein stationärer Punkt von $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $H_f(\boldsymbol{a}) = (\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(\boldsymbol{a}))_{i,j=1,\ldots,n}$ die Hesse-Matrix von f in $\boldsymbol{a}$, so folgt, falls* $\det(H_f(\boldsymbol{a})) \neq 0$ *und*

1. *$H_f(\boldsymbol{a})$ positiv definit ist, d.h. $\boldsymbol{x}^T H_f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} > 0$ für alle $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ gilt, dass in $\boldsymbol{a}$ ein lokales Minimum*

2. *$H_f(\boldsymbol{a})$ negativ definit ist, d.h. $\boldsymbol{x}^T H_f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} < 0$ für alle $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ gilt, dass in $\boldsymbol{a}$ ein lokales Maximum*

3. *$H_f(\boldsymbol{a})$ indefinit ist, d.h. $\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{x}^T H_f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} > 0$ und $\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{x}^T H_f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} < 0$ existieren, dass in $\boldsymbol{a}$ ein Sattelpunkt*

vorliegt.

Beweis:
Für $\boldsymbol{x} \in K_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ gilt, wegen $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$,

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T H_f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^2)$$

Der hintere Teil der Gleichung ist vernachlässigbar. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von $H_f(\boldsymbol{a})$ und $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = V^T H_f(\boldsymbol{a}) V$ die *Hauptachsentransformation* (siehe Abschnitt 5.3), dann gilt mit

$$\begin{aligned} \zeta &:= V^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \\ (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T H_f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) &= \zeta^T D \zeta. \end{aligned}$$

Nun hat $g(\zeta) = \zeta^T D\zeta$ in $\zeta = \boldsymbol{0}$ ein relatives Minimum (Maximum), falls alle $\lambda_i > 0, i = 1, \ldots, n$ $(\lambda_i < 0, i = 1, \ldots, n)$ sind, und einen Sattelpunkt, falls es $\lambda_i \neq 0$ mit unterschiedlichen Vorzeichen gibt.

□

Im Spezialfall $n = 2$ ergibt sich $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^T, H_f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\boldsymbol{a}) & f_{yx}(\boldsymbol{a}) \\ f_{xy}(\boldsymbol{a}) & f_{yy}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$, dabei ist wegen $f \in C^2(D)$ $f_{xy}(\boldsymbol{a}) = f_{yx}(\boldsymbol{a})$.

Bemerkung 13.1. *Für den Affensattel (Beispiel 12.4) gilt $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hier kann das hinreichende Kriterium aus Satz 13.2 nicht angewandt werden.*

13.2 Anwendung - lineare Ausgleichsrechnung

Damit ist hier die **Approximation** durch die lineare Regressionsmethode der kleinsten Fehlerquadrate (**Methode der kleinsten Quadrate**) gemeint.

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$ mit $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = n$. Dann hat nach Satz 2.11 das homogene Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ nur die triviale Lösung, d.h. $\{\boldsymbol{x} : \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{0}\}$, und das inhomogene Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ ist nach Satz 2.10 im Allgemeinen nicht lösbar.

Gesucht wird dann ein $\boldsymbol{x}^0$, dass die widersprüchlichen Gleichungen des Systems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ bestmöglich erfüllt:

$$\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \|\boldsymbol{Ax}^0 - \boldsymbol{b}\| \to \min,$$

d.h. $\|\boldsymbol{Ax}^0 - \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Die Minimumsuche entspricht der Minimierung der Funktion
$f(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|^2 =< \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} >= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b}$.

Die Jakobimatrix von f lautet $\operatorname{grad} f = (f'(\boldsymbol{x}))^T = 2\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} - 2\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$.

Satz 13.3 (Gaußsche Normalgleichung). *Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$ und $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = n$. Dann gilt*

$$\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{Ay} - \boldsymbol{b}\| \qquad \textit{für alle } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

genau dann, wenn $\boldsymbol{x}$ Lösung von

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} \qquad \textit{(Gaußsche Normalgleichung)}$$

ist.

Beispiel 13.1. *Gegeben sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = (x) \in \mathbb{R}^1$.*

$\boldsymbol{A}^T = (2, 1)$

$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = 5x = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$

$x^0 = \frac{3}{5}$ ist die beste Approximation für die Lösung des widersprüchlichen Gleichungssystems $\substack{2x=1 \\ x=1}$ im Sinne der Minimierung der Funktion $f(x) = (2x-1)^2 + (x-1)^2$. Der Fehler („Residuum“) beträgt $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}x - \boldsymbol{b} = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)^T$ mit $\|r\|^2 = f(\frac{3}{5}) = \frac{1}{5}$.

Beispiel 13.2 (Lineare Approximation). *Sollen n Punkte (x_i, y_i) (z.B. aus Messwerten) durch eine Gerade $y(x) = ax + b$ approximiert werden, so sind die Beziehungen*

$$y(x_i) = x_i a + b \approx y_i, \quad \textit{d.h.} \quad \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{\dots} \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

möglichst gut zu approximieren. Das führt auf die Minimierung der Funktion

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (x_i a + b - y_i)^2$$

bezüglich a und b und das Normalgleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, a & + & \sum_{i=1}^{n} x_i\, b & = & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i\, a & + & n\ b & = & \sum_{i=1}^{n} y_i\,. \end{array}$$

13.3 Inverse Funktionen

Satz 13.4 (Satz über die inverse Funktion)**.** *Sei $D_f \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D_f \to \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}^0 \in D_f, f \in C^1(D_f)$ und*

$$f'(\boldsymbol{x}^0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(\boldsymbol{x}^0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

eine invertierbare Matrix, also $\det f'(\boldsymbol{x}^0) \neq 0$. *Dann existiert eine Kugel $K_\varepsilon(\boldsymbol{x}^0)$ und eine Funktion $g : K_\varepsilon(\boldsymbol{x}^0) \to D$, so dass $f(g(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ und $g(f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ gilt.*

Weiterhin gilt $g'(\boldsymbol{x}) = [f'(g(\boldsymbol{x}))]^{-1}$.

$\varepsilon > 0$ kann so klein gewählt werden, dass $\det f'(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$ für alle $\boldsymbol{x} \in K_\varepsilon(\boldsymbol{x}^0)$ gilt. Wir wählen $\boldsymbol{x}^{(0)} \in K_\varepsilon(\boldsymbol{x}^0)$ und lösen $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ mit Hilfe des **Newton–Verfahrens** (s. unten Beispiel 16.5),

$$\boldsymbol{x}^{n+1} := \boldsymbol{x}^{(n)} - f'(\boldsymbol{x}^{(n)})^{-1} f(\boldsymbol{x}^{(n)}).$$

Man kann zeigen, dass das Newton-Verfahren für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ immer gegen die Lösung $\boldsymbol{x}$ konvergiert. Die gesuchte Funktion ist $g : \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}$ mit $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$.

13.4 Implizite Funktionen

Definition 13.5. *Sei $F : D_x \times D_y \to \mathbb{R}$. Gibt es eine Funktion $f : D_x \to D_y$ mit $F(x, f(x)) = 0$, so nennt man f eine* **implizite Funktion**.

Beispiel 13.3. *Beispiele für implizit gegebene Funktionen sind der Kreis*

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

oder die Funktion

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Satz 13.5 (Satz über die implizite Funktion)**.** *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $F : D \to \mathbb{R},\ F \in C^1(D)$; $(x_0, y_0)^T \in D$ mit $F(x_0, y_0) = 0$ und $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann existiert eine ε–Umgebung $K_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ und über dieser eine Funktion $f : K_\varepsilon \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:*

i) $f(x_0) = y_0$,

ii) $F(x, f(x)) = 0$ *für* $x \in K_\varepsilon(x_0)$,

iii) $f \in C^1(K_\varepsilon(x_0))$ *und* $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) f'(x_0) = 0.$

Die Ableitung der implizit gegebenen Funktion $F(x, y) = 0$ lautet somit

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

Der Satz 13.5 kann für implizit gegebene vektorwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher verallgemeinert werden:

Satz 13.6 (Satz über die implizite Funktion)**.** *Sei* $g : D_g \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, n > m, D_g$ *offen,* $g \in C^1(D_g)$, $\boldsymbol{x}^0 \in D_g$ *mit* $g(\boldsymbol{x}^0) = 0$.

Zudem sei $\det \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,m} \neq 0.$

Dann existiert eine ε*–Umgebung* $K_\varepsilon := K_\varepsilon\left((\boldsymbol{x}^0_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{x}^0_n)^T\right)$ *und über dieser eine Funktion* $f : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ *mit*

1. $f_i\left((\boldsymbol{x}^0_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{x}^0_n)^T\right) = x^0_i$, $\boldsymbol{x} := (x_0, \ldots, x_m)^T$,
2. *für* $\boldsymbol{y} := (\boldsymbol{x}^0_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{x}^0_n)^T \in K_\varepsilon$ *gilt* $g(f(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$,
3. $f \in C^1(K_\varepsilon), g' = (g_{\boldsymbol{x}}, g_{\boldsymbol{y}})$ *mit*

$$\begin{aligned} g_{\boldsymbol{y}}(f(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) f'(\boldsymbol{y}) + g_{\boldsymbol{x}}(f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) &= 0 \\ f'(\boldsymbol{y}) &= -\left[g_{\boldsymbol{y}}(f(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})\right]^{-1} g_{\boldsymbol{x}}(f(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

Beispiel 13.4. *Gegeben sei ein Kreis, beschrieben durch* $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. *Wenn man die Gleichung nach* y *auflöst, erhält man* $y = f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$ *für* $|x| \leq 1$ *Die Ableitung in* $(x_0, f(x_0) = y_0)$ *lässt sich wie folgt berechnen:*

$$\begin{aligned} F_x + F_y f'(x) &= 0 \\ 2x + 2y f'(x) &= 0 \\ \Rightarrow \qquad f'(x) &= -\frac{x}{y} = -\frac{x}{f(x)} \\ \text{also} \qquad f'(x) &= \mp\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

Dies gilt nur für $y \neq 0$. *Die Ableitung existiert nicht für* $y = f(\pm 1) = 0$.

Beispiel 13.5.

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-1 &= 0 \\ x+y+z-1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= x(z) \\ y &= y(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1-z-y \\ y^2+2z^2-2z(1-y)+(1-y)^2-1 &= 0 \\ z^2-z(1-y)+y^2-y &= 0 \\ y^2+(z-1)y+z^2-z &= 0 \\ y(z) &= \frac{z-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(z-1)^2}{4}-z^2+z} \\ x(z) & \quad \textit{analog} \end{aligned}$$

13.5 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

13.5.1 Grundstruktur

Sei $\boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, $f \in D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}^m, m < n$.

Optimiere $\quad f(\boldsymbol{x}) \to \min$ bzw. $\max$

unter den Nebenbedingungen $\quad g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, $\quad$ d.h. $\quad \begin{array}{ll} g_1(\boldsymbol{x}) & = 0 \\ \vdots & \\ g_m(\boldsymbol{x}) & = 0 \end{array}$

Definition 13.6 (Zulässige Lösung)**.** *Die Menge* $\mathcal{B} := \{\boldsymbol{x} : g(\boldsymbol{x}) = 0\}$ *heißt Menge der* **zulässigen Lösungen** *oder auch* **zulässiger Bereich***.*

Falls

$$\det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,m} \neq 0, \quad x_i = x_i(\boldsymbol{y}), \quad i = 1,\dots,m$$

gilt, so existiert $\boldsymbol{y} = (x_{m+1},\dots,x_n)$ mit $g_i(x_1(\boldsymbol{y}),\dots,x_m(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}) = 0$. Man kann dann die Aufgabe

$$f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}) \to \min \text{ bzw. } \max$$

lösen. Das heißt, man **eliminiert** $x_1,\dots,x_m$ aus $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$ und setzt diese in f ein. Diese **Eliminationsmethode** kann praktisch nur in seltenen Fällen explizit durchgeführt werden.

13.5.2 Die Methode der Lagrangemultipikatoren

Wir ordnen jeder Nebenbedingung $g_i(\boldsymbol{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$, ein $\lambda_i \in \mathbb{R}$, (genannt **Lagrange-Multiplikator**) zu und definieren die **Lagrangefunktion** $L : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ durch

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}).$$

Satz 13.7 (Notwendige Bedingung). *Seien $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $g \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ und f besitze an der Stelle $\boldsymbol{x}^0 \in D$ unter den Nebenbedingungen $g(\boldsymbol{x}^0) = 0$, d.h. $g_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m$ eine lokale Extremstelle.*

Das heißt, es existiere ein $K_\varepsilon = K_\varepsilon(\boldsymbol{x}^0)$ mit $f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}^0)$ bzw. $f(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{x}^0)$ für alle $\boldsymbol{x} \in K_\varepsilon(\boldsymbol{x}^0)$ mit $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$ und $g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0,\ i = 1, \ldots, m$.

Ferner seien die Vektoren grad $g_i(\boldsymbol{x}^0),\ i = 1, \ldots, m$ *alle linear unabhängig.*

Dann existiert ein $\boldsymbol{\lambda}^0 \in \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ mit

$$\operatorname{grad}\ L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) = 0,$$

$$\text{das heißt}\quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} L(\boldsymbol{x}^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0) &= 0,\ i = 1, \ldots, n \\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial \lambda_i} L(\boldsymbol{x}^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)}_{g_i(\boldsymbol{x}^0)} &= 0,\ i = 1, \ldots, m \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bemerkung 13.2. *An den stationären Punkten besitzt die Lagrangefunktion einen Sattelpunkt!*

Satz 13.8. *Seien die Vektoren* grad $g_i(\boldsymbol{x}),\ i = 1, \ldots m$ *linear unabhängig und $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ ein stationärer Punkt von $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$. Ferner sei $V^0 = \{\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n : g'(\boldsymbol{x}^0) = 0\}$. Falls die Matrix $H = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ über V^0 positiv definit ist, d.h. $< H\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g} > > 0$ für alle $\boldsymbol{g} \in V^0$ mit $\boldsymbol{g} \ne \boldsymbol{0}$ gilt, liegt in $\boldsymbol{x}^0$ ein lokales Minimum unter den Nebenbedingungen $g_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m$ vor. Analog liegt im Falle negativer Definitheit ein lokales Maximum vor.*

Die hinreichende Bedingung ist mitunter aufwendig zu verifizieren.

Beispiel 13.6. *Gesucht ist der größte achsenparallele Quader innerhalb des Ellipsoids* $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

Zielfunktion ist der Volumeninhalt des Quaders

$$f(x, y, z) = 2x\,2y\,2z,$$

Nebenbedingung die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoids

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Damit wir gewährleistet, dass die Eckpunkte des Quaders auf dem Ellipsoid liegen.

$\Longrightarrow$ *Lagrangefunktion* $L(x, y, z) = 8xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} L_x = 8yz + \lambda\frac{2x}{a^2} &= 0 \\ L_y = 8xz + \lambda\frac{2y}{b^2} &= 0 \\ L_z = 8xy + \lambda\frac{2z}{c^2} &= 0 \\ L_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow -4xyz = \lambda\frac{x^2}{a^2} = \lambda\frac{y^2}{b^2} = \lambda\frac{z^2}{c^2}$

Für den Fall $\lambda = 0$ *folgt* $x = y = 0, z = 1$ *oder*
$x = z = 0, y = 1$ *oder*
$y = z = 0, x = 1.$

Für diese Punkte ergibt sich jeweils $V = 0$*, so dass für* $\lambda = 0$ *keine Maximalstelle vorliegt. Also muss* $\lambda \neq 0$ *sein. Damit folgt*

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \Longrightarrow \frac{3x^2}{a^2} = 1 \Longrightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}},\ y = \pm\frac{b}{\sqrt{3}},\ z = \pm\frac{c}{\sqrt{3}} \quad \textit{und} \quad V = \frac{8}{9}\sqrt{3}\,abc.$$

Da der Volumeninhalt des Quaders durch den des Ellipsoids nach oben beschränkt ist, muss es ein Maximum geben. Es kann nur für die zuletzt angegebenen Punkte angenommen werden. Für diese Punkte ergibt sich jeweils der selbe Quader. Da es einen Quader maximalen Volumens geben muss und dafür nur der mit dem Volumen $V = \frac{8}{9}\sqrt{3}$ *in Frage kommt, handelt es sich bei diesem um den mit maximalem Volumen.*

13.6 Aufgaben

13.1. Bestimmen Sie alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und untersuchen Sie mittels der zweiten partiellen Ableitungen, ob Extrema vorliegen und von welchem Typ diese sind:

a) $f(x,y) = 3 - x^2 + xy - 3y^2 + 7x + 2y$,
b) $f(x,y) = (x+y)^2$,
c) $f(x,y) = x + y + \dfrac{8}{xy}$,
d) $f(x,y) = x \ln y - 2x^2$!

13.2. Sei $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$.
a) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y,z)$ und ermitteln Sie durch Definitheitsuntersuchung der Hessematrix, ob es sich um Extrema handelt und von welchem Typ diese sind!
b) Beseitigen Sie in $f(x,y,z)$ durch Hauptachsentransformation das gemischte Glied und nutzen Sie dies zur Bestimmung eines Extremwertes!
c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen beiden Wegen?

13.3. Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$ und ermitteln Sie durch Definitheitsuntersuchung der Hessematrix, ob es sich um Extrema handelt und von welchem Typ diese sind!

13.4. Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ über dem Gebiet $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$!

13.5. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion
$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$!

13.6. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = (x^3 + 3x^2 + 1)\cosh y$.
a) Hat die Funktion globale Extrema?
b) Ermitteln Sie die relativen Extrema und Sattelpunkte!
c) Geben Sie die Taylorentwicklung von $f(x,y)$ für den Entwicklungspunkt $(0,0)$ bis zu den quadratischen Gliedern an!

13.7. Für $x > 0$, $y > 0$ sei die Funktion $f(x,y) = x - y + \ln \dfrac{y}{x}$ definiert.
a) Hat die Funktion globale oder lokale Extrema bzw. Sattelpunkte?
b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(\mathrm{e}, 1)$ an $z = f(x,y)$!
c) Sei $\vec{a}$ ein Vektor in gegenüber der positiven x–Achse im positiven Sinne um 60° gedrehter Richtung. Berechnen Sie die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\mathrm{e}, 1)$!
d) In welche Richtung wächst $f(x,y)$ ausgehend von $(x,y) = (\mathrm{e}, 1)$ am stärksten?

13.8. Gegeben sei die Funktion $f(x,y,z) = \mathrm{e}^x(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{3}{4})$.
a) Untersuchen Sie die Funktion auf Extremstellen!
b) Hat die Funktion globale Extrema?

c) Ermitteln Sie den größten und kleinsten Wert der Funktion über dem Würfel $\{(x,y,z) : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$!

13.9. a) Ermitteln Sie die Extrema von $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{x+z} + \dfrac{z}{x+y}$ $(x,y,z > 0)$!

b) Handelt es sich um globale Extrema?

13.10. Die Gewinnentwicklung eines Unternehmens in den Jahren 1996 bis 2000 zeigt folgende Ergebnisse:

Jahr	1996	1997	1998	1999	2000
Gewinn (in Mill. DM)	50	51	52	54	58

Es soll ermittelt werden, mit welchen Gewinnen 2001 und 2002 zu rechnen ist, wenn unveränderte wirtschaftliche Rahmenbedingungen unterstellt werden.

a) Nutzen Sie hierfür die Methode der kleinsten Quadrate mit einem linearen Ansatz!

b) Nutzen Sie hierfür die Methode der kleinsten Quadrate mit einem quadratischen Ansatz!

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse von a) und b) und nehmen Sie eine kritische Wertung vor!

13.11. Für die Größe y liegen in Abhängigkeit von x folgende Werte vor:

x_i	0	1	2	3
y_i	10	28	51	69

a) Approximieren Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate den Zusammenhang zwischen den Größen x und y linear!

b) Ermitteln Sie Schätzwerte für y bei $x = 2.5$ und $x = 4$!

13.12. Die Funktion $z = f(x,y) = 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ beschreibe für ein öffentlich gefördertes Projekt zum Gemüseanbau den Ertrag pro Hektar (in Mengeneinheiten) in Abhängigkeit von den eingesetzten Aufwendungen x für Bewässerung und y für Dünger (beide gemessen in Geldeinheiten). Es stehen insgesamt C Geldeinheiten an Fördermitteln zur Verfügung, die unbedingt vollständig verbraucht werden sollen.

In welchem Verhältnis sind die Fördermittel aufzuteilen, um einen maximalen Ertrag zu sichern? Lösen Sie die Aufgabe

a) mit der Einsetzmethode,

b) mit Hilfe eines Lagrangemultiplikators!

13.13. Wenden Sie die Einsetz- und die Lagrangemethode zur Bestimmung der Extrema der Funktion $f(x,y) = 1 + yx^2$ längs des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$ an!

13.14. Ein Unternehmen stellt ein Erzeugnis in zwei Produktionsstätten P_1 und P_2 her, wobei jeweils fixe Kosten in Höhe von $c_0 = 500$ sowie variable Kosten in

Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl in Höhe von $c_1(x) = \frac{1}{2}x_1^2$ in P_1 und in Höhe von $c_2(x) = x_2^2 + 2x_2$ in P_2 anfallen. Es sollen 80 Stück des Erzeugnisses kostenminimal produziert werden. Ermitteln Sie, wie die Produktion auf die beiden Produktionsstätten zu verteilen ist,

a) mit der Einsetzmethode,

b) mit Hilfe eines Lagrangemultiplikators!

13.15. Ein Unternehmen kann das gleiche Erzeugnis auf drei verschiedenen Produktionslinien P_1, P_2 und P_3 herstellen, wobei in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl Kosten in Höhe von $3x_1^2+60x_1$, $4x_2^2+60x_2$ bzw. $5x_3^2+60x_3$ anfallen. Es sollen 7050 Stück des Erzeugnisses kostenminimal produziert werden. Ermitteln Sie, wie die Produktion auf die drei Produktionslinien zu verteilen ist!

13.16. Untersuchen Sie, ob die Punkte $(3, -2, -\dfrac{1}{2})$, $(3, -1, 0)$, $(3, -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2})$ für die Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 - 3x_3$ unter den Nebenbedingungen $x_1+x_2-x_3=2$, $\quad x_1-x_2+x_3=4$ stationär sind!

13.17. Auf der Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$ ist der Punkt gesucht, der vom Punkt $(0, 2)$ den geringsten Abstand hat!

13.18. Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x, y)=xy$ auf dem Kreis $x^2+y^2=2$!

13.19. Ermitteln Sie die Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2$ über der Schnittgeraden der Ebenen $x + 3y = 30$ und $y + 2z = 20$

a) mit der Lagrangemethode,

b) durch Ermittlung der Geradengleichung und Einsetzen!

13.20. Ermitteln Sie die Extrema von $f(x, y, z) = x + y + z$ längs der Ellipse, in der sich die Ebene $x + z = 1$ und der Zylinder $x^2 + y^2 = 4$ schneiden!

13.21. Mit minimalem Materialaufwand soll ein quaderförmiger oben offener Behälter mit einem Fassungsvermögen von 1 Liter hergestellt werden. Ermitteln Sie die Seitenlängen des Quaders!

13.22. Bestimmen Sie die Extrema von $f(x, y, z)=xyz$ unter den Nebenbedingungen $x+y+z=5$ und $xy+xz+yz=8$!

13.23. Sei $f(x, y) = 10 - 2x^2 - 3y^2 + 4xy - 4x + 8y$.

a) Entwickeln Sie $f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) in eine Taylorreihe!

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y)$ auf Extremwerte!

c) Geben Sie die Taylorentwicklung von $f(x, y)$ am Extremum und die Taylorentwicklung von $f(x, y)$ am Koordiantenursprung an!

d) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebenen an die Fläche $z = f(x, y)$ im Extremum sowie im Koordinatenursprung an!

13.24. Bestimmen Sie die Sattelpunkte und die lokalen und globalen Extremstellen der Funktion $f(x,y) = 4xy+6x+2y+3$ über dem Quadrat $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -5 \leq x,y \leq 5\}$!

13.25. Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = x^3+y^3+4axy$, wobei a ein beliebiger reeller Parameter sei! Handelt es sich um globale Extrema?

13.26. Sei $f(x,y) = \dfrac{x^2+6x+19}{y^2+1}$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion!
b) Entwickeln Sie die Funktion an der Stelle $(0,1)$ in eine Taylorreihe bis zu den quadratischen Gliedern und geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x,y)$ in $(0,1,\frac{19}{2})$ an!
c) Untersuchen Sie die Funktion auf Extrema und Sattelpunkte!
d) Geben Sie die Taylorentwicklung bis zum quadratischen Glied und die Tangentialebene am Sattelpunkt an!
e) Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion!

13.27. Sei $f(x,y) = 10x^2 + 12xy + 10y^2 + 8x + 24y,\ x,y \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen!
b) Führen Sie für die Niveaulinien $f(x,y) = C$ die Hauptachsentransformation aus!
c) Skizzieren Sie das Niveaulinienbild im transformierten Koordinatensystem!
d) Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion $f(x,y)$!

13.28. Lässt sich der implizit durch $F(x,y) = 0$ definierte Zusammenhang von x und y explizit nach y als Funktion $y = y(x)$ auflösen, so gilt unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}\ .$$

a) Begründen Sie diese Formel mit der Kettenregel!
b) Ein Zusammenhang zwischen zwei Größen x und y sei durch $h(x,y) = 36 + 6x - x^2 + 10y - y^2 = 45$ beschrieben. Ermitteln Sie $y'(x)$ für $x = 6$, $y = 1$ durch implizite Differenziation sowie durch explizite Auflösung nach y und anschließende Differenziation!
c) Was passiert in gleichem Zusammenhang im Punkt $x = 8$, $y = 5$?

13.29. Gegeben sei die Funktion $F(x,y) = x^5 + y^4 - 4xy - 11x + 2$.

a) Zeigen Sie, dass durch $F(x,y) = 0$ in der Umgebung des Punktes $(1,2)$ eine Funktion $y = y(x)$ definiert wird!
b) Berechnen Sie $y'(1)$!
c) Ermitteln Sie näherungsweise $y(1.1)$!

13.30. Betrachtet wird das Nullniveau der Funktion $f(x,y) = 10x^2 + 12xy + 10y^2 + 8x + 24y$.

a) Zeigen Sie, dass in der Umgebung des Punktes $(x,y) = (0,-\frac{12}{5})$ durch das Nullniveau eine Funktion $y = \varphi(x)$ definiert wird!

b) Bestimmen Sie für diese Funktion die Ableitung $\varphi'(0)$ durch implizite Differenziation!
c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente $t(x)$ im Punkt $(x, y) = (0, -\frac{12}{5})$ an die Niveaulinie!
d) Vergleichen Sie $t(0.1)$ und $\varphi(0.1)$!

13.31. Für die Größe y liegen in Abhängigkeit von x folgende Werte vor:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-8	-1	0	2	8

a) Approximieren Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate den Zusammenhang zwischen den Größen x und y durch eine Gerade!
b) Approximieren Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate den Zusammenhang zwischen den Größen x und y durch eine Parabel!
c) Ermitteln Sie mit beiden Approximationen Schätzwerte für y bei $x = 1.5$ und $x = 2.5$!

13.32. Bestimmen Sie sofern existent den größten und den kleinsten Wert Funktion $f(x, y) = 10x^2 + 12xy + 10y^2 + 8x + 24y$ (vgl. Aufgabe 13.27) über der Geraden $11x + 5y = 23$
a) mit der Einsetzmethode,
b) mit Hilfe eines Lagrangemultiplikators!

13.33. Ein Unternehmen stellt vier Produkte her, die zu Preisen p_1, p_2, p_3 bzw. p_4 verkauft werden. Der tägliche Absatz beträgt in Abhängigkeit von den jeweiligen Preisen $a_1 = 1000 - 20p_1$, $a_2 = 1500 - 10p_2$, $a_3 = 1000 - 10p_3$ bzw. $a_4 = 2000 - 10p_4$. Aus Kapazitätsgründen muss die tägliche Produktion der Gleichung $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 = 7800$ genügen. Berechnen Sie die Preise, unter denen der tägliche Umsatz unter den beschriebenen Bedingungen maximal ist, sowie den damit zu erreichenden Umsatz!

Kapitel 14
Gewöhnliche Differentialgleichungen

14.1 Einführung

Unter einer Differentialgleichung versteht man eine Gleichung, in welcher unabhängige Variablen, Funktionen und Ableitungen von Funktionen auftreten.

Beispiel 14.1 (Wachstumsmodell). *Sei $y(t)$ die Population zum Zeitpunkt $t \geq t_0$, dann ist die* **Wachstumsrate** *gegeben durch*

$$\dot{y} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}.$$

Gehen wir weiter davon aus, daß die Wachstumsrate proportional zur Population ist, so bedeutet dies

$$\dot{y}(t) = ay(t), \quad t \geq t_0, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{14.1}$$

Durch eine Zählung wurde die Population zu einem Zeitpunkt $y(t_0) = y_0$ *ermittelt.*

Zunächst bemerken wir,

1. Gleichung (14.1) ist abhängig von $\dot{y}$, y und t.
2. Gleichung (14.1) bildet in Verbindung mit der Bedingung $y(t_0) = y_0$ ein **Anfangswertproblem**.

Bemerkung 14.1. *Hängt* $t \mapsto y(t)$ *von* t *ab, so schreiben wir oft* $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}(t)$, *während wir für* $x \mapsto y(x)$ *die Schreibweise* $y'(x) = \frac{dy}{dx}(x)$ *verwenden. Beide Schreibweisen sind in der Literatur üblich. Die Schreibweise* $\dot{y}(t)$ *wurde von Newton eingeführt und ist in der Physik gebräuchlich, wenn* t *die Zeit bezeichnet.*

Definition 14.1. *Sei* $f : [x_0, X) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *stetig, dann heißt die Gleichung*

$$\mathbf{y}'(x) = f(x, \mathbf{y}(x)), \quad x \in [x_0, X) \tag{14.2}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_m'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)) \\ \vdots \\ f_m(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)) \end{bmatrix}$$

eine **explizite Differentialgleichung** *1. Ordnung . Ist*

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \tag{14.3}$$

vorgegeben, so heißen (14.2) *und* (14.3) *ein Anfangswertproblem zu* (14.2).

Beispiel 14.2 (explizites Anfangswertproblem)**.** *Gesucht sei die Funktion* $y : [0, X) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ *mit*

$$y'(x) = f(x), \quad y(0) = y_0. \tag{14.4}$$

Integration von (14.4) *liefert*

$$\int_0^x y'(\tau)d\tau = \int_0^x f(\tau)d\tau,$$

das heißt, die Lösung $y = y(x)$ *ist gegeben durch*

$$y(x) - y_0 = \int_0^x f(\tau)d\tau$$

beziehungsweise

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(\tau)d\tau.$$

14.2 Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [x_0, X), \tag{14.5}$$

so stellt sich die Frage nach *Existenz* und *Eindeutigkeit der Lösung*. Ebenfalls von Interesse ist, ob eine kleine Änderung der Anfangsbedingung auch eine kleine Änderung der Lösung zur Folge hat; dies bedeutet *die Lösung hängt stetig von den Anfangsdaten ab*. Ein mathematisches Problem, dessen Lösung alle drei Bedingungen erfüllt, heißt **korrekt gestellt** oder **sachgemäß gestellt**.

Definition 14.2. *Eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}^m$, $G \in \mathbb{R}^n$ erfüllt eine* **Lipschitz-Bedingung** *(kurz L-Bedingung), falls eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ existiert, so daß für alle $x_1, x_2 \in G$*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

Der folgende Satz zeigt, daß das Anfangswertproblem (14.5) korrekt gestellt ist, falls die Funktion f eine L-Bedingung in y erfüllt.

Satz 14.1 (Picard-Lindelöf)**.** *Genügt $f(x, y)$ für alle $x \in [x_0, X)$ einer L-Bedingung in y*

$$\|f(x, y_1) = f(x, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|, \qquad \forall a < y_1, y_2 < b$$

dann ist das Anfangswertproblem (14.5) *für $y_0 \in (a, b)$ eindeutig lösbar in einem geeignetem Intervall $[x_0, \bar{X})$. Für zwei Lösungen y_1, y_2 zu verschiedenen Anfangsbedingungen*

$$y_1(x_0) = y_{1,0}, \quad y_2(x_0) = y_{2,0}, \quad y_{1,0}, y_{2,0} \in (a, b)$$

gilt für alle $x \in [x_0, \bar{X})$

$$\|y_1(x) - y_2(x)\| \leq C\|y_{1,0} - y_{2,0}\|.$$

14.3 Trennbare Differentialgleichungen

Ein wichtiger Spezialfall des Anfangwertsproblems (14.2), (14.3) liegt vor, falls die Funktion $f(x, y)$ in zwei voneinander unabhängige Funktionen $g(x)$ und $h(y)$ zerfällt, wir also die Gleichung

$$y'(x) = g(x)h(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (y = y(x)) \tag{14.6}$$

betrachten. Diese Gleichung lösen wir in vier Schritten:

1. **Schritt:** Bestimme die Nullstellen $\overset{\circ}{y}$ von h

$$h(\overset{\circ}{y}) = 0.$$

Dann ist die konstante Funktion $y(x) \equiv \overset{\circ}{y}$ eine **partikuläre (spezielle) Lösung** von (14.6).

2. **Schritt:** Bringe $y \neq \overset{\circ}{y}$ auf die linke und x auf die rechte Seite

$$h^{-1}(y)\, dy = g(x)\, dx.$$

3. **Schritt:** Integriere unbestimmt

$$H(y) = \int h^{-1}(y)\, dy = \int g(x)\, dx = G(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$H(y)$ ist die **allgemeine, implizite Lösung**.

4. **Schritt:** Falls $h(y_0) \neq 0$ ist, bestimme c_0, so daß $H(y_0) = G(x_0) + c_0$, und löse (falls möglich) $H(y) = G(x) + c_0$ nach y auf. Im Falle $h(y_0) = 0$ ist $y \equiv y_0$ Lösung des Anfangswertproblems.

Beispiel 14.3. *Gegeben sei das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = ay(x), \quad y(0) = y_0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Es gilt (14.6) *mit* $g(x) = a$ *und* $h(y) = y$. $h(y)$ *hat nur die Nullstelle* $\overset{\circ}{y} = 0$ *und wir erhalten nach Schritt 1 die partikuläre Lösung* $y \equiv 0$*, die nur für* $y_0 = 0$ *das Anfangswertproblem löst. Sei nun* $y \not\equiv 0$ *angenommen. Schritt 2 und Schritt 3 führen zu*

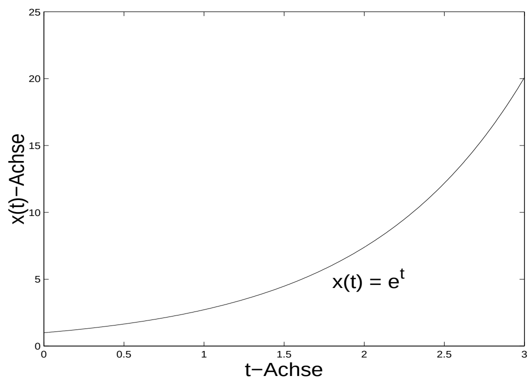
$$\int \frac{dy}{y} = \int a\, dx \quad \Longleftrightarrow \quad \log|y(x)| = ax + c \quad \Longleftrightarrow \quad |y(x)| = e^{ax+c},$$

das heißt, die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = \alpha e^{ax}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Aus $y(0) = \alpha \overset{!}{=} y_0$ *folgt*

$$y(x) = y_0 e^{ax}.$$



Skizze der Lösung $y(x) = y_0 e^{\alpha x}$ für $y_0 = \alpha = 1$.

Beispiel 14.4. *Gegeben sei das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = -y(x)^2, \quad y(0) = -1.$$

In (14.6) *haben wir* $g(x) = 1$ *und* $h(y) = -y^2$. $h(y)$ *hat eine Nullstelle in* $\overset{\circ}{y} = 0$, *nach Schritt 1 ergibt sich die partikuläre Lösung* $y \equiv 0$, *die aber der Anfangsbedingung* $y(0) = -1$ *nicht genügt. Schritt 2 und 3 liefern*

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int 1\,dx \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = x + c \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x+c}.$$

Wegen

$$y(0) = \frac{1}{c} \overset{!}{=} -1$$

folgt $c = -1$ *und somit*

$$y(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Die Lösung existiert jedoch nur für $x \in [0, 1)$*!*

14.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition 14.3. *Sei* $\mathbf{A}(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \mapsto \mathbf{A}(x)$, $x \in [x_0, X] = I \subset \mathbb{R}$, *stetig. Die Differentialgleichung*

$$\mathbf{y}'(x) - \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) = \mathbf{b}(x)$$

heißt **lineare Differentialgleichung 1. Ordnung** *für die gesuchte Funktion* $\mathbf{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Satz 14.2. *Seien* $I = [x_0, X]$, $x \in (x_0, X)$ *und* $\mathbf{A}(x), \mathbf{b}(x) \in C^1(I, \mathbb{R})$. *Dann ist das Anfangswertproblem*

$$\mathbf{y}'(x) - \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) = \mathbf{b}(x), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

eindeutig lösbar.

Falls $\mathbf{b}(x) \equiv \mathbf{0}$, heißt die Differentialgleichung **homogen**. Ansonsten ist $\mathbf{b}(x)$ die **Inhomogenität**. Für homogene lineare Differentialgleichungen gilt das **Superpositionsprinzip**:

Satz 14.3 (Superpositionsprinzip). *Seien $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ zwei Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung*

$$\mathbf{y}'(x) - \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) = \mathbf{0},$$

dann ist auch

$$\bar{\mathbf{y}} := \alpha \mathbf{y}_1 + \beta \mathbf{y}_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

eine Lösung.

Beweis. Aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}' &= \alpha \mathbf{y}_1' + \beta \mathbf{y}_2', \\ \mathbf{A}\bar{\mathbf{y}} &= \alpha \mathbf{A}\mathbf{y}_1 + \beta \mathbf{A}\mathbf{y}_2 \end{aligned}$$

folgt durch Subtraktion

$$\bar{\mathbf{y}}' - \mathbf{A}\bar{\mathbf{y}} = \alpha(\underbrace{\mathbf{y}_1' - \mathbf{A}\mathbf{y}_1}_{=\mathbf{0}}) + \beta(\underbrace{\mathbf{y}_2' - \mathbf{A}\mathbf{y}_2}_{=\mathbf{0}}) = \mathbf{0},$$

das heißt die Behauptung. □

Definition 14.4. *Die Funktionen*

$$\mathbf{y}_i \in C^1(I, \mathbb{R}^n), \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad (m \leq n)$$

heißen **linear unabhängig**, *falls aus*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{y}_i(x) \equiv \mathbf{0}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

folgt $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, m$ (vgl. Mathematik I (Lineare Algebra)).

Ein **Fundamentalsystem** zur linearen homogenen Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x), \quad \mathbf{A}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

besteht aus n linear unabhängigen Lösungen $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$. Die Matrix

$$\mathbf{W}(x) = [\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)], \quad x \in I$$

heißt **Wronski-Matrix**. Für diese gilt die Beziehung

$$\mathbf{W}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{W}(x). \tag{14.7}$$

Satz 14.4. *Zu jeder linearen homogenen Differentialgleichung*

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x), \quad \mathbf{A}(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

existiert ein Fundamentalsystem. $\mathbf{y} \in C_1(I, \mathbb{R}^n)$ *ist genau dann eine Lösung dieser Differentialgleichung, falls ein* $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ *existiert mit*

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{W}(x)\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i(x).$$

Die Determinante $\det \mathbf{W}(x)$ *ist entweder* $\equiv 0$ *oder überall* $\neq 0$.

Alle Lösungen einer linearen inhomogenen Differentialgleichung sind gegeben als die Summe einer **speziellen Lösung** der inhomogenen Gleichung und den Lösungen der homogenen Gleichung, genauer:

Satz 14.5. *Sei* $\mathbf{y}_s \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung*

$$\mathbf{y}'(x) - \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) = \mathbf{b}(x).$$

Dann besitzt jede Lösung $\mathbf{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *die Darstellung*

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_s(x) + \mathbf{W}(x)\mathbf{c}.$$

mit einem geeigneten $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

Eine spezielle Lösung findet man u.a. durch **Variation der Konstanten**. Ansatz: Die spezielle Lösung habe die Form

$$\mathbf{y}_s(x) = \mathbf{W}(x)\mathbf{c}(x). \tag{14.8}$$

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_s'(x) &= \mathbf{W}(x)\mathbf{c}'(x) + \mathbf{W}'(x)\mathbf{c}(x),\\ \mathbf{y}_s'(x) &= \mathbf{A}(x)\mathbf{y}_s(x) + \mathbf{b}(x)\end{aligned}$$

folgt durch Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung

$$\mathbf{W}(x)\mathbf{c}'(x) + \mathbf{W}'(x)\mathbf{c}(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}_s(x) + \mathbf{b}(x). \tag{14.9}$$

Mit (14.7) kann in (14.9) $\mathbf{W}'(x)$ ersetzt werden

$$\mathbf{W}(x)\mathbf{c}'(x) + \mathbf{A}(x)\mathbf{W}(x)\mathbf{c}(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}_s(x) + \mathbf{b}(x).$$

Setzen wir den Ansatz (14.8) ein, folgt weiter

$$\mathbf{W}(x)\mathbf{c}'(x) + \mathbf{A}(x)\mathbf{W}(x)\mathbf{c}(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{W}(x)\mathbf{c}(x) + \mathbf{b}(x),$$

also

$$\mathbf{W}(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{b}(x).$$

Auflösen dieser Gleichung nach $\mathbf{c}'(x)$ liefert $\mathbf{c}'(x) = \mathbf{W}(x)^{-1}\mathbf{b}(x)$ bzw.

$$\mathbf{c}(x) = \int_{x_0}^{x} \mathbf{W}(t)^{-1}\mathbf{b}(t)dt.$$

Eingesetzt in (14.8) ergibt sich schließlich

$$\mathbf{y}_s(x) = \mathbf{W}(x) \int_{x_0}^{x} \mathbf{W}(t)^{-1}\mathbf{b}(t)dt.$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{W}(x)\mathbf{c} + \mathbf{W}(x) \int_{x_0}^{x} \mathbf{W}^{-1}(t)\mathbf{b}(t)dt, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n.$$

Ist eine Anfangsbedingung $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ vorgegeben, so gilt wegen $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{W}(x_0)\mathbf{c}$, das heißt

$$\mathbf{c} = \mathbf{W}^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0,$$

der folgende Satz:

Satz 14.6. *Das Anfangswertproblem*

$$\mathbf{y}'(x) - \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) = \mathbf{b}(x), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{W}(x)\mathbf{W}^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{W}(x) \int_{x_0}^{x} \mathbf{W}^{-1}(t)\mathbf{b}(t)dt.$$

14.5 Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir wollen hier den Spezialfall einer linearen Differentialgleichung betrachten, bei der die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}(x)$ nur konstanten Einträge besitzt

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x). \tag{14.10}$$

Beispiel 14.5. *Sei*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{y}'(x) - \mathbf{A}\mathbf{y}(x) = \mathbf{0}.$$

Um ein Fundamentalsystem zu finden, machen wir (im Komplexen) den Ansatz

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{c}e^{\lambda x}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{C}^3.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\lambda \mathbf{c}e^{\lambda x} - \mathbf{A}\mathbf{c}e^{\lambda x} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Dies ist ein Eigenwertproblem. Das charakteristische Polynom lautet

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda - 4 \overset{!}{=} 0,$$

woraus die drei Eigenwerte

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 1 + i, \quad \lambda_3 = 1 - i$$

folgen. Wir bestimmen nun die entsprechenden Eigenvektoren $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$.

1. *zu* $\lambda_1 = -2$*:*

$$\mathbf{0} \overset{!}{=} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{c}_1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{c}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

2. *zu* $\lambda_2 = 1 + i$*:*

$$\mathbf{0} \overset{!}{=} (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -1-i & 2 & 0 \\ 0 & -1-i & 2 \\ -1 & 1 & -1-i \end{bmatrix} \mathbf{c}_2$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{c}_2 = \beta \begin{bmatrix} 2-2i \\ 2 \\ 1+i \end{bmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{C}.$$

3. zu $\lambda_3 = 1 - i$: λ_3 ist konjugiert komplexe Nullstelle zu λ_2, daher folgt

$$\mathbf{c}_3 = \gamma \begin{bmatrix} 2+2i \\ 2 \\ 1-i \end{bmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{C}.$$

Da die Eigenvektoren linear unabhängig sind, bilden diese im Komplexen ein Fundamentalsystem, das heißt jede (komplexe) Lösung hat die Form

$$\mathbf{y}(x) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2x} + \beta \begin{bmatrix} 2-2i \\ 2 \\ 1+i \end{bmatrix} e^{(1+i)x} + \gamma \begin{bmatrix} 2+2i \\ 2 \\ 1-i \end{bmatrix} e^{(1-i)x}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Realteil und Imaginärteil der Lösung sind auch jeweils zwei linear unabhängige, aber rein reelle Lösungen. Hieraus folgt zum Beipiel das reelle Fundamentalsystem

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1(x) &= \mathrm{Re}(\mathbf{c}_1 e^{-2x}) = e^{-2x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{y}_2(x) &= \mathrm{Re}(\mathbf{c}_2 e^{(1+i)x}) = e^{x} \left\{ \cos x \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin x \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \\
\mathbf{y}_3(x) &= \mathrm{Im}(\mathbf{c}_2 e^{(1+i)x}) = e^{x} \left\{ \cos x \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin x \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Definition 14.5. *Eine Folge von Matrizen $(\mathbf{A}_k)_{k\in N}$, $\mathbf{A}_k = (a_{i,j}^{(k)}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt konvergent gegen eine Matrix $\mathbf{A} = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, falls $\mathbf{A}_k$ komponentenweise gegen $\mathbf{A}$ konvergiert*

$$\lim_{k\to\infty} a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j} \quad \textit{für alle} \quad 1 \le i, j \le n.$$

Weiter definieren wir

$$e^{\mathbf{A}x} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k x^k.$$

Ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ heißt **Hauptvektor** *der Stufe $l > 1$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, falls $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^l \mathbf{v} = \mathbf{0}$ und $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{l-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ gilt. Ein Hauptvektor der Stufe 1 ist ein Eigenvektor.*

Satz 14.7. *Die Matrix $e^{\mathbf{A}x}$ ist eine Wronski-Matrix zur Differentialgleichung* (14.10). *Es gibt genau n linear unabhängige Hauptvektoren $\mathbf{v}_i$ der Stufe l_i zu den Eigenwerten $\lambda_i \in C$ der Matrix $\mathbf{A}$ und die*

$$\mathbf{y}_i(x) = e^{\lambda_i x} \left(\mathbf{v}_i + x(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_i + \ldots + \frac{x^{l_i - 1}}{(l_i - 1)!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{l_i - 1} \mathbf{v}_i \right) \tag{14.11}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ bilden ein Fundamentalsystem.

Beweis. Die erste Aussage erhält man durch Einsetzen von $(e^{\mathbf{A}x})' = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}x}$ in die Differentialgleichung. Aus

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}x}v_i &= e^{\lambda_i x}e^{(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})x}\mathbf{v}_i \\ &= e^{\lambda_i x}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^j\mathbf{v}_i \\ &= e^{\lambda_i x}\sum_{j=0}^{l_i-1}\frac{x^j}{j!}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^j\mathbf{v}_i \\ &= \mathbf{y}_i(x) \end{aligned}$$

ergibt sich Gleichung (14.11). Die lineare Unabhängigkeit der $\mathbf{y}_i(x)$ folgt schließlich sich aus der linearen Unabhängigkeit der $\mathbf{v}_i$. □

Bemerkung 14.2. *Im Beipiel 14.5 sind die 3 Hauptvektoren der Matrix* $\mathbf{A}$ *alle einstufig (also Eigenvektoren).*

14.6 Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Eine **explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung** ist eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)}(x) = f(x; y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

oder kürzer

$$y^{(n)} = f(x; y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{14.12}$$

Eine solche Differentialgleichung läßt sich auf ein (größeres) System 1. Ordnung überführen. Dazu definieren wir

$$z_1 = y, \quad z_2 = y', \quad \dots, \quad z_n = y^{(n-1)}.$$

Es folgt dann ein System aus n Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2, \\ z_2' &= z_3, \\ &\vdots \\ z_{n-1}' &= z_n, \\ z_n' &= f(x, z_1, \dots, z_n). \end{aligned} \tag{14.13}$$

y ist genau dann Lösung von (14.12), falls $[z_1, \dots, z_n]^T$ Lösung von (14.13) ist. Somit lauten die Anfangsbedingungen

$$z_1(t_0) = y(t_0) = y_0, \quad z_2(t_0) = y'(t_0) = y_1, \quad \dots \quad z_n(t_0) = y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}.$$

Von wesentlicher Bedeutung sind lineare Systeme 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Beispiel 14.6. *Wir betrachten die Gleichung einer gedämpften Schwingung am Beipiel einer Feder*

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\text{Trägheitskraft}} + \underbrace{k\dot{x}}_{\text{Reibungskraft}} + \underbrace{Dx}_{\text{Rückstellkraft}} = \underbrace{F(t)}_{\text{äußere Kraft}} \tag{14.14}$$

(m = Masse, k = Dämpfung, D = Federkonstante). Unter der Annahme, daß keine Kraft von außen auf das System einwirkt ($F(t) = 0$), erhalten wir die homogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0. \tag{14.15}$$

Mit dem Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}, \quad \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

entsteht die charakteristische Gleichung

$$m\lambda^2 + k\lambda + D = 0.$$

Als quadratische Gleichung hat sie zwei Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{D}{m}}. \tag{14.16}$$

Hier müssen wir drei Fälle unterscheiden, in denen sich das System ganz verschieden verhält.

1. *Bei $k < 2\sqrt{mD}$ (schwache Dämpfung) wird der Radikant negativ. Mit den Abkürzungen*

   $$\delta = \frac{k}{2m}, \quad i\omega = \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{D}{m}} \in \mathbb{R}$$

   erhalten wir

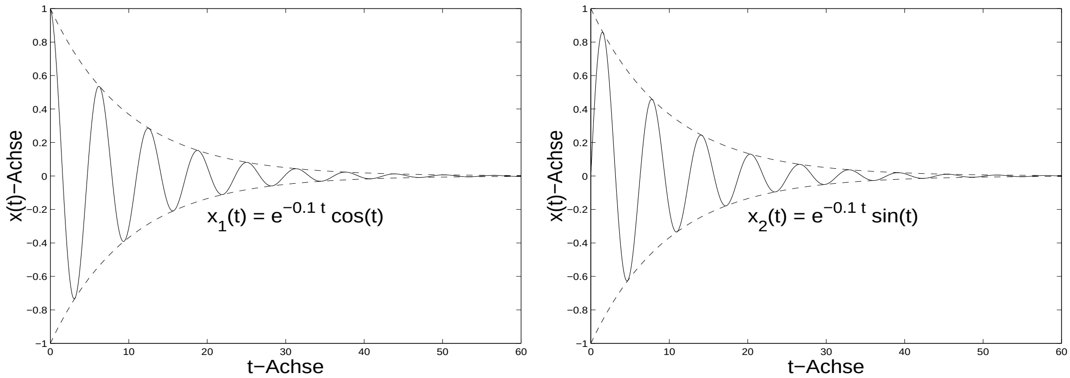
   $$x_{1/2} = e^{-(\delta \pm i\omega)t}.$$

   Real- und Imaginärteil der Lösung sind gegeben durch

   $$x_1 = e^{-\delta t}\cos(\omega t), \quad x_2 = e^{-\delta t}\sin(\omega t).$$

   Alle Lösungen haben somit die Form

   $$x = c_1 e^{-\delta t}\cos(\omega t) + c_2 e^{-\delta t}\sin(\omega t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$



Die beiden Fundamentallösungen x_1 und x_2 für $\delta = 0.1$ und $\omega = 1$.

2. *Bei $k > 2\sqrt{mD}$ (starke Dämpfung) wird die Wurzel in* (14.16) *reell und trägt selbst zur Dämpfung bei. Wählen wir δ wie oben und setzen*

$$\omega = \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{D}{m}} \in \mathbb{R}$$

(ω heißt Eigenschwingung), so ergibt sich die reelle Lösung

$$x_{1/2} = e^{-(\delta \pm \omega)t}.$$

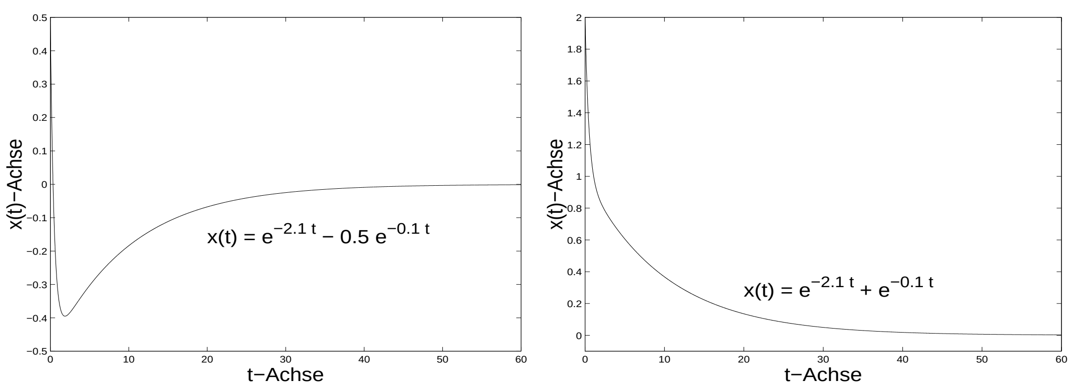
Die allgemeine (reelle) Lösung von (14.15) *ist gegeben durch*

$$x = c_1 e^{-(\delta+\omega)t} + c_2 e^{-(\delta-\omega)t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\delta > \omega$ ist für jeden Anfangszustand $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Diese Funktion hat höchstens eine Nullstelle ($x(t) = 0$) und ein relatives Extremum ($\dot{x}(t) = 0$).



Zwei spezielle Lösungen für $\delta = 1.1$ und $\omega = 1$.

3. *Bei* $k = 2\sqrt{mD}$ *(mittlere Dämpfung) verschwindet die Wurzel in* (14.16). *Der Ansatz liefert nur eine Lösung*

$$x_1 = e^{-\delta t}.$$

Es gibt aber noch eine zweite, von der ersten linear unabhängige Lösung: Der Ansatz

$$x_2(t) = te^{-\delta t}$$

liefert

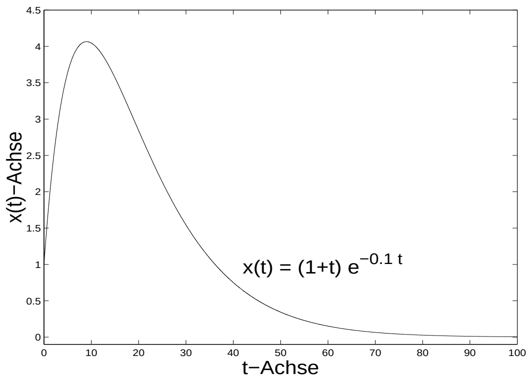
$$\dot{x}_2 = e^{-\delta t} - \delta te^{-\delta t}, \quad \ddot{x}_2 = -2\delta e^{-\delta t} + \delta^2 te^{-\delta t}.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung folgt

$$\big(m(-2\delta + \delta^2 t) + k(1 - \delta t) + Dt\big)e^{-\delta t} = 0.$$

Somit hat jede Lösung von (14.15) *die Form*

$$x = c_1 e^{-\delta t} + c_2 te^{-\delta t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$



Skizze der Lösung $x = c_1 e^{-\delta t} + c_2 te^{-\delta t}$ *für* $c_1 = c_2 = 1$ *und* $\delta = 0.1$.

In (14.14) *wirke nun von außen die Kraft*

$$F(t) = F_0 \cos(\bar{\omega} t) = \mathrm{Re}(e^{i\bar{\omega} t}).$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung machen wir den **Ansatz vom Typ der rechten Seite** *(im Komplexen)*

$$x = x_0 e^{i\bar{\omega} t}, \quad \dot{x} = ix_0\bar{\omega} e^{i\bar{\omega} t}, \quad \ddot{x} = -x_0\bar{\omega}^2 e^{i\bar{\omega} t}.$$

Es folgt

$$x_0\big(-m\bar{\omega}^2 + ik\bar{\omega} + D\big) = F_0,$$

woraus sich

$$x_0 = \frac{F_0}{-m\bar{\omega}^2 + ik\bar{\omega} + D}$$

ergibt. Der Betrag von x_0 heißt (physikalische) Amplitute:

$$|x_0| = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2)^2 + k^2\bar{\omega}^2}}, \quad \omega_0 = \sqrt{D}m.$$

Für $\bar{\omega} = \omega_0 = \sqrt{D}m$ wird diese am größten (Resonanz bzw. Resonanzkatastrophe).

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung haben die Form

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(x) y^{(i)}(x) = b(x)$$

mit

$$x \in I, \quad \alpha_i, b \in C(I, \mathbb{R}), \quad \mathbf{y} \in C^n(I, \mathbb{R}).$$

Substituieren wir wieder

$$z_1 = y, \quad z_2 = y', \quad \ldots, \quad z_n = y^{(n-1)}$$

ergibt sich das System

$$z_1' = z_2, \quad z_2' = z_3, \quad \cdots \quad z_{n-1}' = z_n, \quad z_n' = -\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x) z_i(x) + b(x)$$

oder kurz

$$\mathbf{z}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{z}(x) + \mathbf{b}(x), \tag{14.17}$$

wobei

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Sinngemäß übertragen sich viele Sätze.

Satz 14.8. *Gegeben sei die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung* (14.17). *Die homogene Gleichung besitzt genau n unabhängige Lösungen $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n$. Für die Wronski-Matrix der Differentialgleichung*

$$\mathbf{W}(x) = [\mathbf{z}_1(x), \mathbf{z}_2(x), \ldots, \mathbf{z}_{n-1}(x)]$$

gelten die gleichen Aussagen wie in den Sätzen 14.4, 14.6 und 14.5. Ist insbesondere $\mathbf{z}_s$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung, dann ist jede Lösung von der Form

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_s(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{z}_i(x), \quad c_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Das Anfangswertproblem zum Anfangswert $\mathbf{z}(x_0) = \mathbf{z}_0$ ist eindeutig lösbar.

14.7 Aufgaben

14.1. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y'(x) = 2xy,\ y(0) = 3$!

14.2. Lösen Sie die Randwertaufgabe $y''(x) = 1,\ y(0) = 1,\ y(1) = 3$!

14.3. In welcher Zeit kühlt sich ein Körper, der auf 100°C erhitzt wurde, in einem Raum mit der Temperatur 20°C bis auf 25°C ab, wenn er sich nach 10 Minuten auf 60°C abgekühlt hat und die Geschwindigkeit der Abkühlung proportional der Temperaturdifferenz ist?

14.4. Bestimmen Sie die Kurve, die durch den Punkt $P(2, 2)$ geht und für die der durch die Schnittpunkte A und B mit den Koordinatenachsen begrenzte Abschnitt einer beliebigen Kurventangente vom jeweiligen Berührungspunkt M halbiert wird!

14.5. Lösen Sie die inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung $y' - 3\dfrac{y}{x} = x$!

14.6. Lösen Sie die Differenzialgleichung $(1 + y^2)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = 0$!

14.7. Lösen Sie die Differenzialgleichungen

a) $y' = y^2$,
b) $y' = (y - 3)\cos x$,
c) $y' = (2y + 1)\cot x$,
d) $x^2 y' + y^2 = 0$,
e) $y' + 2xy = 2x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$,
f) $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln \dfrac{y}{x}\right)$ (Hinweis: Substitution: $t(x) = \dfrac{y(x)}{x}$)!

14.8. Lösen Sie die Differenzialgleichung $y' - (\tan x)\, y = \cos x$!

14.9. In einem elektrischen Stromkreis befinden sich eine Spule mit der Selbstinduktionsspannung $U_L(t) = LI'(t)$ und ein Widerstand mit dem Spannungsabfall $U_R(t) = RI(t)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde eine Wechselspannung $U(t) = \sin \omega t$ angelegt. Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Stromes $I(t)$!

14.10. Gegeben sei die Differenzialgleichung $x^2y'' + xy' - y = 0$.

a) Zeigen Sie, dass $y_1(x) = x$ eine spezielle Lösung dieser Differenzialgleichung ist!

b) Lösen Sie davon ausgehend die Differenzialgleichung allgemein durch Reduktion der Ordnung mit der Substitution $y(x) = y_1(x)u(x)$ und Lösung der sich dadurch ergebenden Differenzialgleichung für u' !

14.11. Lösen Sie die folgenden homogenen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

a) $y'' - 4y' + 3y = 0$,
b) $y'' - 4y' + 13y = 0$,
c) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$,
d) $y^{(4)} - 16y = 0$,
e) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$!

14.12. Lösen Sie die Anfangswertaufgaben

a) $y''' - 3y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 4$,
b) $\ddot{s} + 2\dot{s} + 2s = 0, \quad s(0) = \dot{s}(0) = 1$!

14.13. Lösen Sie die folgenden inhomogenen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

a) $y'' - 4y' + 3y = 9x\mathrm{e}^{4x}$,
b) $y'' - 4y' + 3y = 2\mathrm{e}^{x}$,
c) $y'' - 2y' + y = x\mathrm{e}^{2x}$,
d) $y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^{x}$,
e) $y'' - 4y = 8x^3$,
f) $y'' - 2y' = x^2 - x$!

14.14. Lösen Sie die Differenzialgleichungen

a) $y'' + 5y' + 6y = \mathrm{e}^{-x}$,

b) $y'' + y' - 182y = -1408x\mathrm{e}^{2x}$,

c) $y'' + 4y = \sin 2x$,

d) $y''' + 9y' = 7\cos 4x$,

e) $y''' + y'' + 15y' - 17y = 10\mathrm{e}^{x}$,

f) $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 5$!

14.15. Lösen Sie die Randwertaufgabe $y'' + 9y = \sin x,\ y(0) = 2,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1$!

14.16. a) An einen an einer Feder aufgehängten Massepunkt greife ab dem Zeitpunkt $t = 0$ eine periodisch wirkende äußere Kraft $F \sin 5t$ an, die bei Vernachlässigung der Dämpfung eine Schwingung nach der Gleichung $\ddot{x}(t) + 16x(t) = F \sin 5t$ auslöst. Ermitteln Sie die Auslenkung des Massepunktes gegenüber der Gleichgewichtslage!

b) Bei welcher äußerer Kraft würde es für die Gleichung $\ddot{x}(t) + 16x(t) = F(t)$ zur Resonanz kommen? Begründen Sie mit Hilfe des zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung zu verwendenden Ansatzes, dass es in diesem Falle zur Zerstörung des Systems kommen würde! (Die Lösung muss nicht ausgerechnet werden.)

14.17. Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem $\begin{aligned} \dot{x} &= 2x+8y \\ \dot{y} &= 3x-8y \end{aligned}$

a) direkt,

b) durch Rückführung auf eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung für x,

c) durch Rückführung auf eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung für y !

14.18. a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} !$$

b) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} !$$

14.19. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - 2y - z \\ \dot{y} &= 3x - 5y - 3z \\ \dot{z} &= 2x - 4y - z \end{aligned}$$
$$x(0) = 2,\ y(0) = -2,\ z(0) = -1 \quad !$$

14.20. Lösen Sie das inhomogene System $\begin{aligned} \dot{x} &= -2y\mathrm{e}^{-t} \\ \dot{y} &= -2x + \mathrm{e}^{t} \end{aligned}$!

14.21. Lösen Sie das inhomogene Differenzialgleichungssystem $\begin{aligned} \dot{x} &= -2y \\ \dot{y} &= -2x+2\mathrm{e}^{3t} \end{aligned}$!

14.22. Lösen Sie das inhomogene System $\begin{aligned} \dot{x} - 2x - 8y &= 5\mathrm{e}^{t} \\ \dot{y} - 3x + 8y &= -18\mathrm{e}^{t} \end{aligned}$!

14.23. Lösen Sie die folgenden Systeme gewöhnlicher Differenzialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

a) $\begin{aligned} \dot{x} &= x-2y-z \\ \dot{y} &= -x+y+z \\ \dot{z} &= x-z \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} \dot{x} &= y+z \\ \dot{y} &= x+z \\ \dot{z} &= x+y \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -x+y+z \end{aligned}$!

14.24. Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung des Systems $\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& -7x + y \\ \dot{y} &=& -2x - 5y \end{array}$!

Kapitel 15
Fourierreihen

15.1 Formeln der Fourierentwicklung

Definition 15.1. *Eine Funktion $f(x)$ einer reellen Veränderlichen heißt* **periodisch** *mit der Periodenlänge $T > 0$, wenn $f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Sie heißt* **gerade**, *wenn $f(-x) = f(x)$ und* **ungerade**, *wenn $f(-x) = -f(x)$ ist.*

Gerade Funtkionen sind symmetrisch bezüglich der y–Achse, ungerade Funktionen sind symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

In vielen Situationen ist es günstig, periodische Funktionen durch **trigonometrische Polynome**

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left(a_k \cos k\frac{2\pi}{T}x + b_k \sin k\frac{2\pi}{T}x \right)$$

zu approximieren. Da die Winkelfunktionen cos und sin die Periodenlänge 2π haben, wird durch den Faktor $\frac{2\pi}{T}$ erreicht, dass $\cos k\frac{2\pi}{T}x$ und $\sin k\frac{2\pi}{T}x$ die Periodenlänge T haben. Damit hat auch $S_k(x)$ die Periodenlänge T.

Anzustreben ist $S_k \to f$ für $k \to \infty$. Im „quadratischen Mittel“, d.h. im Sinne von

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T (S_k(x) - f(x))^2 \mathrm{d}x$$

wird das für beschränkte und stückweise stetige Funktionen f erreicht, wenn die Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cos k\frac{2\pi}{T}x \,\mathrm{d}x \ \ (k = 0, 1, 2, \dots), \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \sin k\frac{2\pi}{T}x \,\mathrm{d}x \ \ (k = 1, 2, \dots)$$

gewählt werden.

Satz 15.1 (Konvergenz der Fourierreihe)**.** *Kann das Intervall $[0, T]$ in endlich viele Intervalle zerlegt werden, in denen die Funktion $f(x)$ stetig und monoton ist und sind an jeder Unstetigkeitsstelle die einseitigen Grenzwerte $f(x-0)$ und $f(x+0)$ definiert (Dirichlet–Bedingung), so konvergiert die* **Fourierreihe**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\frac{2\pi}{T}x + b_k \sin k\frac{2\pi}{T}x \right)$$

gegen $f(x)$ in Stetigkeitspunkten von f und gegen $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ an Sprungstellen von f.

An Sprungstellen konvergiert die Fourierreihe also gegen den Mittelwert der beiden einseitigen Grenzwerte.

Da die Kosinus–Funktionen einschließlich $\cos 0x = 1$, was dem Koffizienten $\frac{a_0}{2}$ entspricht, gerade sind, gilt $a_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ für ungerade Funktionen. Da die Sinus–Funktionen ungerade sind, gilt $b_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ für gerade Funktionen.

Hat die Funktion $f(x)$ die Periodenlänge $T = 2\pi$, so vereinfachen sich die Formeln für die Fourierentwicklung zu

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

mit $$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^T f(x)\cos kx \,\mathrm{d}x \ (k=0,1,2,\ldots), \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^T f(x)\sin kx \,\mathrm{d}x \ (k=1,2,\ldots).$$

15.2 Aufgaben

15.1. Die Funktion $f(t) = |t|, \ -\pi \le t \le \pi$ werde 2π–periodisch fortgesetzt.
a) Zeichnen Sie die Funktion!
b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!
c) Bestimmen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$!

15.2. Entwickeln Sie $f(x) = \cos^2 x$ in eine Fourierreihe!

Hinweis: Formen Sie den Integranden $\cos^2 x \cos 2kx$ durch zweimalige Anwendung der Formel $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$ in eine Summe von Kosinusfunktionen um!

15.3. Gegeben sei die Funktion $f(x) = |\sin 2x|$.
a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!
b) Wie groß ist die (kürzeste) Periodenlänge?
c) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!
d) Bestimmen Sie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$!

15.4. Die Funktion $f(x) = x^2, \ -1 \le x \le 1$ werde periodisch fortgesetzt.
a) Skizzieren Sie die Funktion!

b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!

c) Bestimmen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$!

15.5. Die Funktion $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \sin x & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$ werde periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!

b) Approximieren Sie $f(x)$ mittels Fourierentwicklung durch ein trigonometrisches Polynom 2. Grades $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2} a_k \cos kx + b_k \sin kx$!

Hinweis: $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

15.6. Eine 2π–periodische Funktion $f(x)$ sei bezüglich $x = \frac{\pi}{2}$ symmetrisch, d.h., es gelte $f(\frac{\pi}{2} - x) = f(\frac{\pi}{2} + x)$. Welche ihrer Fourierkoeffizienten sind mit Sicherheit gleich 0 ?

Kapitel 16
Methoden der numerischen Mathematik

16.1 Vektor- und Matrixnormen

Definition 16.1 (Vektornorm)**.** *Eine* **Vektornorm** *des* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Abbildung* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|$, *die für alle* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *die* **Normbedingungen** *erfüllt:*

i. $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,

ii. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$, *(Homogenität)*

iii. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. *(Dreiecksungleichung)*

Wir wollen im weiteren folgende drei Vektornormen in Betracht ziehen:

1–Norm: $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,

Euklidische Norm: $\|\mathbf{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$,

Maximumnorm: $\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Die Euklidische Norm wurde schon in Definition 2.2 eingeführt. Für sie gilt für das dort eingeführte Skalarprodukt $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$.

Definition 16.2 (Matrixnorm). *In $\mathbb{R}^n$ sei eine beliebige Vektornorm $\|\cdot\|$ gegeben. Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die (natürliche)* **Matrixnorm** *defininiert durch*

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Auch für Matrixnormen sind die obigen drei Normbedingungen erfüllt, zusätzlich haben wir jedoch die **Submultiplikativität**

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|. \tag{16.1}$$

Vektornorm und Matrixnorm sind durch die Abschätzung

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$$

miteinander gekoppelt. Beachten wir, daß die Matrix $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathbf{T}$ n nichtnegative Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ besitzt (vegleiche Mathematik I (Lineare Algebra)) und setzen

$$\rho(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) := \max_{1\leq i\leq n} \lambda_i,$$

so gilt der

Satz 16.1. *Gegeben sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es gelten die Äquivalenzen*

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$
$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)},$$
$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *bzw.* $\|\cdot\|_\infty$ *heißen* **Spaltenbetragssummennorm**, **Spektralnorm** *bzw.* **Zeilenbetragssummennorm** *der Matrix* $\mathbf{A}$.

Bemerkung 16.1. *Für alle Matrixnormen gilt*

$$\|\mathbf{I}\| = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1.$$

Wir werden in den folgenden Abschnitten häufig von Vektor- bzw. Matrixnormen Gebrauch machen und bezeichnen diese einfachheitshalber mit $\|\cdot\|$, falls eine Aussage für alle Vektor- bzw. Matrixnormen gilt.

16.2 Fehlerrechnung

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist in einem Computer i.a. in der Fließkommadarstellung

$$a = M \cdot 10^E, \quad |M| < 1, \quad E \in \mathbb{Z}$$

gespeichert. M heißt **Mantisse** und E **Exponent**. Natürlich stehen für deren Darstellung nur endlich viele Stellen m bzw. e zur Verfügung. Nehmen wir $m = 4$ und $e = 2$ an, so ergibt sich für $a = 2/3 = 0.\overline{6}$ die (gerundete) Maschinenzahl

$$\tilde{a} = 0.6667 \cdot 10^0.$$

Dies ergibt einen Fehler von

$$|\tilde{a} - a| = |0.6667 \cdot 10^0 - 0.\overline{6}| = 0.0000\overline{3}.$$

Für jede beliebige Zahl

$$|a| \in [\underline{a}, \overline{a}] \cup 0 = [0.1000 \cdot 10^{-99}, 0.9999 \cdot 10^{+99}] \cup 0$$

ist dieser Fehler nach oben beschränkt durch

$$|\tilde{a} - a| \leq 0.5 \cdot 10^{-5} =: \mathrm{eps}\,.$$

Die Zahl eps nennt man **Maschinengenauigkeit**. Beim heute üblichen IEEE-Standard wird in Computern eine Zahl in Binärdarstellung, das heißt zur Basis 2, dargestellt

$$a = M \cdot 2^E, \quad |M| < 1, \quad E \in \mathbb{Z}$$

mit $m = 52$ und $e = 12$. Unter Beachtung der Vorzeichenbits von m und e folgt hieraus die Maschinengenauigkeit

$$\mathrm{eps} = 0.5 \cdot 2^{-51} = 2.220446049250313e - 16 \approx 10^{-16}$$

und

$$[\underline{a}, \overline{a}] = [2^{-1022}, 2^{1024} - 1].$$

Fehler in der numerischen Lösung entstehen aber auch durch verfälschte Eingabedaten oder Verfahrensfehler. Ist $\tilde{a}$ eine Approximation von a, dann ist mit $\triangle a = a - \tilde{a}$ der **absolute Fehler** gegeben durch

$$\epsilon_{\text{abs}} = |\triangle a|.$$

Beim **relativen Fehler** hingegen wird auch die Größe von a beachtet

$$\epsilon_{\text{rel}} = \frac{|\triangle a|}{|a|}.$$

Eine einfache Abschätzung für den relativen Fehler erhält man wie folgt: hängt die exakte Ausgangsgröße a stetig von den Eingangsdaten x ab, bedeutet dies

$$a = \varphi(x).$$

Die gestörte Lösung $\tilde{a}$ resultiert aus gestörten Eingangsdaten $\tilde{x}$, das heißt

$$\tilde{a} = \varphi(\tilde{x}).$$

Ist die Funktion φ stetig differenzierbar, so folgt aus der Taylor-Entwicklung im Punkt x durch Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung

$$\tilde{a} \approx a + (x - \tilde{x})\varphi'(x).$$

Mit

$$\triangle x = x - \tilde{x}$$

folgt damit für den absoluten Fehler die Beziehung

$$\epsilon_{\text{abs}} = |\triangle a| \approx |\triangle x||\varphi'(x)|. \tag{16.2}$$

Der Proportionalitätsfaktor $|\varphi'(x)|$ mißt die Empfindlichkeit mit der a auf Änderungen von x reagiert. Sind $x, y \neq 0$, so folgt aus (16.2) eine Fortpflanzungsformel für den relativen Fehler

$$\epsilon_{\text{rel}} = \frac{|\triangle a|}{|a|} \approx |\triangle x| \frac{|\varphi'(x)|}{|\varphi(x)|}. \tag{16.3}$$

Bemerkung 16.2. *Dieses Ergebnis läßt sich auch auf mehrdimensionale Problemstellungen übertragen. Sind die Eingangsdaten* $\mathbf{x}$ *bzw.* $\tilde{\mathbf{x}}$ *aus* $\mathbb{R}^n$ *und die Ausgangsdaten* $\mathbf{a}$ *bzw.* $\tilde{\mathbf{a}}$ *aus* $\mathbb{R}^m$*, so ist* $\boldsymbol{\varphi}$ *eine vektorwertige Funktion in mehreren Veränderlichen* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Mit*

$$\triangle \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \triangle x_1 \\ \vdots \\ \triangle x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 - \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ x_n - \tilde{x}_n \end{bmatrix}, \quad \triangle \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \triangle a_1 \\ \vdots \\ \triangle a_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_1 - \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ a_m - \tilde{a}_m \end{bmatrix}$$

folgt die Beziehung

$$\triangle \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \triangle a_1 \\ \vdots \\ \triangle a_m \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangle x_1 \\ \vdots \\ \triangle x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})\triangle \mathbf{x}.$$

Es gilt für den absoluten Fehler analog zu (16.2)

$$\epsilon_{abs} = \|\triangle \mathbf{a}\| = \|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})\triangle \mathbf{x}\|$$

und für den relativen Fehler analog zu (16.3)

$$\epsilon_{rel} = \frac{\|\triangle \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\|\triangle \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} \approx \frac{\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})\triangle \mathbf{x}\|}{\|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})\|}.$$

Definition 16.3 (Kondition, Stabilität, Konvergenz)**.**

1. *Ein Problem ist gut konditioniert, wenn kleine Fehler in den Eingabedaten die Genauigkeit der Lösung nur unwesentlich beeinträchtigen.*

2. *Ein Verfahren ist stabil, wenn kleine Fehler in den Eingabedaten nur kleine Fehler in den Ausgabedaten nach sich ziehen.*

3. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge mit*
$$\lim_{n\to\infty} = a.$$
Konvergenz der Ordnung $p \geq 1$ *liegt vor, falls ein* $c > 0$ *existiert, so daß für hinreichend großes* $N_0 \in \mathbb{N}$ *gilt*
$$|a_{n+1} - a| \leq c\,|a_n - a|^p \quad \text{für alle} \quad n \geq N_0.$$
Im Falle $p = 1$ *muß zusätzlich* $c < 1$ *gelten; wir sprechen dann auch von linearer Konvergenz.*

Beispiel 16.1 (Kondition einer Matrix)**.** *Wir betrachten das (nichtsinguläre) lineare Gleichungssystem*
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$
und wollen untersuchen, wie sich eine Störung der rechten Seite $\mathbf{b}$ *auf die Lösung* $\mathbf{x}$ *auswirkt. Gehört zur gestörten rechten Seite* $\mathbf{b} + \triangle\mathbf{b}$ *die Lösung* $\mathbf{x} + \triangle\mathbf{x}$
$$\mathbf{Ax} + \triangle\mathbf{x} = \mathbf{b} + \triangle\mathbf{b},$$
so folgt aus $\mathbf{A}\triangle\mathbf{x} = \triangle\mathbf{b}$ *die Beziehung*
$$\triangle\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\triangle\mathbf{b}$$
und die Abschätzung
$$\|\triangle\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\triangle\mathbf{b}\|.$$
Für den relativen Fehler $\|\triangle x\|/\|\mathbf{x}\|$ *folgt wegen* $\|b\| = \|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$ *die (i.a. schlechte) Abschätzung*
$$\frac{\|\triangle\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\frac{\|\triangle\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \mathrm{cond}(\mathbf{A})\frac{\|\triangle\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$
Dabei bezeichnet $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) := \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$ *die Kondition einer Matrix. Aus* $\|\mathbf{I}\| = 1$ *und der Submultiplikativität* (16.1) *der Matrixnorm folgt sofort*
$$1 = \|\mathbf{I}\| \leq \|\mathbf{AA}^{-1}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| = \mathrm{cond}(\mathbf{A}),$$
das heißt für alle $\mathbf{A}$ *gilt* $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) \geq 1$.

Bemerkung 16.3. *Man beachte, die Kondition ist eine Eigenschaft des* **Problems***, die Stabilität ist eine Eigenschaft des* **Verfahrens***.*

16.3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Es sei für $t \in I = [t_0, T]$ das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

gegeben, wobei $f(t, y) \in C^0(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ einer Lipschitz-Bedingung in y mit Lipschitz-Konstante L genüge. Wir bestimmen eine Näherungslösung

$$y_i := y(t_i)$$

an diskreten Stellen $t_i \in I$, $i = 0, 1, \ldots, n$ mit

$$t_{i+1} = t_i + h_i, \quad \sum_{i=0}^{n-1} h_i = T - t_0.$$

Die $h_i > 0$ heißen **Schrittweiten** und wir setzen allgemein

$$h = \max_{i=0,\ldots,n-1} h_i.$$

Die Menge aller Punkte t_i

$$\pi_n = \{t_i : i = 0, 1, \ldots, n\}$$

heißt das **Gitter** über dem Intervall $[a, b]$. Ein Gitter heißt **äquidistant**, falls

$$h_i = h_{i+1}, \quad i = 0, 1 \ldots, n-1.$$

Die einfachste Näherung entsteht, indem wir den Differentialgradienten durch einen Differenzenquotienten ersetzen wie folgt

$$y'(t) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$$

(rechtsseitiger Differenzenquotient) oder

$$y'(t_i) \approx \frac{y(t_i) - y(t_{i-1}}{h_{i-1}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

(linksseitiger Differenzenquotient).

Im ersten Fall ergibt sich das **explizite Euler-Verfahren**

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = f(t_i, y_i)$$

bzw.

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_i, y_i).$$

Im zweiten Fall erhalten wir das **implizite Euler-Verfahren**

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = f(t_{i+1}, y_{i+1})$$

bzw.

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_{i+1}, y_{i+1}),$$

bei dem die Unbekannte y_{i+1} auch zur Auswertung von f benötigt wird. Ein Pseudocode des expliziten Euler-Verfahrens läßt sich wie folgt formulieren:

$y_0 := y(t_0)$ (Anfangswert)
for $i := 1$ **to** N **do**
  $y_i := y_{i-1} + h_{i-1} f(t_{i-1}, y_{i-1})$
end

Bemerkung 16.4. *Da bei impliziten Verfahren die zu berechnende Unbekannte y_{i+1} auch in der rechten Seite vorkommt, ist der Pseudocode eines solchen Verfahrens nicht so einfach aufgebaut wie der des expliziten Euler-Verfahrens bzw. des unten folgenden allgemeinen Algorithmus eines expliziten Verfahrens. Vielmehr führen implizite Verfahren auf große lineare Gleichungssysteme, die numerisch zu lösen sind, vergleiche Abschnitt 16.6. Wir werden uns daher im weiteren nur mit expliziten Verfahren beschäftigen.*

Das explizite als auch das implizite Verfahren sind **Einschrittverfahren**, da sich y_{i+1} nur aus y_i berechnet. Allgemein sind solche Verfahren beschrieben durch

$$y_{i+1} = y_i + h_i f_h(t_i, y_i).$$

$f_h(t, y)$ heißt **Verfahrensfunktion**. Wir wollen nun den **Verfahrensfehler** im Punkt t_i untersuchen: Hierzu bezeichne y die exakte Lösung zur Anfangsbedingung $y(t_i) = y_i$ und y_h die aus dem Verfahren gewonnene Näherungslösung. Es gilt

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h_i f_h(t_i, y_i) + h_i \tau_h(x_i, y_i) \tag{16.4}$$

mit der Fehlerfunktion $\tau_h(x_i, y_i)$. Ist $y \in C^2(I)$ können wir die Taylor-Entwicklung von y im Punkt t_i bestimmen

$$\begin{aligned} y(t_i + h) &= y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(\xi) \\ &= y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi), \qquad \xi \in (t_i, t_i + h). \end{aligned}$$

Für das explizite Euler-Verfahren gilt

$$f_h(x_i, y_i) = f(x_i, y_i),$$

womit in (16.4) folgt

$$\tau_h(t_i, y_i) = \frac{h_i}{2} y''(\xi).$$

Für jedes h ist demnach an einer beliebigen Stelle $t \in I$ der Verfahrensfehler gegeben durch

$$\tau_h(t, y(t)) = \mathcal{O}(h).$$

Ein solches Verfahren nennt man **Verfahren 1. Ordnung**. Ein Verfahren 2. Ordnung ist zum Beispiel das **modifizierte Euler-Verfahren** (Collatz 1960)

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2} f(t_i, y_i)),$$

denn falls $y \in C^3(I)$ gilt für dieses Verfahren

$$\tau_h(t, y(t)) = \mathcal{O}(h^2).$$

Verfahren höherer Ordnung gewinnt man allgemein durch den Ansatz

$$y_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_j k_j, \quad k_j = f(t_i + \beta_j h_i, y_i + h_i \sum_{l=1}^{j-1} \gamma_{j,l} k_l), \quad m \in \mathbb{N}. \qquad (16.5)$$

Die Verfahrensfunktion eines solchen Verfahrens (16.5) ist gegeben durch

$$f_h(t, y) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i k_i(t, h, m).$$

Hierbei sind $\alpha_j, \beta_j, \gamma_{j,l} \in \mathbb{R}$ so zu wählen, daß ein Verfahren möglichst hoher Ordnung entsteht.

Beispiel 16.2 (Verfahren von Heun)**.** *Beim Verfahren von Heun (1900) ist*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i), \\ k_2 &= f(t_i + h_i, y_i + h_i k_1). \end{aligned}$$

Für den Verfahrensfehler gilt

$$\tau_h(t, y(t)) = \mathcal{O}(h^2),$$

das heißt, dieses Verfahren ist ein Verfahren 2. Ordnung.

Beispiel 16.3 (Verfahren von Runge-Kutta)**.** *Das Verfahren von Runge-Kutta (1895) ist gegeben durch*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

mit

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_i, y_i),\\
k_2 &= f(t_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2}k_1),\\
k_3 &= f(t_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2}k_2),\\
k_4 &= f(t_i + h_j, y_i + h_i k_3).
\end{aligned}$$

Es ist ein Verfahren 4. Ordnung.

Der Pseudocode eines allgemeinen Einschrittverfahrens der Form (16.5) ist nachfolgend angegeben.

$y_0 := y(t_0)$ (Anfangswert)
for $i := 1$ **to** N **do**
  $y_{i+1} := y_i$
  for $j := 1$ **to** m **do**
  $\delta := 0$
    for $l := 1$ **to** $j - 1$ **do**
      $\delta := \delta + \gamma_{j,l} k_l$
    end
  $k_j := f(t_i + \beta_j h_i, \delta)$
  $y_{i+1} := y_{i+1} + h_i \alpha_j k_j$
  end
end

16.4 Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen

Sei

$$\mathbf{f} : D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Gesucht ist die Nullstelle $\mathbf{x}^\star$ von $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{0}.$$

Umformulieren liefert die **Fixpunktgleichung**

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^\star) := \mathbf{x}^\star + \mathbf{G}(\mathbf{x}^\star)\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) \stackrel{!}{=} \mathbf{x}^\star, \quad \det \mathbf{G}(\mathbf{x}^\star) \neq 0. \tag{16.6}$$

$\mathbf{x}^\star$ heißt **Fixpunkt** von $\mathbf{F}$. Wählen wir einen geeigneten Startwert $\mathbf{x}_0$ und iterieren

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n),$$

so stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen die Konvergenz

$$\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}^\star$$

folgt.

Satz 16.2 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Ist* $\mathbf{F}$ *eine Selbstabbildung*

$$\mathbf{F} : D \to D \subset \mathbb{R}^n,$$

die für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ *der* **Kontraktionsbedingung**

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad L < 1$$

genügt, so konvergiert für alle $\mathbf{x}_0 \in D$ *die Iterationsfolge* $(\mathbf{x}_n)$ *mit*

$$\mathbf{x}_{n+1} := \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$$

gegen den eindeutigen Fixpunkt

$$\mathbf{x}^\star \in D.$$

Ferner gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^\star - \mathbf{x}_n\| &\leq L\|\mathbf{x}^\star - \mathbf{x}_{n-1}\|, \\ \|\mathbf{x}^\star - \mathbf{x}_n\| &\leq \frac{L^n}{1-L}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|. \end{aligned}$$

Beweis. Aus der Kontraktionsbedingung ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| &= \|\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_{n-1})\| \\ &\leq L\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\| \\ &\leq L^n\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \end{aligned}$$

und daraus für $m \geq n$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\| &\leq \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}\| + \|\mathbf{x}_{m-1} - \mathbf{x}_{m-2}\| + \ldots + \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| \\ &\leq (L^{m-1} + L^{m-2} + \ldots + L^n)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \\ &= L^n(L^{m-n-1} + L^{m-n-2} + \ldots + L^0)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \\ &= \frac{1 - L^{m-n}}{1-L} L^n\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \\ &\leq \frac{L^n}{1-L}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|. \end{aligned}$$

Beim Grenzübergang $n \to \infty$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L^n}{1-L} = 0,$$

das heißt, die Folge $(\mathbf{x}_n)$ ist eine Cauchy-Folge und bestizt damit einen eindeutigen Grenzwert $\mathbf{x}^\star = \mathbf{F}(\mathbf{x}^\star)$. Für diesen folgt

$$\|\mathbf{x}^\star - \mathbf{x}_n\| = \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^\star) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_{n-1})\| \leq L\|\mathbf{x}^\star - \mathbf{x}_{n-1}\|$$

und weiter

$$\|\mathbf{x}^\star - \mathbf{x}_n\| = \lim_{m\to\infty} \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|.$$

□

Bemerkung 16.5. *Wegen*

$$\|\mathbf{x}^\star - \mathbf{x}_n\| \leq L\|\mathbf{x}^\star - \mathbf{x}_{n-1}\|$$

ist die Konvergenzordung linear.

Beispiel 16.4 (Picard-Iteration)**.** *Wählen wir in* (16.6)

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

so erhalten wir die Picard-Iteration

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}(\mathbf{x}_n).$$

Beispiel 16.5 (Newton-Verfahren)**.** *Beim Newton-Verfahren ist*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{f}'(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

das heißt

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n).$$

Beispiel 16.6 (Vereinfachtes Newton-Verfahren)**.** *Es sei mit* $\mathbf{z}$ *eine Näherung an* $\mathbf{x}^\star$ *gegeben. Beim vereinfachten Newton-Verfahren ist*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{f}'(\mathbf{z})^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

das heißt

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{z})^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n).$$

Über die Konvergenzordnung der beiden letztgenannten Verfahren gibt der nächste Satz Auskunft.

Satz 16.3. *Sei $D \in \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ und $\mathbf{x}^\star$ eine einfache Nullstelle mit*

$$\det \mathbf{f}'(\mathbf{x}^\star) \neq 0$$

Ferner existiere eine Umgebung $B_r(\mathbf{x}^\star) \in D$ und Konstanten L und M mit $LMr < 1$, so daß für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_r(\mathbf{x}^\star)$ gilt

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \|\mathbf{f}'(\mathbf{x})^{-1}\| \leq M.$$

Dann konvergiert für jeden Startwert $\mathbf{x}_0 \in B_r(\mathbf{x}^\star)$ das vereinfachte Newton-Verfahren für $\mathbf{z} \in B_r(\mathbf{x}^\star)$ linear ($p = 1$) und das (normale) Newton-Verfahren quadratisch ($p = 2$) gegen $\mathbf{x}^\star$.

Das Newton-Verfahren konvergiert “sehr gut” (quadratisch), falls ein geeigneter Startwert verwendet wird. Bei ungünstiger Wahl des Startwertes konvergiert im allgemeinen das Verfahren nicht. Vielfach hilft dann das folgende Verfahren weiter, das aber etwas aufwendiger ist.

Beispiel 16.7 (gedämpftes Newton-Verfahren)**.** *Ziel des gedämpften Newton-Verfahrens ist es, einen möglichst großen Konvergenzbereich zu erhalten. Im $n+1$-Schritt setzen wir*

$$\mathbf{d}_n = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)$$

und bestimmen

$$\mathbf{d} = \min_{y \in \mathbb{N}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n - 2^{-k}\mathbf{d}_n)\|.$$

Die neue Iterierte $\mathbf{x}_{n+1}$ ist dann gegeben durch

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - 2^{-k}\mathbf{d}.$$

16.5 Methoden der nichtlinearen Optimierung

Sei $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ mit $D = \mathbb{R}^n$. Gesucht sei ein lokales Minimum $\mathbf{x}^\star$ von f

$$\mathbf{x}^\star \in D: \; f(\mathbf{x}^\star) = \min.$$

Um diese Aufgabe zu lösen, berechnen wir ausgehend von einer Startnäherung $\mathbf{x}_0 \in D$ die Iterationsfolge

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - h_n\mathbf{d}_n$$

mit der Suchrichtung $\mathbf{d}_n$ und der Schrittweite h_n. Wählt man dabei

$$\mathbf{d}_n = f'(\mathbf{x}_n)^T = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_n)$$

ergibt sich das **Gradientenverfahren**. Die Schrittweite wird dabei so bestimmt, daß sie das nun linearisierte Problem zumindest approximativ löst

$$f(\mathbf{x}_{n+1}) \approx \min_h f(\mathbf{x}_n - h\mathbf{d_n}).$$

Zum Beipiel kann h_n analog zum gedämften Newton-Verfahren 16.7 bestimmt werden

$k := 0$
$\mathbf{d}_n := f'(\mathbf{x}_n)$
$\mathbf{x}_{n+1} := \mathbf{x}_n - \mathbf{d}_n$
while $f(\mathbf{x}_{n+1}) \geq f(\mathbf{x}_n)$ **do**
  $k := k + 1$
  $\mathbf{x}_{n+1} := \mathbf{x}_n - 2^{-k}\mathbf{d}_n$
end

Direkt einzusehen ist, daß das Gradientenverfahren linear konvergiert.

Falls $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ suchen wir die stationären Punkte $f'(\mathbf{x}^\star)^T = \mathbf{0}$ mit dem Newton-Verfahren 16.5. Dazu sei

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = f''(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} f(\mathbf{x})\right]_{1 \leq i,j \leq n}$$

die Hesse-Matrix von f an der Stelle $\mathbf{x}$. Die Iterationsfolge lautet damit

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{d}_n, \quad \mathbf{d}_n = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_n) f'(\mathbf{x}_n)^T.$$

Wie im letzten Abschnitt angemerkt wurde, konvergiert das Newton-Verfahren quadratisch. Die Ableitung $f'(\mathbf{x}_n)$ läßt sich auch approximativ anwenden.

16.6 Lösung linearer Gleichungssysteme

Viele Anwendungen der numerischen Mathematik führen auf ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

für die gesuchte Lösung $\mathbf{x}$.

16.6.1 Direkte Methoden

In diesem Abschnitt werden direkte Methoden zur Lösung von linearen Gleichungssystemen dargestellt. Im Gegensatz zu den iterativen Methoden, liefern die hier besprochenen Verfahren die Lösung in endlich vielen Schritten, rundungsfehlerfreie Rechnung vorausgesetzt. Zunächst betrachten wir den Gauß-Algorithmus, von dem wir eine modifizierte Variante, das sogenannte Gauß-Jordan-Verfahren, schon in Mathematik I (lineare Algebra) kennengelernt haben.

Im i-ten Teilschritt $(1 \le i \le n-1)$ des Gauß-Algorithmus wird wie folgt vorgegangen: Man berechnet die Faktoren $a_{j,i}^{(i)}/a_{i,i}^{(i)}$ und addiert die damit multiplizierten Einträge der i-ten Zeile der erweiterten Matrix $[\mathbf{A}^{(i)}|\mathbf{b}^{(i)}]$ zu den Zeilen $i+1, i+2, \ldots, n$:

$$
\underbrace{\left[\begin{array}{cccccc|c}
\star & \ldots & \star & \star & \ldots & \star & \star \\
 & \ddots & \star & \star & \ldots & \star & \star \\
 & & \star & \star & \ldots & \star & \star \\
 & & & a_{i,i}^{(i)} & \ldots & a_{i,n}^{(i)} & b_i^{(i)} \\
 & & & a_{i+1,i}^{(i)} & \ldots & a_{i+1,n}^{(i)} & b_{i+1}^{(i)} \\
 & & & a_{i+2,i}^{(i)} & \ldots & a_{i+2,n}^{(i)} & b_{i+2}^{(i)} \\
 & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{n,i}^{(i)} & \ldots & a_{n,n}^{(i)} & b_n^{(i)}
\end{array}\right]}_{\mathbf{A}^{(i)} \qquad \mathbf{b}^{(i)}}
\quad -\frac{a_{i+1,i}^{(i)}}{a_{i,i}^{(i)}} \quad -\frac{a_{i+2,i}^{(i)}}{a_{i,i}^{(i)}} \quad \cdots \quad -\frac{a_{n,i}^{(i)}}{a_{i,i}^{(i)}}
$$

Der obige Eliminationsschritt lautet in Matrixnotation

$$
\mathbf{L}^{(i)} \left[\ \mathbf{A}^{(i)} \ \middle| \ \mathbf{b}^{(i)} \ \right] = \left[\ \mathbf{A}^{(i+1)} \ \middle| \ \mathbf{b}^{(i+1)} \ \right]
$$

mit

$$
\mathbf{L}^{(i)} = \begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ldots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & -\frac{a_{i+1,i}^{(i)}}{a_{i,i}^{(i)}} & 1 & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & \\
 & & & -\frac{a_{n,i}^{(i)}}{a_{i,i}^{(i)}} & & & 1
\end{bmatrix}.
$$

$\uparrow$

Spalte i

Mit $\mathbf{A}^{(i)} = \mathbf{A}$ ergibt sich rekursiv

$$\mathbf{L}^{(n-1)} \cdots \mathbf{L}^{(1)} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] =: \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{c} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \star & \dots & \star & \star \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \star & \star \end{array}\right]$$

und insbesondere gilt $\mathbf{L}^{(n-1)} \cdots \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{A} = \mathbf{R}$ bzw. die *LR*–**Zerlegung**

$$\underbrace{\mathbf{L}^{(1)^{-1}} \cdots \mathbf{L}^{(n-1)^{-1}}}_{=:\,\mathbf{L}} \mathbf{R} = \mathbf{A}. \tag{16.7}$$

Durch Nachrechnen erhält man

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \frac{a_{2,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & 1 & & & \\ \frac{a_{3,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & \frac{a_{3,2}^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \frac{a_{n,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & \frac{a_{n,2}^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}} & \dots & \frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Definition 16.4 (Dreiecksmatrix)**.** *Eine Matrix der Form*

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & \dots & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} & \dots & r_{2,n} \\ 0 & 0 & r_{3,3} & \dots & r_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{n,n} \end{bmatrix}$$

heißt eine **obere Dreiecksmatrix***. Entsprechend gibt es auch* **untere Dreiecksmatrizen** $\mathbf{L} = (l_{i,j})_{1\le i,j\le n}$*. Sie sind dadurch gekennzeichnet sind, daß die Transponierte* $\mathbf{L}^T$ *eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Somit ist durch dei Beziehung (16.7) eine Zerlegung von $\mathbf{A}$ in eine untere Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\mathbf{R}$ gegeben. Man kann also die Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ wie folgt berechnen:

1. Zerlege $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.
2. Löse $\mathbf{Ax} = \mathbf{LRx}$ in zwei Schritten:
   (a) Löse $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ durch **Vorwärtssubstitution**.
   (b) Löse $\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$ durch **Rückwärtssubstitution**.

Hierbei versteht man unter Vorwärtssubstitution

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{l_{1,1}} b_1, \\
y_2 &= \frac{1}{l_{2,2}} (b_2 - l_{2,1} y_1), \\
y_3 &= \frac{1}{l_{3,3}} (b_3 - l_{3,1} y_1 - l_{3,2} y_2), \\
&\vdots \\
y_n &= \frac{1}{l_{n,n}} \Big(b_n - \sum_{k=1}^{n-1} l_{n,k} y_k \Big)
\end{aligned}$$

und unter Rückwärtssubstitution

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{r_{n,n}} y_n, \\
x_{n-1} &= \frac{1}{r_{n-1,n-1}} (y_{n-1} - r_{n-1,n} x_n), \\
x_{n-2} &= \frac{1}{r_{n-2,n-2}} (y_{n-2} - r_{n-2,n-1} x_{n-1} - r_{n-2,n} x_n), \\
&\vdots \\
x_1 &= \frac{1}{r_{1,1}} \Big(y_1 - \sum_{k=2}^{n} r_{1,k} x_k \Big).
\end{aligned}$$

Beispiel 16.8 (LR-Zerlegung)**.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 \\ \lrcorner & \\ & \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ \lrcorner \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\textit{das heißt:} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ist $\mathbf{A}$ symmetrisch und positiv definit, so kann die Matrix $\mathbf{A}$ mit Hilfe der **Cholesky-Zerlegung** zerlegt werden:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

mit der unteren Dreiecksmatrix $\mathbf{L} = (l_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$. Sie ist definiert durch

$$l_{j,j} = \sqrt{a_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j,k}^2}, \quad l_{i,j} = \frac{1}{l_{j,j}} \Big(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} l_{j,k} \Big), \quad j+1 \le i \le n.$$

Die Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

erfolgt dann wieder in zwei Schritten

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{L}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Das Cholesky-Verfahren benötigt jedoch den halben Rechenaufwand wie das Gauß-Verfahren.

Beispiel 16.9 (Cholesky-Zerlegung)**.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} l_{1,1} &= \sqrt{1} = 1, & l_{3,1} &= 1/1 = 1, \\ l_{2,1} &= 2/1 = 2, & l_{3,2} &= (2-2)/1 = 0, \\ l_{2,2} &= \sqrt{5-4} = 1, & l_{3,3} &= \sqrt{10-1} = 3. \end{aligned}$$

16.6.2 Iterative Methoden

Viele praktische Probleme führen zu der Aufgabe, sehr große lineare Gleichungssyteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ zu lösen, bei denen glücklicherweise die Matrix $\mathbf{A}$ nur schwach besetzt ist, das heißt, nur wenige Einträge von $\mathbf{A}$ sind ungleich 0. Solche Gleichungssyteme entstehen beispielsweise bei der Anwendung impliziter Verfahren zur näherungsweisen Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen, vergleiche Abschnitt 16.3. Direkte Methoden können hier nicht ohne weiteres eingesetzt werden, weil sie ohne besondere Maßnahmen gewöhnlich zu mehr oder weniger vollbesetzten Zwischenmatrizen führen und deshalb die Zahl der zur Lösung erforderlichen Rechenoperationen auch für die heutigen Rechner zu groß wird, abgesehen davon, daß die Zwischenmatrizen nicht mehr in die üblicherweise verfügbaren Maschinenspeicher passen.

Aus diesen Gründen hat man schon früh Iterationsverfahren zur Lösung solcher Gleichungssyteme herangezogen. Bei diesen Verfahren wird ausgehend von einem Startvektor $\mathbf{x}^{(0)}$ eine Folge von Vektoren

$$\mathbf{x}^{(0)} \to \mathbf{x}^{(1)} \to \mathbf{x}^{(2)} \to \ldots$$

erzeugt, die gegen die Lösung $\mathbf{x}$ konvergiert. Allen Verfahren ist gemeinsam, daß der einzelne Iterationsschritt $\mathbf{x}^{(i)} \to \mathbf{x}^{(i+1)}$ einen Rechenaufwand erfordert, der vergleichbar ist mit der Multiplikation von $\mathbf{A}$ mit einem Vektor, das heißt einen sehr geringen Aufwand, wenn $\mathbf{A}$ schwachbesetzt ist.

Zur Gewinnung von Iterationsverfahren führen wir folgende Standartzerlegung für $\mathbf{A}$ ein:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{U} - \mathbf{L}$$

mit der Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

und den oberen und unteren Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}.$$

Beispiel 16.10 (Gesamtschrittverfahren oder Jacobi-Verfahren)**.** *Im Gesamtschrittverfahren oder Jacobi-Verfahren wird die Iteration*

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \tag{16.8}$$

betrachtet. Man erhält so die Iterationsvorschrift

$$x_j^{(i+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\Big(b_j - \sum_{k \neq j} a_{jk} x_k^{(i)}\Big), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots . \tag{16.9}$$

Die komponentenweise Darstellung (16.9) des Gesamtschrittverfahrens legt nahe, bei der iterativen Berechnung der Komponente $x_j^{(i+1)}$ des Vektors $\mathbf{x}^{(i+1)}$ die bereits bestimmten Komponenten $x_1^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, \dots, x_{j-1}^{(i+1)}$ in die rechte Seite der Gleichung einzusetzen. Hierdurch erhalten wir

Beispiel 16.11 (Einzelschrittverfahren oder Gauß-Seidel-Verfahren)**.** *Das Einzelschrittverfahren oder Gauß-Seidel-Verfahren ist durch*

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}^{(i)} + (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b} \tag{16.10}$$

gegeben. Die Iterationsvorschrift lautet

$$x_j^{(i+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\Big(b_j - \sum_{k<j} a_{jk} x_k^{(i+1)} - \sum_{k>j} a_{jk} x_k^{(i)}\Big), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots .$$

Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz folgt sofort, daß das Gesamtschrittverfahren für beliebiges $\mathbf{x}^{(0)}$ gegen die Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ konvergiert, falls für die Iterationsmatrix $\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ aus (16.8) mit einer beliebigen Matrixnorm gilt

$$\|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\| < 1.$$

Für das Einzelschrittverfahren gilt die gleiche Aussage, das heißt das Verfahren ist konvergent, falls die Iterationsmatrix $(\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$ aus (16.10) für eine beliebige Matrixnorm

$$\|(\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\| < 1$$

erfüllt. Eine hinreichende Bedingung hierfür liefert der

Satz 16.4. *i.* **Starkes Zeilensummenkriterium:** *Sowohl das Gesamtschrittverfahren als auch das Einzelschrittverfahren sind konvergent für alle Matrizen* $\mathbf{A}$ *mit*

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad \textit{für} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

ii. **Starkes Spaltensummenkriterium:** *Beide Verfahren konvergieren ebenfalls für alle Matrizen* $\mathbf{A}$ *mit*

$$|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad \textit{für} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Da beide Verfahren um so besser konvergieren, je kleiner die Norm der Iterationsmatrix ist, kann man bei diesen Verfahren durch die Einführung eines **Relaxationsparameters** ω versuchen, die Konvergenz zu beschleunigen. Wir erhalten damit

Beispiel 16.12. *1. Relaxation beim Gesamtschrittverfahren* **(JOR-Verfahren)***: Das Gesamtschrittverfahren mit Relaxationsparameter* ω *ist durch*

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - \omega \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{b})$$

gegeben.

2. Relaxation beim Einzelschrittverfahren **(SOR-Verfahren)***: Relaxation beim Einzelschrittverfahren führt auf die Iterationsvorschrift*

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - \Big(\frac{1}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{L}\Big)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{b}).$$

16.7 Numerische Integration

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 10.3) lässt sich das bestimmte Integral durch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b := F(b) - F(a)$$

berechnen, wenn $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$ ist. Oft ist aber die Bestimmung der Stammfunktion schwierig oder unmöglich. Auch ist es möglich, dass der Integrand $f(x)$ nur an gewissen Stellen bekannt ist (z.B. aus Messwerten). Daher werden Näherungsformeln zur Berechnung des bestimmten Integrals benötigt.

Ein Ausgangspunkt für die Aufstellung von Näherungsformeln ist die Interpolation der zu integrierenden Funktion. Ersetzt man $f(x)$ durch die Konstante $f(\frac{a+b}{2})$ (Funktionswert in der Intervallmitte), durch die Gerade durch $f(a)$ und $f(b)$ (lineare Interpolation) bzw. durch die Parabel durch $f(a)$, $f(\frac{a+b}{2})$und $f(b)$ (quadratische Interpolation) und integriert das jeweilige Interpolationspolynom, so erhält man die **Quadraturformeln**

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx f(\frac{a+b}{2})\,(b-a)}$$ Rechteckregel (Rechteckfläche),

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (f(a)+f(b))\,\frac{(b-a)}{2}}$$ Trapezregel (Trapezfläche) bzw.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))\,\frac{(b-a)}{6}}$$ Simpsonregel (Fläche unter Parabel).

Das Ergebnis lässt sich verfeinern, wenn man das Intervall (a, b) vor der „Quadratur“ durch $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ mit $x_i - x_{i-1} = h$ in n gleichlange Teilintervalle der Länge h zerlegt. Wegen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ergeben sich die Formeln

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})\,h}$$ verallgemeinerte Rechteckregel,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) \frac{h}{2}}$$ verallgemeinerte Trapezregel,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}) + f(x_n) \right) \frac{h}{6}}$$

verallgemeinerte Simpsonregel

Besonders gute Näherungen mit relativ wenigen Funktionswerten der zu integrierenden Funktion erzielt man häufig mit der **Gaußquadratur**. Dabei werden in

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

insgesamt $2n$ Parameter (n Koeffizienten c_i und n „Stützstellen") so bestimmt, dass Polynome $2n-1$–ten Grades (haben $2n$ Koeffizienten) exakt integriert werden.

Ist z.B. aus einer Formelsammlung eine Quadraturformel für das Intervall $[\,a,b\,]$ bekannt, die Integration aber über dem Intervall $[\,c,d\,]$ auszuführen, so kann man die Integrationsvariable $t \in [\,c,d\,]$ mittels $t = \dfrac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ zu $x \in [\,a,b\,]$ substituieren und anschließend die Quadraturformel verwenden.

16.8 Aufgaben

16.1. Zur numerischen Lösung der Gleichung $x = \arccos x$ wird auf dem Taschenrechner ausgehend vom Startwert 0.7

(I) fortlaufend die arccos–Taste bzw.

(II) fortlaufend die cos–Taste

gedrückt.

a) Wieso konvergiert das eine Verfahren und das andere nicht?

b) Berechnen Sie mit dem konvergenten Verfahren die Lösung auf 4 Stellen nach dem Komma! Wie viele Iterationsschritte sind erforderlich?

c) Geben Sie ein schnelleres Iterationsverfahren an! Wie viele Iterationsschritte sind bei diesem erforderlich?

16.2. Die Gleichung $f(x) = x - \sin x - 0.25 = 0$ soll numerisch gelöst werden.

a) Zeigen Sie, dass die bei der Picarditeration verwendete Funktion $F(x) = x - f(x)$ über dem Intervall $[1.1, 1.3]$ eine Selbstabbildung ist, die der Kontraktionsbedingung genügt!

b) Lösen Sie die Gleichung durch Picarditeration ausgehend vom Startwert $x_0 = 1.2$!
c) Lösen Sie die Gleichung mit dem Newtonverfahren ausgehend vom Startwert $x_0 = 1.2$!

16.3. Die Gleichung $e^x = 3x$ soll numerisch gelöst werden.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = \frac{e^x}{3}$ über dem Intervall $[0.5, 0.7]$ eine Selbstabbildung ist, die der Kontraktionsbedingung genügt!
b) Ermitteln Sie durch Picarditeration mit $F(x)$ ausgehend vom Startwert $x_0 = 0.6$ die Lösung auf 4 Stellen nach dem Komma genau! Welcher Aufwand ist erforderlich?
c) Geben Sie ein schnelleres Iterationsverfahren an! Wie viele Iterationsschritte sind bei diesem beim Startwert $x_0 = 0.6$ für eine Genauigkeit von 4 Stellen nach dem Komma erforderlich?
d) Warum funktioniert eine Picarditeration mit $F(x) = \ln 3x$ nicht?

16.4. Die Gleichung $x^3 - 3x^2 + 2x + 3 = 0$ soll näherungsweise gelöst werden. Wenden Sie auf die Gleichung

a) das Newtonverfahren mit dem Startwert $x_0 = 1$,
b) das Newtonverfahren mit dem Startwert $x_0 = 0$,
c) die Intervallhalbierungsmethode für das Intervall $[-1, 1]$ an!

16.5. Als Rendite eines festverzinslichen Wertpapieres soll der fiktive effektive Jahreszinssatz für den Kaufwert bezeichnet werden, der sich ergibt, wenn man unterstellt, dass die vor der Endfälligkeit des Wertpapiers ausgezahlten Zinsen zum Zinssatz der Rendite wiederangelegt werden können. Ermitteln Sie die Rendite eines Papieres, das einen Kurswert von 105 % hat und mit 7 % p.a. vom Nennwert verzinst wird, wenn die Restlaufzeit

a) genau 1 Jahr, b) genau 2 Jahre, c) genau 3 Jahre

beträgt! Dabei soll die Rendite in den Fällen a) und b) exakt, im Falle c) mit dem Newtonverfahren bestimmt werden.

16.6. Eine Anleihe mit einer Restlaufzeit von genau 9 Jahren und einem Kupon von 4 % p.a. wird zum Kurs von 91 % verkauft. Wie groß ist die Rendite?

16.7. Zeigen Sie, dass man bei der Anwendung des Newtonverfahrens auf die Lösung

a) einer linearen Gleichung,
b) eines eindeutig lösbaren linearen Gleichungssystems

in einem Schritt unabhängig von der Startnäherung die exakte Lösung erhält!

16.8. Lösen Sie das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2y^3 - x^2 - 1 &= 0 \\ x^3 y - x \quad - 4 &= 0 \end{aligned}$$

mit dem Newtonverfahren!

16.9. Lösen Sie iterativ das nichtlineare Gleichungssystem $\begin{aligned} 2x^5 + \ y^5 &= 3 \\ x^8 + 2y^8 &= 3.05 \end{aligned}$!

16.10. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2\sqrt{x} & + & 3y^2 & & & = & 0.23 \\ 4x\sqrt{x} & - & 5y & & & = & 0.824 \\ z^3 & + & 6z^2 & + & 5z & = & 14.091 \end{array}$$

mit dem Newtonverfahren und dem Startwert $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$!

16.11. Lösen Sie das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 47 \end{pmatrix}$ mit dem Cholesky–Verfahren!

16.12. Lösen Sie das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit dem Cholesky–Verfahren!

16.13. Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$.

a) Stellen Sie die Iterationsvorschriften des Gesamt- und des Einzelschrittverfahrens auf!
b) Prüfen Sie die Konvergenz der Verfahren!
c) Führen Sie je fünf Iterationsschritte mit dem Startvektor $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch und vergleichen Sie mit der exakten Lösung des Gleichungssystems!

16.14. Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 17 \end{pmatrix}$.

a) Stellen Sie die Iterationsvorschriften des Gesamt- und des Einzelschrittverfahrens auf!
b) Prüfen Sie die Konvergenz der Verfahren!
c) Führen Sie je zwei Iterationsschritte mit dem Startvektor $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch und vergleichen Sie mit der exakten Lösung des Gleichungssystems!

16.15. Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 27 \end{pmatrix}$.

a) Stellen Sie die Iterationsvorschriften des Gesamt- und des Einzelschrittverfahrens auf!

b) Prüfen Sie die Konvergenz der Verfahren!

c) Bestimmen Sie eine Startnäherung für die Iteration, indem Sie die Nichtdiagonalelemente vernachlässigen!

d) Führen Sie mit diesem Startvektor je zwei Iterationsschritte durch und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung des Gleichungssystems!

16.16. Ermitteln Sie näherungsweise $\int\limits_0^2 x^2 \mathrm{d}x$ und $\int\limits_0^2 x^4 \mathrm{d}x$ mit der Rechteckregel, der Trapezregel, der Simpsonregel sowie mit der Gaußformel mit 2 Stützstellen und der Gaußformel mit 3 Stützstellen!

(Die Gaußformeln mit 2 und 3 Stützstellen lauten für das Intervall $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = f(-0.5773502692) + f(0.5773502692),$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}}) = \frac{1}{9}[5f(-0.7745966692) + 8f(0) + 5f(0.7745966692)].)$$

16.17. Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Zahl π durch Quadratur der Funktion $\frac{4}{1+x^2}$ über dem Intervall von 0 bis 1 nach der verallgemeinerten Rechteckregel mit 2 und mit 5 Stützstellen sowie nach der Gaußformel mit 2 und mit 3 Stützstellen!

Kapitel 17
Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

17.1 Integration im $\mathbb{R}^n$

Wir beschränken uns im folgenden auf die Integration über hinreichend reguläre Gebiete.

17.1.1 Normalbereiche

Wir beginnen mit dem zweidimensionalen Fall und definieren

Definition 17.1 (Normalbereich Typ I)**.** *Wir nennen $B \subset \mathbb{R}^2$ einen Normalbereich vom Typ I, falls $a, b \in \mathbb{R}$ und Funktionen $g, h \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ derart existieren, dass*

$$B = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b; \quad g(x) \leq y \leq h(x)\right\}$$

gilt.

Definition 17.2 (Normalbereich Typ II). *Wir nennen $B \subset \mathbb{R}^2$ einen Normalbereich vom Typ II, falls $a, b \in \mathbb{R}$ und Funktionen $g, h \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ derart existieren, dass*

$$B = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b; \quad g(y) \le x \le h(y)\right\}.$$

gilt

Definition 17.3 (Normalbereich). *$B \subset \mathbb{R}^2$ heisst Normalbereich, falls B Normalbereich vom Typ I oder II ist.*

Für $n > 2$ wird der Normalbereich iterativ definiert:

Definition 17.4 (Normalbereich). *Eine abgeschlossene Menge $B_n \subset \mathbb{R}^n$ heisst Normalbereich falls es eine Umordnung der Koordinaten $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ und Funktionen $g, h \in C^1(B_{n-1};\mathbb{R})$ gibt, so dass*

$$B_n = \{\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n : \hat{\boldsymbol{x}}_{n-1} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n-1}) \in B_{n-1},\ g(\hat{\boldsymbol{x}}_{n-1}) \le \hat{x}_n \le h(\hat{\boldsymbol{x}}_{n-1})\}$$

gilt und $B_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Normalbereich in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist.

Definition 17.5 (Integrationsgebiet). *G heisst reguläres Integrationsgebiet (oder Integrationsbereich), falls $\bar{G}$ (:= kleinste abgeschlossene Menge, die G enthält) die Vereinigung endlich vieler Normalbereiche ist.*

17.1.2 Die Integration über Normalbereiche und reguläre Integrationsgebiete

Zweidimensionaler Fall

Definition 17.6 (Integral über Normalbereich vom Typ I). *Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich vom Typ I und $f \in C^0(B)$, dann ist das Integral von f über B erklärt durch*

$$\iint_B f(x,y)dx\,dy := \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Falls B ein Normalbereich vom Typ II ist, lautet das Integral

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Definition 17.7 (Integral über ein reguläres Integrationsgebiet).
Sei $G = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ ein reguläres Integrationsgebiet, dann ist das Integral über G definiert durch

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{B_i} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Beispiel 17.1. *$B \subset \mathbb{R}^2$ sei umrandet durch die drei Kurven $y = x$, $y = \frac{1}{x}(x \geq 0)$, $y = 2$; und es sei $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2}$.*

Gesucht ist $F = \iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_B \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy$.

Zunächst wird B in Normalbereiche zerlegt:

a) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, \frac{1}{y} \leq x \leq y\right\}$

b)
$$\begin{aligned} B &= B_1 \cup B_2 \\ B_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq 2\right\} \\ B_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2\} \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wird das Integral berechnet:

a)
$$\begin{aligned} I &= \int\limits_1^2 \int\limits_{\frac{1}{y}}^{y} \frac{y^2}{x^2} dx dy \\ &= \int\limits_1^2 y^2 \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=\frac{1}{y}}^{x=y} dy \\ &= \int\limits_1^2 y^2 \left(-\frac{1}{y} + y\right) dy = \int\limits_1^2 (y^3 - y) dy \\ &= \left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b)\quad I &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{2} \frac{y^2}{x^2} dy \right) dx + \int_{1}^{2} \left(\int_{x}^{2} \frac{y^2}{x^2} dy \right) dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=\frac{1}{x}}^{2} dx + \int_{1}^{2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=x}^{2} dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{8}{3x^2} - \frac{1}{3x^5} \right) dx + \int_{1}^{2} \left(\frac{8}{3x^2} - \frac{x}{3} \right) dx = \frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

Satz 17.1 (Fubini)**.** *Sei $B = [a,b] \times [c,d]$ und $f \in C^0(B)$, dann gilt*

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{B} f(x,y)dxdy &= \int_{a}^{b} \left(\int_{c}^{d} f(x,y)dy \right) dx \\
&= \int_{c}^{d} \left(\int_{a}^{b} f(x,y)dx \right) dy
\end{aligned}
$$

Allgemeiner Fall

Definition 17.8. *Sei B_n ein Normalbereich und $f \in C^0(B_n)$. Dann ist*

$$
\underbrace{\int \ldots \int}_{B} f(\boldsymbol{x})dx_1 \ldots dx_n := \int\limits_{B_{n-1}} \left(\int_{g(\boldsymbol{x}_{n-1})}^{h(\boldsymbol{x}_{n-1})} f(\boldsymbol{x}_{n-1}, x_n)dx_n \right)
$$

und für $G = B_1 \cup \ldots \cup B_k$

$$
\underbrace{\int \ldots \int}_{G} f(\boldsymbol{x})dx_1 \ldots dx_n := \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\int \ldots \int}_{B_k} (\boldsymbol{x})dx_1 \ldots dx_n.
$$

Beispiele und Anwendungen

1. Flächeninhalt von $G : (n = 2)$ $\quad f(x,y) = 1; F = \iint\limits_{G} dx\, dy$

2. Volumen von $G : (n \geq 3)$ $\quad f(\boldsymbol{x}) = 1, V = \underbrace{\int \ldots \int}_{G} dx_1 \ldots dx_n$

3. Gesamtmasse: $G \subset \mathbb{R}^3$; $\varrho : G \to \mathbb{R}^3$(Dichte); $M = \iiint\limits_G \varrho(\boldsymbol{x}) dx_1 dx_2 dx_3$

4. Schwerpunkt: $\varrho = 1, x^s = (x_1^s, x_2^s; x_3^s); x_i^s = \frac{1}{V} \iiint\limits_G x_i dx_1 dx_2 dx_3, i = 1, 2, 3$

17.2 Transformationsformel

Definition 17.9. *Seien B, D Normalbereiche in $\mathbb{R}^n$. Eine bijektive (invertierbare) Abbildung*

$$H : D \to B \subset \mathbb{R}^m \qquad \textit{mit} \qquad H \in C^1(B; \mathbb{R}^n),$$

für deren Jakobi-Determinante $\det H'(\boldsymbol{x}) \neq 0$ *in jedem Punkt $\boldsymbol{x} \in B$ gilt, heißt eine* **Koordinatentransformation**.

Es gilt die folgende Verallgemeinerung der Substitutionssregel:

Satz 17.2. *Sei $H : D \to B, \boldsymbol{u} = H(\boldsymbol{x})$ eine Koordinatentransformation und $f \in C^1(B; \mathbb{R})$, dann gilt*

$$\iint\limits_B f(\boldsymbol{u}) du_1 \dots du_n = \iint\limits_D f(H(\boldsymbol{x})) \det H'(\boldsymbol{x}) dx_1 \dots dx_n.$$

Beispiel 17.2 (Polarkoordinaten)**.**

$$H(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (r, \varphi) \in [0, 1] \times [-\pi, \pi] =: D$$

$$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$H' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad det\, H' = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

$$\Rightarrow \quad \iint\limits_B f(x, y) dx\, dy = \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(H(r, \varphi)) r dr d\varphi.$$

Beispiel 17.3. *Es soll das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ berechnet werden. Dafür wird $I(R) = \int\limits_0^R e^{-x^2} dx$ gesetzt. Dann gilt $(I(R))^2 = \int\limits_0^R e^{-x^2} dx \int\limits_0^R e^{-y^2} dy = \int\limits_0^R \int\limits_0^R e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$.*

Wir ersetzen die rechteckige Fläche $\square_R = \{(x,y) : 0 \le x, y \le R\}$ *durch den Kreissektor* $D_R = \{(x,y) : x, y \ge 0, x^2 + y^2 \le R\}$.

$\iint\limits_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$ *und* $\iint\limits_{\square_R} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$ *haben für* $R \to \infty$ *den gleichen Grenzwert.*

Für das Integral über D_R *gilt* $\iint\limits_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^R e^{-r^2} r\, dr\, d\varphi = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right)$.

Folglich gilt $\lim\limits_{R\to\infty} (I(R))^2 = \frac{\pi}{4}$, *daraus folgt schließlich* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

17.3 Eigenschaften eines mehrdimensionalen Integrals

Satz 17.3 (Eigenschaften von Integralen)**.** *Seien* $B = B_1 \cup B_2$ *Normalbereiche, dann gilt für* $f, g \in C^0(B_1)$:

1. **Linearität**

$$\iint\limits_B (\alpha f + \beta g)(\boldsymbol{x}) dx_1 \dots dx_n = \alpha \iint\limits_{B_1} f(\boldsymbol{x}) dx_1 \dots dx_n + \beta \iint\limits_B g(\boldsymbol{x}) dx_1 \dots dx_n$$

2. **Monotonie**: $f(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in B$

$$\iint\limits_B f(\boldsymbol{x}) dx_1 \dots dx_n \le \iint\limits_B g(\boldsymbol{x}) dx_1 \dots dx_n$$

3. **Additivität**

$$\iint\limits_B f(\boldsymbol{x}) dx_1 \dots dx_n = \iint\limits_{B_1} f(\boldsymbol{x}) dx_1 \dots dx_n + \iint\limits_{B_2} f(\boldsymbol{x}) dx_1 \dots dx_n$$

Es gilt der folgende Mittelwertsatz:

Satz 17.4 (Mittelwertsatz)**.** *Sei* B *ein zusammenhängender (abgeschlossener) Normalbereich und* $f \in C^0(B; \mathbb{R})$, *dann existiert zu* f *ein Punkt* $\boldsymbol{x}^* \in B$ *mit*

$$\iint\limits_B f(\boldsymbol{x}) dx_1 \dots x_n = f(\boldsymbol{x}^*) \iint\limits_B dx_1 \dots x_n.$$

17.4 Integrale über gekrümmten Flächen im Raum

Wir betrachten im folgenden Abschnitt die *Parameterdarstellung* von Integralen über gekrümmten Flächen im Raum.

Definition 17.10 (Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks)**.**
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein reguläres Integrationsgebiet. Unter einer Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks verstehen wir eine Funktion

$$\boldsymbol{x} : D \to S, \qquad S = \left\{\boldsymbol{x}(u,v) \in \mathbb{R}^3 : (u,v)^T \in D\right\} \qquad \text{mit}$$

1. $\boldsymbol{x}_u(u,v) \times \boldsymbol{x}_v(u,v) \neq \boldsymbol{0}$ *für alle* $(u,v) \in D$.

2. $D = \bigcup\limits_{i=1}^{N} D_i : \boldsymbol{x} : D_i \to S$ *ist injektiv.*

Die Tangentialebene im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(u_0,v_0)$ *wird von den Vektoren* $\boldsymbol{x}_u(u_0,v_0)$ *und* $\boldsymbol{x}_v(u_0,v_0)$ *aufgespannt:*

$$T = \left\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{x}_u(u_0,v_0) + \mu \boldsymbol{x}_v(u_0,v_0), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Die Vektoren $\boldsymbol{x}_u(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_v(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial x_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial x_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$ *sind Tangentialvektoren,* $\boldsymbol{n}(u_0,v_0) = \boldsymbol{x}_u(u_0,v_0) \times \boldsymbol{x}_v(u_0,v_0) = \dfrac{\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v}{\|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v\|} = \dfrac{\boldsymbol{N}}{\|\boldsymbol{N}\|}$ *ist der Flächennormaleneinheitsvektor. Für das Flächenstück* ΔO *gilt* $\Delta O = |\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v| \Delta u \Delta v$.

Beispiel 17.4 (Kugelsphäre)**.** *(ohne Nord- und Südpol)*

$$S = \boldsymbol{x}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\theta \sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

mit $0 < \theta < \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$

Beispiel 17.5 (Torus)**.** *:*

$$\boldsymbol{x}(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} (R + r\sin\psi)\cos\varphi \\ (R + r\sin\psi)\sin\varphi \\ r\cos\psi \end{pmatrix}$$

mit $0 \le \varphi, \psi \le 2\pi$

Beispiel 17.6 (Helix)**.**

$$\boldsymbol{x}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ a\varphi \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq r \leq R,\ \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$

Hier ist $\boldsymbol{x}_r \times \boldsymbol{x}_\varphi = \begin{pmatrix} a\sin\varphi \\ -a\cos\varphi \\ r \end{pmatrix}$ *und* $\|\boldsymbol{x}_r \times \boldsymbol{x}_\varphi\| = \sqrt{a^2 + r^2}$

Beispiel 17.7 (Graph einer Funktion $(x,y) \to g(x,y)$)**.**

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix}, (x,y) \in D \right\}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g_x \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_y &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_y \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_x \times \boldsymbol{x}_y = \begin{pmatrix} -g_x \\ -g_y \\ 1 \end{pmatrix} \\ \|\boldsymbol{x}_x \times \boldsymbol{x}_y\| &= \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} \end{aligned}$$

Satz 17.5 (Oberfläche einer regulären Parametrisierung)**.** *Die Oberfläche S einer regulären Parametrisierung ist gegeben durch*

$$O(S) = \iint\limits_D |\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v| du\, dv.$$

Bemerkung 17.1. *Man beachte, dass die Oberfläche $O(S)$ unabhängig von der jeweiligen Parametrisierung ist.*

Definition 17.11 (Oberflächenintegral)**.** *Sei $\boldsymbol{x} : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parameterdarstellung von S und $f \in C^0(S;R)$, dann wird das* **Oberflächenintegral** *definiert durch*

$$\iint\limits_S f(\boldsymbol{x})\, dO = \iint\limits_D f(\boldsymbol{x}(u,v)) |\boldsymbol{x}_u(u,v) \times \boldsymbol{x}_v(u,v)| du\, dv.$$

Falls sich S aus regulären Flächenstücken S_i zusammensetzt, wird das Oberflächenintegral über S als Summe der Oberflächenintegrale über S_i definiert.

17.5 Oberflächenintegrale und der Satz von Gauß

Wir betrachten ein Volumen V als endliche Vereinigung von Normalbereichen, z.B.

$$V_i = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2)^T \in G, \qquad h(x_1) \le x_2 \le g(x_1) \right\}$$

Sei $\boldsymbol{v} \in C^1(V; \mathbb{R}^3)$, d.h. $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1(x_1,x_2,x_3) \\ v_2(x_1,x_2,x_3) \\ v_3(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix}$ und sei ∂V der Rand von V.

Wir definieren den **Fluss** von $\boldsymbol{v}$ durch die Oberfläche ∂V durch

$$\iint\limits_{\partial V} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dO.$$

Dabei ist $\boldsymbol{n}$ der *äußere Normaleneinheitsvektor* (Orientierung beachten).

Bemerkung 17.2. *Ist $O \subset \partial V$ dargestellt durch die Parametrisierung*

$$O = \left\{ \boldsymbol{x}(r,s) \in \mathbb{R}^3 : (r,s)^T \in G \right\},$$

dann gilt

$$dO = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s} \right\| dr\, ds.$$

An der Stelle $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(r,s)$ ist $\boldsymbol{N}(r,s) = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s}$ Normalenvektor und $\boldsymbol{n}(r,s) = \frac{\boldsymbol{N}(r,s)}{\|\boldsymbol{N}(r,s)\|}$ Normaleneinheitsvektor. Damit wird

$$\iint\limits_{O} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dO = \iint\limits_{G} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(r,s)) \boldsymbol{N}(r,s)\, dv\, ds.$$

Es gilt nun der wichtige Integralsatz von *Gauß*:

Satz 17.6 (Satz von *Gauß*)**.** *Unter den genannten Voraussetzungen gilt*

$$\iint\limits_{\partial V} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dO = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV,$$

dabei ist $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$ *die Divergenz von $\boldsymbol{v}$ (vgl. Abschnitt 12.6).*

17.6 Das Kurvenintegral und der Satz von Stokes

Sei K eine aus endlich vielen Kurvenstücken $K_i \{\boldsymbol{x}_i(t) : t \in I_i\}, i = 1, \ldots, N$, bestehende , zusammenhängende und geschlossene Kurve, die ein Flächestück O berandet, d.h. $\partial O = K$. Ferner sei $\boldsymbol{v} \in C^1(D), O \subset D$, D ein Gebiet. Das **Umlaufintegral** wird definiert durch

$$\oint_K \boldsymbol{v} d\boldsymbol{x} := \sum_{i=1}^{N} \int_{I_i} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_i(t)) \frac{d\boldsymbol{x}_i}{dt}(t)\, dt,$$

wobei $\frac{d\boldsymbol{x}_i}{dt}(t)$ der Tantentenvektor ist.

Es gilt nun der fundamentale Satz von *Stokes*:

Satz 17.7 (Satz von Stokes)**.** *Unter obigen Voraussetzungen gilt*

$$\oint_{\partial O} \boldsymbol{v} \cdot\, d\boldsymbol{x} = \iint_O \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dO.$$

Satz 17.8 (Greensche Formeln)**.** *Sei* $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$ *der Laplaceoperator (s. Abschnitt 12.6),* $f, g \in C^2(V, R)$*. Dann gilt*

1. $$\iiint_V (f \Delta g + \operatorname{grad} f \operatorname{grad} g)\, dV = \iint_{\partial V} f \operatorname{grad} g \boldsymbol{n}\, dO,$$
2. $$\iiint_V (f \Delta g - g \Delta f)\, dV = \iint_{\partial V} (f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f)\, \boldsymbol{n}\, dO.$$

17.7 Aufgaben

17.1. Sei $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$. Berechnen Sie $\iint_G (x + y^3)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$!

17.2. Berechnen Sie $\iint_G 2y\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei G durch $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ und $x + y = 2$ begrenzt sei!

17.3. Berechnen Sie $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y}\, \mathrm{d}D$, wobei das Gebiet D durch $y = x^2$ und $x = y^2$ begrenzt sei!

17.4. G sei das Parallelogramm mit den Eckpunkten $A(1, 2)$, $B(2, 4)$, $C(2, 7)$ und $D(1, 5)$. Stellen Sie das Integral $\iint_G f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ so dar, dass

a) zunächst nach y bzw.
b) zunächst nach x
integriert wird!

17.5. Stellen Sie das Integral $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ so um, daß zunächst nach x und dann nach y integriert wird!

17.6. Integrieren Sie $f(x,y) = xy^2$
a) über dem Rechteck mit den Eckpunkten $(-1,-2)$, $(3,-2)$, $(3,2)$ und $(-1,2)$,
b) über der von der Parabel $y = x^2$, der Gerade $x = 2$ und der x–Achse begrenzten Fläche sowie
c) über der von der Parabel $x = y^2$, der Gerade $y = 2$ und der y–Achse begrenzten Fläche!

17.7. Integrieren Sie $f(x,y) = x + y^2$ über dem Gebiet,
a) das von der Parabel $4x = y^2$ und von der Gerade $x = 4$ begrenzt wird!
b) das von der Parabel $4x = y^2$ und von der Gerade $y = 2x - 12$ begrenzt wird!

17.8. Integrieren Sie die Funktion $\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ über dem Einheitskreis, indem Sie zunächst die kartesischen durch Polarkoordinaten substituieren!

17.9. Berechnen Sie $\iint\limits_G \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, wobei G durch die Kreise $x^2+y^2=\pi^2$ und $x^2+y^2=4\pi^2$ begrenzt sei (Übergang zu Polarkoordinaten)!

17.10. Durch die Gleichung $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ wird in kartesischen Koordinaten eine „Lemniskate“ beschrieben.
a) Stellen Sie die Lemniskate durch eine Funktion $r = r(\varphi)$ in Polarkoordinaten dar!
Hinweis: $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$
b) Skizzieren Sie die Lemniskate!
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der von der Lemniskate eingeschlossenen Fläche!

17.11. Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^3 \sin(x+y+z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$!

17.12. Berechnen Sie den Inhalt der von $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1$ $(a>0,\ b>0)$, $x = 0$ und $y = 0$ begrenzten Fläche mit Hilfe eines Doppelintegrals und der Substitution $x = a\,r\cos^8\varphi,\ y = b\,r\sin^8\varphi$!

17.13. Ermitteln Sie den Schwerpunkt der gleichmäßig mit Masse belegten Fläche, die von der Parabel $y=x^2$ und der Gerade $y=4x$ begrenzt wird!

17.14. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der von den Ebenen $z=0$ und $y+z=2$

sowie vom parabolischen Zylinder $y = x^2$ begrenzt wird!

17.15. Ermitteln Sie die Masse des mit Masse der Dichte $\varrho(x, y, z) = x + y + z$ versehenen Einheitswürfels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 \le x, y, z \le 1\}$!

17.16. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der bei der Rotation des Parabelstücks $y = x^2$, $0 \le y \le 1$ um die y–Achse entsteht!

17.17. Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers, der bei der Rotation der Astroide $x = a\cos^3 tx, \; y = a\sin^3 t, \; 0 \le t \le \pi$ um die x–Achse entsteht!

Kapitel 18
Klausuren

Bei allen Klausuren waren als Hilfsmittel beliebige schriftliche Unterlagen und nicht-programmierbare Taschenrechner ohne Grafikdisplay zugelassen.

18.1 Mathematik I

18.1.1 Klausur Mathematik I vom 14. Februar 1997

Arbeitszeit: 120 Minuten

K1/1–1. (7 Punkte)

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die $\dfrac{3|x-2|}{3x-2} < -2$ gilt!

K1/1–2. (12 Punkte)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 \phantom{{}+ 3x_3} + 2x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 17 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + \lambda x_4 &= \mu \end{aligned}$$

a) Lösen Sie das Gleichungssystem im Spezialfall $\lambda = 10$, $\mu = 10$ mit dem Gaußschen Algorithmus!

b) Für welche Werte der Parameter λ und μ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar bzw. unlösbar?

K1/1–3. (12 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß die Geraden $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ in einer Ebene liegen!

b) Geben Sie die Gleichung dieser Ebene in parameterfreier Form an!

c) Ermitteln Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt $P(\frac{9}{2}, -5, 8)$ auf diese Ebene sowie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene!

K1/1–4. (12 Punkte)

Führen Sie für die Kurve $x^2 + xy + y^2 = 6$ die Hauptachsentransformation durch und stellen Sie die Kurve im transformierten und im Ausgangskoordinatensystem graphisch dar!

K1/1–5. (12 Punkte)

Ermitteln Sie für die Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - x_3 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ - x_2 + 2x_3 &\le 15 \\ - 5x_2 + 3x_3 &\le 12 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionswert!

K1/1–6. (5+5 Punkte)

In einem Betrieb werden aus Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 mit gleichem Aufwand Erzeugnisse E_1 und E_2 gefertigt, wobei pro Erzeugnis E_1 2 Geldeinheiten und pro Erzeugnis E_2 1 Geldeinheit Gewinn erwirtschaftet werden.

Für ein Erzeugnis E_1 werden 1 Einheit R_1, 2 Einheiten R_2 und 3 Einheiten R_3 benötigt, während pro Erzeugnis E_2 3 Einheiten R_1, 3 Einheiten R_2 und 1 Einheit R_3 benötigt werden.

Stellen Sie das Modell für die Gewinnmaximierung auf, wenn 18 Einheiten R_1, 21 Einheiten R_2 und 21 Einheiten R_3 zur Verfügung stehen!

Zusatzaufgabe: Lösen Sie die Optimierungsaufgabe!

18.1.2 Klausur Mathematik I vom 5. August 1997

Arbeitszeit: 120 Minuten

K1/2–1. (7 Punkte)

Ermitteln Sie die komplexe Zahl z, die die Gleichung $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2}z + \dfrac{5+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = -50 + 19i$ löst!

K1/2–2. (13 Punkte)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 &= 17 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + \lambda x_4 &= \mu \end{aligned}$$

a) Lösen Sie das Gleichungssystem im Spezialfall $\lambda = -3$, $\mu = 5$ mit dem Gaußschen Algorithmus!
b) Für welche Werte der Parameter λ und μ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar bzw. unlösbar?

K1/2–3. (9 Punkte)

An 30 Personen sollen Preise im Wert von 30 DM, 24 DM bzw. 18 DM vergeben werden, wofür insgesamt genau 600 DM verwendet werden sollen. Welche Möglichkeiten zum Kauf der 30 Preise gibt es, wenn jede Wertstufe mindestens einmal vertreten sein soll?

K1/2–4. (13 Punkte)

Gegeben seien die Ebenen $E_1: \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und

$E_2: \ 2x + 8y + z = 36$ sowie die Gerade $g: \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie die Gleichung der Ebene E_1 in parameterfreier Form an!
b) Ermitteln Sie den Abstand zwischen der Gerade g und der Ebene E_1 sowie den Abstand zwischen der Gerade g und der Ebene E_2 !
c) In welcher Gerade schneiden sich die Ebenen E_1 und E_2 ?

K1/2–5. (8 Punkte)

Führen Sie für die Fläche $x^2 + y^2 + z^2 - xy = \dfrac{1}{2}$ die Hauptachsentransformation durch und klassifizieren Sie sie!

K1/2–6. (10 Punkte)

Ermitteln Sie für die Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & -2x_2 & +\ x_3 & \to \ \max \\ 2x_1 & -3x_2 & +\ x_3 & = \ 1 \\ & -2x_2 & +\ x_3 & \leq \ 7 \\ & -3x_2 & +4x_3 & \leq \ 88 \\ \multicolumn{4}{r}{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0} \end{array}$$

die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionswert!

18.1.3 Klausur Mathematik I vom 9. August 1999

Arbeitszeit: 90 Minuten

K1/3–1. (7 Punkte)

a) Für welche reellen Zahlen t gilt $t \geq \dfrac{15}{t-2}$?

b) Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z, für die $|z| \geq \dfrac{15}{|z|-2}$ gilt!

K1/3–2. (11 Punkte)

Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 10 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{r}$.

a) Welcher Bedingung müssen die Komponenten des Vektors $\mathbf{r}$ genügen, damit das Gleichungssystem lösbar ist?

b) Lösen Sie das Gleichungssystem für die spezielle rechte Seite $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$!

K1/3–3. (11 Punkte)

Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$!

K1/3–4. (11 Punkte)

Ermitteln Sie für die Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rcr} 4x + 3y + z & \to & \max \\ x + 2y & \leq & 10 \\ 2x + y & \leq & 8 \\ 3x + 2y + z & = & 18 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, & & z \geq 0 \end{array}$$

mit Hilfe des Simplexverfahrens die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionswert!

K1/3–5. (Zusatz, +5 Punkte)

Ein Betrieb stellt Erzeugnisse A und B her.

Für die Herstellung eines Stückes A werden 500 g Stahl, 15 Minuten Arbeitszeit sowie 40 kWh Elektroenergie oder 2 m^3 Erdgas benötigt.

Für die Herstellung eines Stückes B werden 1 kg Stahl, 1 Stunde Arbeitszeit sowie 300 kWh Elektroenergie oder 20 m^3 Erdgas benötigt.

Je Erzeugnis A wird 1 Geldeinheit, je Erzeugnis B werden 5 Geldeinheiten Gewinn erzielt. Stellen Sie das Modell für die Gewinnmaximierung auf, wenn 1000 Arbeitszeitstunden, 2 t Stahl, 100 MWh Elektroenergie und 5000 m^3 Erdgas zur Verfügung stehen!

18.1.4 Klausur Mathematik I vom 11. Februar 2000

Arbeitszeit: 90 Minuten

K1/4–1. (14 Punkte)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & + \; x_2 & - \; 2x_3 & - \; x_4 & = 9 \\ x_1 & + 3x_2 & + \; 2x_3 & - \; 9x_4 & = 13 \\ 2x_1 & - \; x_2 & + \; x_3 & - \; x_4 & = 1 \\ x_1 & - 3x_2 & - 10x_3 & + 15x_4 & = 1 \\ -4x_1 & + 9x_2 & + \; x_3 & - 15x_4 & = 23 \end{array} \quad !$$

K1/4–2. (12 Punkte)

Ein an einer mit Kilometersteinen versehenen Straße wohnender Kunde erhält von einem am Kilometer 87 dieser Straße liegenden Auslieferungslager ein Gerät geliefert, an Fahrtkosten muss er dafür 3 DM je Entfernungskilometer (einfache Entfernung) vom Auslieferungslager zahlen. Für die Installation muss zusätzlich ein Techniker von einem am Kilometer 112 dieser Straße liegenden Servicestützpunkt zum Kunden kommen, als Fahrtkosten fallen dabei 2 DM je Entfernungskilometer vom Servicestützpunkt an.

In welchem Bereich der Straße ist die Summe der Fahrtkosten nicht größer als 100 DM?

K1/4–3. (17 Punkte)

In der kartesischen Koordinatenebene sei die Kurve $21x^2 + 8\sqrt{3}xy + 13y^2 = 225$ gegeben.

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch!

b) Klassifizieren Sie die Kurve und skizzieren Sie sie in dem transformierten Koordinatensystem!

c) Um welchen Winkel werden bei der Hauptachsentransformation die Koordinatenachsen gedreht?

K1/4–4. (17 Punkte)

Lösen Sie die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} -3x_1 + 5x_2 + x_3 &\to \max \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 &\le 10 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

!

K1/4–5. (**Zusatz**, +5 Punkte)

Ein Betrieb stellt zwei Erzeugnisse A und B her, die pro Stück den gleichen Gewinn abwerfen. Arbeitszeit-, Energie- und Materialaufwand sind jedoch verschieden und sollen gewisse Fonds nicht überschreiten:

in gewissen Einheiten	Erzeugnis A	Erzeugnis B	Fonds
Arbeitszeitaufwand je Stück	1	2	170
Energieaufwand je Stück	2	1	100
Materialaufwand je Stück	4	1	160

Stellen Sie das mathematische Modell zur Maximierung des Gewinns auf!

18.1.5 Klausur Mathematik I vom 19. Juli 2000

Arbeitszeit: 90 Minuten

K1/5–1. (4 Punkte)

a) Geben Sie die Gleichung der Kurve in der x–y–Ebene an, die aus den Punkten besteht, die vom Punkt $(-1, 0)$ doppelt so weit entfernt sind wie vom Punkt $(1, 0)$!

b) Um was für eine Kurve handelt es sich?

c) Skizzieren Sie die Kurve!

K1/5–2. (4 Punkte)

Für welche reellen x gilt $6 + \dfrac{1}{x+3} < 1$?

K1/5–3. (10 Punkte)

a) Wenden Sie den Gaußschen Algorithmus auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 13 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

an!

b) Für welche Werte des Parameters λ ist das Gleichungssystem lösbar?

c) Geben Sie im Falle der Lösbarkeit die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an!

K1/5–4. (10 Punkte)

a) Transformieren Sie die Fläche $2x^2 + 4xz + 4y^2 + 5z^2 = 36$ in Hauptachsenlage!

b) Klassifizieren Sie die Fläche und ermitteln Sie ihre Halbachsen!

K1/5–5. (12 Punkte)

Lösen Sie die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 &\to \max \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq 30 \\ 8x_1 + 4x_2 - x_3 &\leq 44 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 &\leq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

!

18.1.6 Klausur Mathematik I vom 9. Februar 2001

Arbeitszeit: 90 Minuten

K1/6–1. (7 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen in $\mathbb{R}$ für die folgenden Ungleichungen!

1. $|3x-4| \leq 2x-1$
2. $|x| - |x+1| > x$

K1/6–2. (6 Punkte)

1. Begründen Sie anschaulich die für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gültige Ungleichung

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|!$$

2. Berechnen Sie die Beträge folgender vier Zahlen: $z_1 = 0,6 + 0,8\mathrm{i}$, $z_2 = 1,2 + 1,6\mathrm{i}$, $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$!

K1/6–3. (10 Punkte)

Im $\mathbb{R}^4$ sei eine Hyperebene H durch folgende Parameterform gegeben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t, u \in \mathbb{R}.$$

Weiter betrachte die Punkte $P(10, 0, 6, 0)$ sowie $Q(-1, -3, 7, -1)$.

1. Geben Sie eine Parameterform der Geraden g durch P und Q an!
2. Bestimmen Sie den Abstand $d(P, H)$ von P zu H!
   Hinweis: Eliminieren Sie erst die Parameter $s, t, u \in \mathbb{R}$ und nutzen Sie dann die Hessesche Normalform.
3. Ermitteln Sie den Durchschnitt $g \cap H$!

K1/6–4. (12 Punkte)

Führen Sie für die Kurve

$$x^2 + 6xy - 7y^2 = 18$$

die Hauptachsentransformation durch! Um welche Art von Kurve handelt es sich?

K1/6–5. (12 Punkte)

In einer Schmiede werden verzinkte Zaunteile für Privatgrundstücke gefertigt. Zur Herstellung eines größeren Einzelteiles werden 4 Stunden benötigt, und die entsprechenden Material- plus Arbeitslohnkosten belaufen sich auf 288 DM; ein kleineres Einzelteil wird in 1 Stunde hergestellt und kostet demgemäß 48 DM. Für einen größeren Auftrag sollen maximal 80 Arbeitsstunden und 4320 DM Gesamtkosten veranschlagt werden. Der Verkaufspreis eines größeren Einzelteiles beläuft sich auf 416 DM, ein kleineres kann für 72 DM verkauft werden. Berechnen Sie mittels Simplex-Algorithmus, wieviele größere und kleinere Einzelteile herzustellen sind, damit der Reingewinn maximal wird. Ermitteln Sie diesen maximalen Reingewinn.

18.1.7 Klausur Mathematik I vom 20. Juli 2001

Arbeitszeit: 90 Minuten

K1/7–1. (7 Punkte)

Bestimmen Sie in $\mathbb{R}$ die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen!

1. $|2x+4| \leq x+5$
2. $x^2+6x+8 \geq 0$

K1/7–2. (6 Punkte)

1. Berechnen Sie die Beträge von folgenden vier komplexen Zahlen:

$$z_1 = 1.2 - 0.5 \cdot \mathrm{i}\,, \ z_2 = \mathrm{i} \cdot z_1\,, \ z_3 = z_1^2\,, \ z_4 = \cos 35^o + \mathrm{i} \cdot \sin 35^o\,.$$

2. Deuten Sie anschaulich die für alle $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$ gültige Gleichung

$$e^{\mathrm{i}\cdot\phi_1} \cdot e^{\mathrm{i}\cdot\phi_2} = e^{\mathrm{i}\cdot(\phi_1+\phi_2)}\,.$$

K1/7–3. (10 Punkte)

In $\mathbb{R}^3$ sei die Ebene

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 - 6x_2 + 9x_3 = -33\}$$

gegeben.

1. Bringen Sie die Ebene E auf die Hessesche Normalform.
2. Berechnen Sie den Abstand von E zu folgenden Punkten:

$$P_1 = (0,0,0)\,, \ P_2 = (-1,2,-4)\,, \ P_3 = (3,2,-3)\,.$$

3.Geben Sie eine Parameterform der Schnittgeraden von E mit der x_2x_3-Ebene an.

K1/7–4. (12 Punkte)

Führen Sie für die Kurve

$$3x^2 - 6xy + 11y^2 = 12$$

die Hauptachsentransformation durch!
Um welche Art von Kurve handelt es sich?

K1/7–5. (12 Punkte)

In einem landwirtschaftlichen Betrieb werden Kühe und Schafe gehalten. Für 25 Kühe und 100 Schafe sind Ställe vorhanden. Weiterhin sind 36 Morgen Weideland verfügbar. Für eine Kuh werden 1 Morgen, für ein Schaf 0.2 Morgen benötigt. Zur Versorgung des Viehs können jährlich bis zu 5000 Arbeitsstunden geleistet werden. Auf eine Kuh entfallen jährlich 150 Arbeitsstunden, auf ein Schaf 25 Arbeitsstunden. Der jährlich erzielte Reingewinn beträgt pro Kuh 300 DM und pro Schaf 54 DM. Die Anzahlen x_1 und x_2 der gehaltenen Kühe bzw. Schafe sind mittels Simplex-Algorithmus so zu bestimmen, dass der ebenfalls zu ermittelnde Gesamtgewinn möglichst groß wird.

18.1.8 Klausur Mathematik I vom 8. Februar 2002

Arbeitszeit: 90 Minuten

K1/8–1. (8 Punkte)

1.Berechnen Sie die Beträge von folgenden vier komplexen Zahlen:

$$z_1 = 0.4 - 0.3 \cdot \mathrm{i}\,, \quad z_2 = \mathrm{i} \cdot z_1\,, \quad z_3 = z_1^2\,, \quad z_4 = \cos 50^o + \mathrm{i} \cdot \sin 50^o\,.$$

2.Welche komplexen Zahlen z erfüllen die Bedingung

$$|z| = |\,\mathrm{Re}\,(z)| + |\,\mathrm{Im}\,(z)|\,?$$

Das Ergebnis ist zu begründen.

K1/8–2. (15 Punkte)

In $\mathbb{R}^3$ sei die Ebene

$$E = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \;\; 8x_1 + 4x_2 - x_3 = 270\big\}$$

gegeben.

1. Bringen Sie die Ebene E auf die Hessesche Normalform.
2. Berechnen Sie den Abstand von E zu folgenden Punkten:

$$P_1 = (0,0,0)\,, \quad P_2 = (3,-1,2)\,, \quad P_3 = (30,7,-2)\,.$$

3. Geben Sie eine Parameterform der Schnittgeraden g von E mit der x_1x_2-Ebene an.
4. Ein Sportplatz, der sich in der x_1x_2-Ebene befindet, ist teilweise von einer Nebelbank überdeckt, wobei sich der Nullpunkt P_1 im Nebel befindet und das Nebelgebiet innerhalb dieses Platzes von der Geraden g wie in (c) begrenzt wird. Ein Läufer startet in P_1 und läuft dann entlang der positiven x_1-Achse. Er benötigt 0.096 Sekunden pro Längeneinheit(1 Meter). In welcher Zeit erreicht er die Grenze des Nebelgebietes?

K1/8–3. (12 Punkte)

Führen Sie für die Kurve

$$x^2 - 6xy + y^2 = 14$$

die Hauptachsentransformation durch!
Um welche Art von Kurve handelt es sich?

K1/8–4. (12 Punkte)

Lösen Sie mittels Simplex-Algorithmus folgendes lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &\geq 0\,, \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 80\,, \\ 21x_1 + 28x_2 &\leq 630\,, \\ z := 32x_1 + 48x_2 &\longrightarrow \text{Max.} \end{aligned}$$

Der maximale Wert für z ist ebenfalls zu berechnen.

18.1.9 Klausur Mathematik I vom 20. Februar 2003

Arbeitszeit: 90 Minuten

K1/9–1. (6 Punkte)

Für welche reellen x gilt $1 - \dfrac{6(x+3)}{|4+2x|} > -1$?

K1/9–2. (7 Punkte)

Ermitteln Sie die algebraische und trigonometrische Darstellung sowie die 4. Potenz der komplexen Zahl $z = \dfrac{-3+4\,\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} + 5\dfrac{\mathrm{i}}{3+4\,\mathrm{i}} - \dfrac{2}{5}\,\mathrm{i}$!

K1/9–3. (4 Punkte)

Bei einem Tarifabschluss wurde vereinbart, die Gehälter um 2.40 % zu erhöhen, sie aber einen halben Monat später als bisher auszuzahlen. Um wieviel steigt der Barwert der Gehälter bezogen auf den ursprünglichen Auszahlungszeitpunkt, wenn mit einem Kalkulationszinssatz von 3 % p.a. und einfacher Verzinsung gerechnet wird?

K1/9–4. (11 Punkte)

Auf einen Ertrag x soll eine Steuer $S(x)$ erhoben werden. Dabei soll eine kubische Steuerfunktion $S(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ verwendet werden, die folgende Bedingungen erfüllt:

– Für $x = 0$ soll keine Steuer erhoben werden und der Grenzsteuersatz 10 % betragen.
– Für $x = 10$ soll die Elastizität der Steuerfunktion 2 betragen.
– Für $x = 5$ soll der Grenzsteuersatz 37.5 % betragen

a) Welche relative Erhöhung der Steuer hat eine Steigerung des Ertrages von $x = 10$ aus um 0.5 % ungefähr zur Folge?
b) Ermitteln Sie die Steuerfunktion, die alle geforderten Bedingungen erfüllt!

K1/9–5. (11 Punkte)

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_8^\infty \frac{15}{2x^2+18x-72}\,\mathrm{d}x$!

K1/9–6. (11 Punkte)

a) Ergänzt einer der Vektoren $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}$ das Vektorsystem $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}\right\}$

zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$, wenn ja welcher?

b) Stellen Sie, falls bei a) eine Basis des $\mathbb{R}^3$ gefunden wurde, den Vektor $\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren dieser Basis dar!

c) Geben Sie den Rang folgender Matrizen an und begründen Sie Ihr Ergebnis:
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
!

18.2 Mathematik II

18.2.1 Klausur Mathematik II vom 23. Juli 1997

Arbeitszeit: 120 Minuten

K2/1–1. (12 Punkte)

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = 2+x^2-\dfrac{x^4}{2},\ x \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie sie!

K2/1–2. (10 Punkte)

Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{5x^4}{\sqrt{x^5+4}}\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{6x^2+11x-5}{x^3+4x^2-5x}\mathrm{d}x$!

K2/1–3. (11 Punkte)

a) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen und Extremwerte der Funktion $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$!
b) Handelt es sich bei den lokalen Extrema um globale Extrema?

K2/1–4. (10 Punkte)

Wo nimmt die Funktion $f(x, y) = x^2y$ über dem im I. Quadranten $(x \geq 0, y \geq 0)$ gelegenen Teil des Ellipsenbogens $4x^2 + 9y^2 = 36$ ihren größten bzw. kleinsten Wert an?

K2/1–5. (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = xe^{\frac{y}{x}}$.

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung!
b) Ermitteln Sie im Punkt $(x, y) = (2, 2)$ die Richtungsableitung in Richtung der Winkelhalbierenden des I. Quadranten!
c) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an $z = f(x, y)$ im Punkt $(x, y, z) = (2, 0, 2)$?

K2/1–6. (7 Punkte)

a) Skizzieren Sie den Bereich $B = \{(x, y) :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 3 - 2x\}$!

b) Berechnen Sie $\iint\limits_B x^2 y \, \mathrm{d}A$!

18.2.2 Klausur Mathematik II vom 23. Februar 1998

Arbeitszeit: 120 Minuten

K2/2–1. (14 Punkte)

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = \dfrac{x^3}{10(x-2)}$, $x \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie sie!

K2/2–2. (9 Punkte)

a) Entwickeln Sie $f(x) = \sqrt{1+x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel bis zum kubischen Glied!
b) Schätzen Sie mit Hilfe des Restgliedes der Taylorschen Formel den Fehler ab, der entsteht, wenn man $\sqrt{\frac{3}{2}}$ nach dieser Formel berechnet.
c) Welcher Fehler entsteht bei der Berechnung von $\sqrt{\frac{3}{2}}$ nach dieser Formel tatsächlich?

K2/2–3. (9 Punkte)

Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{4x^2 + 3x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} \mathrm{d}x$!

K2/2–4. (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Länge der Kurve $x = t - \sin t \cos t$, $y = 1 - \cos^2 t$, $z = 2 \sin t$ für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$!

K2/2–5. (12 Punkte)

a) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen und Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x^2(2-y) - y^3 + 3y^2 + 9y$!
b) Handelt es sich bei den lokalen Extrema um globale Extrema?

K2/2–6. (8 Punkte)

Eine Ware kann nach zwei verschiedenen Technologien gefertigt werden. Bei der Produktion von x Einheiten nach Technologie A entstehen Kosten in Höhe von $50 + 11x + \frac{x^2}{10}$, während nach Technologie B Kosten in Höhe von $x^2 + x$ entstehen.

Insgesamt sollen 60 Einheiten kostenminimal produziert werden. Wie oft sind dafür die beiden Technologien anzuwenden?

18.2.3 Klausur Mathematik II vom 17. Juni 1998

Arbeitszeit: 120 Minuten

K2/3–1. (12 Punkte)

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie sie!

K2/3–2. (7 Punkte)

Berechnen Sie $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+3\cos x}\,\sin x\,\mathrm{d}x$!

K2/3–3. (10 Punkte)

Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\mathrm{d}x$!

K2/3–4. (14 Punkte)

a) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen und Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x^3y - 3xy + y^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$!
b) Handelt es sich bei den lokalen Extrema um globale Extrema?

K2/3–5. (9 Punkte)

Ein Unternehmen stellt ein Erzeugnis in zwei verschiedenen Produktionsstätten P_1 und P_2 her. In der Produktionsstätte P_1 entstehen für die Produktion von x Stück des Erzeugnisses Kosten in Höhe von $K_1(x) = \frac{1}{3}x^2 + 100000$, während in der Produktionsstätte P_2 Kosten in Höhe von $K_2(x) = x^2 + 8x + 30000$ entstehen. Es sollen 300 Stück des Erzeugnisses kostenminimal produziert werden.

a) Wie ist die Produktion auf beide Produktionsstätten zu verteilen, wenn aus Kapazitätsgründen keine der Produktionsstätten den Auftrag allein fertigen kann?
b) Welche Kosten entstehen bei dieser Verteilung?

K2/3–6. (8 Punkte)

a) In der Umgebung welcher Punkte ist durch $x^2+4y^2-16y+12=0$ eine Funktion $x \longrightarrow y(x)$ definiert?
b) Ermitteln Sie die Ableitung $y'(x)$ dieser Funktion an der Stelle $(x,y)=(1.2\,,\,2.8)$ durch implizite Differentiation!
c) Interpretieren Sie die Ergebnisse von a) und b) geometrisch!

18.2.4 Klausur Mathematik II vom 27. Juli 2000

Arbeitszeit: 90 Minuten

K2/4–1. (10 Punkte)

Die Anzahl z der Fahrzeuge, die eine bestimmte Straße stündlich passieren können, lasse sich aus der mittleren Geschwindigkeit v in m/s bei einer mittleren Fahrzeuglänge von 4 m nach folgender Formel berechnen:

$$z(v) = 1000\frac{v}{4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}}.$$

a) Bei welcher Durchschnittsgeschwindigkeit in km/h ist die Durchlassfähigkeit der Straße am größten?
b) Die Straße werde durchschnittlich mit $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$ passiert. Approximieren Sie z um v_0 durch ein Taylorpolynom 2. Grades!

K2/4–2. (10 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale:
a) $\int (2+3x)^2\,\mathrm{d}x$,
b) $\int x\cos 5x\,\mathrm{d}x$,
c) $\int \frac{5x-1}{x^2+x-12}\,\mathrm{d}x$!

K2/4–3. (8 Punkte)

Gegeben sei die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t\sin t \\ \frac{2}{3}\sqrt{2t^3} \\ 2-t\cos t \end{pmatrix}, \quad 1 \le t \le 5.$

a) Berechnen Sie die Länge der Kurve!
b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt $\vec{x}(\pi)$!

K2/4–4. (12 Punkte)

Für $x > 0$, $y > 0$ sei die Funktion $f(x,y) = x - y + \ln \frac{y}{x}$ definiert.

a) Berechnen Sie Gradient und Hessematrix dieser Funktion!

b) Hat die Funktion globale oder lokale Extrema bzw. Sattelpunkte?

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(\mathrm{e}, 1)$ an $z = f(x,y)$!

d) Sei $\vec{a}$ ein Vektor in gegenüber der positiven x–Achse im positiven Sinne um 60° gedrehter Richtung. Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\mathrm{e}, 1)$!

e) In welche Richtung wächst $f(x,y)$ ausgehend von $(x,y) = (\mathrm{e}, 1)$ am stärksten?

18.2.5 Klausur Mathematik II vom 13. Februar 2001

Arbeitszeit: 90 Minuten

K2/5–1. (15 Punkte)

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{48 - 2x}$, $x \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie sie!

K2/5–2. (15 Punkte)

a) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen und Extremwerte der Funktion $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 + 2xy - y^2)$!

b) Hat die Funktion globale Extrema?

K2/5–3. (15 Punkte)

Gegeben sei die logistische Funktion $f(t) = \dfrac{1}{2 + \mathrm{e}^{3t}}$.

a) Führen Sie für $f(t)$ an der Stelle $t = 0$ die Taylorentwicklung bis zum quadratischen Glied aus!

b) Geben Sie die Gleichung der Tangente an $f(t)$ im Punkt $t = 0$ an!

c) Berechnen Sie für $t = 0.1$ mit Hilfe des Taylorpolynoms 1. und 2. Grades Näherungswerte für $f(t)$!

d) Schätzen Sie den für $t = 0.1$ bei Verwendung des Taylorpolynoms 1. Grades entstehenden Fehler mit Hilfe der Restgliedformel ab und vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Fehler!

K2/5–4. (15 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int \sqrt[7]{6x+5}\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int \frac{x^4-5x^3+7x^2-13x-10}{x^3-5x^2}\,\mathrm{d}x$!

18.2.6 Klausur Mathematik II vom 26. Juli 2001

Arbeitszeit: 90 Minuten

K2/6–1. (7 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{\sin\pi(x+2)}{x+2} + x^2$.

1. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.
2. Bestimmen Sie eine quadratische Näherung durch Taylorentwicklung im Punkt 0.

K2/6–2. (12 Punkte)

Die vertikale Bewegung eines Körpers wird durch den zeitabhängigen Abstand zur Wasseroberfläche

$$a(t) = (t^3 - 2t^2 - 3t)e^{-t} \quad (t \text{ in Sekunden})$$

beschrieben.
($a(t) > 0$: Körper befindet sich über der Wasseroberfläche,
$a(t) < 0$: Körper befindet sich unter der Wasseroberfläche.)

Diskutieren Sie die Funktion und gehen Sie insbesondere auf folgende Fragen ein:

1. Wann befindet sich der Körper an der Wasseroberfläche?
2. Wie groß ist seine höchste Höhe im Zeitintervall $[0,\infty)$?
3. Wie tief taucht er maximal ein ($t \in [0,\infty)$)?
4. Skizzieren Sie die Funktion!

K2/6–3. (9 Punkte)

Berechnen Sie:

1. $\displaystyle\int \frac{2x-11}{x^2+3x-10}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int (9x^2+2x+5)\sqrt[5]{3x^3+x^2+5x+8}\,\mathrm{d}x$

3. $\int\limits_0^{\pi/6} \sin x \cdot \cos x \ \mathrm{d}x$

K2/6–4. (12 Punkte)

Eine Schraubenlinie sei beschrieben durch die Parameterdarstellung

$$x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\,.$$

1.Bestimmen Sie die Länge des Kurvensegmentes $t \in [0,1]$.

2.Ermitteln Sie den Krümmungsradius im Punkt $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$.

18.2.7 Klausur Mathematik II vom 18. Februar 2002

Arbeitszeit: 90 Minuten

K2/7–1. (5 Punkte)

α und β seien voneinander verschiedene reelle Parameter. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x} - \mathrm{e}^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$!

K2/7–2. (6 Punkte)

Approximieren Sie die Funktion $f(x) = 3x^2 + 2\mathrm{e}^{2x} + \sin 3x$ mittels Taylorentwicklung im Punkt $x = 0$ durch eine Parabel!

K2/7–3. (6 Punkte)

e sei wie üblich die Eulersche Zahl. Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/12} \frac{\cos 6x}{\sin 6x + \mathrm{e}}\,\mathrm{d}x$!

K2/7–4. (8 Punkte)

Gegeben sei die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \cos t \\ t^2 \sin t \\ 2t \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Länge des Kurvensegments für $0 \le t \le \pi$!

b) Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt $\vec{x}(\pi)$ an!

K2/7–5. (11 Punkte)

Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen und Extremwerte der Funktion

$$f(x,y,z) = y^3 + x^2 + 12y^2 + z^2 + 12xy - 240y + 6z \ !$$

Handelt es sich bei den lokalen Extrema um globale Extrema?

K2/7–6. (4 Punkte)

a) Ein Kapital von 10 000 € wird für 2 1/2 Jahre mit einer Verzinsung von 4.2 % p.a. angelegt, die jährlichen Zinsen werden dem Kapital am Ende des Sparjahres gutgeschrieben und von da an mit diesem verzinst. Auf welchen Betrag wächst das Kapital an?
b) Zu welchem Zinssatz muss Kapital angelegt werden, damit es sich in 20 Jahren verdoppelt?

18.2.8 Klausur Mathematik II vom 31. Juli 2002

Arbeitszeit: 90 Minuten

K2/8–1. (4 Punkte)

Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - x}{2x + x^2}$!

K2/8–2. (13 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion und skizzieren Sie sie!
b) Approximieren Sie die Funktion mittels Taylorentwicklung im Punkt $x_0 = 0$ durch eine Parabel!

K2/8–3. (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[4]{1+20x-3x^2-2x^3}\,(20-6x-6x^2)\,\mathrm{d}x$!

K2/8–4. (13 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = (x^3 + 2x^2 + 1)(y^2 + 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen!
b) Ermitteln Sie die Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion!
c) Geben Sie den Wertebereich der Funktion an!

K2/8–5. (5 Punkte)

Bei einem Computerkauf kann ein Kunde zwischen sofortiger Barzahlung von 1000 € und einer „Zahlpause“ von 2 Monaten wählen, wobei er dann 1008 € zu zahlen hat.

a) Vergleichen Sie die Barwerte zum Kaufdatum bei einem Kalkulationszinssatz von 4 %!
b) Für welchen Kalkulationszinssatz sind die Barwerte gleich?

18.3 Mathematik III

18.3.1 Klausur Mathematik III vom 19. Februar 1998

Arbeitszeit: 120 Minuten

K3/1–1. (11 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'(x) - y(x)\cos x = \sin x \cos x$!

K3/1–2. (8 Punkte)

Lösen Sie die Randwertaufgabe $\begin{array}{c} \ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + 10x(t) = 0 \\ x(0) = 3\,, \quad x(\frac{\pi}{6}) = 2 \end{array}$!

K3/1–3. (13 Punkte)

Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& 2x + y - 3z \\ \dot{y} &=& x + 2y - 3z \\ \dot{z} &=& 5x + y - 6z \end{array}$!

K3/1–4. (9 Punkte)

Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{c} \sin x - y = 0 \\ x - \cos y = 0 \end{array}$$

an und führen Sie einen Iterationsschritt mit dem Startwert $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (1, 1)$ aus!

K3/1–5. (7 Punkte)

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl}
100x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 &=& 96 \\
x_1 + 100x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 &=& 97 \\
x_1 + x_2 + 100x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 &=& 98 \\
x_1 + x_2 + x_3 + 100x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 &=& 99 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 100x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 &=& 100 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 100x_6 + x_7 + x_8 + x_9 &=& 101 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 100x_7 + x_8 + x_9 &=& 102 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + 100x_8 + x_9 &=& 103 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 100x_9 &=& 104
\end{array}$$

soll mit dem Jacobischen Gesamtschrittverfahren iterativ nach der Vorschrift

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \frac{1}{100}\left(\begin{pmatrix} 96\\97\\98\\99\\100\\101\\102\\103\\104 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix}\mathbf{x}^{(n)}\right)$$

gelöst werden.

a) Begründen Sie die Konvergenz dieses Verfahrens!
b) Führen Sie mit dem Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1,\ldots,1)^\top$ einen Iterationsschritt aus!

K3/1–6. (12 Punkte)

Entwickeln Sie die $\frac{\pi}{2}$–periodische Funktion $f(x) = |\sin 2x|$ in eine Fourierreihe!

Hinweis: $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))$

18.3.2 Klausur Mathematik III vom 3. August 1998

Arbeitszeit: 120 Minuten

K3/2–1. (10 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung $y''(x) - 5y'(x) - 24y(x) = 9\mathrm{e}^{-x}$!

K3/2–2. (10 Punkte)

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $yy' + \dfrac{1}{x^2} = 0\,,\quad y(1) = -4$!

K3/2–3. (14 Punkte)

Lösen Sie das Differentialgleichungssystem
$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= 3x+3y-4z \\ \dot{z} &= -2x+y-2z \end{aligned}\quad !$$

K3/2–4. (10 Punkte)

Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 + 4y &= 13 \\ x + 3y^2 &= 6 \end{aligned}$$

an und führen Sie einen Iterationsschritt mit dem Startwert $(x_0, y_0) = (2,2)$ aus!

K3/2–5. (8 Punkte)

Von einer Funktion $y = f(x)$ liegen folgende Werte vor: $\begin{array}{c||c|c|c} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 7 & 4 & 2 \end{array}$

Ermitteln Sie Näherungswerte für $f(0.8)$ durch

a) lineare Interpolation zwischen den Stützstellen $x = 0$ und $x = 1$,
b) durch quadratische Interpolation!

K3/2–6. (8 Punkte)

Ermitteln Sie eine Näherung für die kleinste positive Lösung der Gleichung $\tan x = x$, indem Sie auf die Gleichung $\sin x - x \cos x = 0$ das Newtonverfahren anwenden!

Hinweis: Fertigen Sie zur Bestimmung eines geeigneten Startwertes eine Skizze an!

18.3.3 Klausur Mathematik III vom 13. Januar 1999

Arbeitszeit: 90 Minuten

K3/3–1. (9 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'''(x) - 3y''(x) - 28y'(x) = 112$!

K3/3–2. (11 Punkte)

Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{array}{rcr} \dot{x} & = & x+5y \\ \dot{y} & = & -x-3y \end{array} \quad !$$

K3/3–3. (12 Punkte)

Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcl} -2\sqrt{x} & + & 3y^2 & = & 0.23 \\ 4x\sqrt{x} & - & 5y & = & 0.824 \\ z^3 & - & 7z & = & 7 \end{array}$$

an und führen Sie einen Iterationsschritt mit dem Startwert $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 3)$ aus!

K3/3–4. (13 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

a) Skizzieren Sie $f(x)$!
b) Approximieren Sie die Funktion $f(x)$ mit Hilfe der Fourierentwicklung durch ein

trigonometrisches Polynom 1. Grades $P(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos 2x + b_1 \sin 2x$!

18.3.4 Klausur Mathematik III vom 21. Februar 2001

Arbeitszeit: 90 Minuten

K3/4–1. (17 Punkte)

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - 2y - z \\ \dot{y} &= 3x - 5y - 3z \\ \dot{z} &= 2x - 4y - z \quad ! \end{aligned}$$

K3/4–2. (17 Punkte)

Ermitteln Sie alle Extrema der Funktion $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ über dem Ellipsoid $x^2 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$!

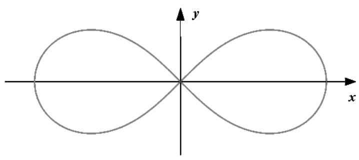
K3/4–3. (13 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} \sin|x| & 0 \le |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \end{cases}$ werde 2π–periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!
b) Approximieren Sie $f(x)$ mittels Fourierentwicklung durch ein trigonometrisches Polynom 2. Grades $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{2} a_k \cos kx + b_k \sin kx$!
Hinweis: $\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))$

K3/4–4. (13 Punkte)

Durch die Gleichung $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ wird in kartesischen Koordinaten eine Lemniskate beschrieben. Sie umschließt eine Fläche, die sich aus zwei konvexen Teilflächen zusammensetzt.



a) In welchen Punkten schneidet die Lemniskate die x–Achse?
b) Zeigen Sie mittels Substitution durch Polarkoordinaten, dass die von der Lemniskate eingeschlossene Fläche durch
$\{(r,\varphi) : -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le r \le \sqrt{\cos 2\varphi}\} \cup \{(r,\varphi) : \frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4},\ 0 \le r \le \sqrt{\cos 2\varphi}\}$
beschrieben wird!
Hinweis: $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der von der Lemniskate eingeschlossenen Fläche!

18.3.5 Klausur Mathematik III vom 30. Juli 2001

Arbeitszeit: 90 Minuten

K3/5–1. (15 Punkte)

Mit minimalem Materialaufwand soll ein quaderförmiger oben offener Behälter mit einem Fassungsvermögen von 1 Liter hergestellt werden. Ermitteln Sie die Seitenlängen des Quaders!

K3/5–2. (15 Punkte)

Ermitteln Sie die Lösung des Differenzialgleichungssystems $\begin{aligned}\dot{x} &= 4x - 5y \\ \dot{y} &= 10x + 6y\end{aligned}$, für die $x(0) = 10$ und $x(\frac{\pi}{2}) = 0$ gilt!

K3/5–3. (15 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \sin x & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$ werde 2π–periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!

b) Approximieren Sie $f(x)$ mittels Fourierentwicklung durch ein trigonometrisches Polynom 2. Grades $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{2} a_k \cos kx + b_k \sin kx$!

Hinweis: $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

K3/5–4. (15 Punkte)

Lösen Sie iterativ das nichtlineare Gleichungssystem $\begin{aligned} 2x^5 + \ y^5 &= 3 \\ x^8 + 2y^8 &= 3.05 \end{aligned}$!

Bei Verwendung eines quadratisch konvergenten Verfahrens mit einer guten Startnäherung braucht in der Klausur nur ein Iterationsschritt ausgeführt werden.

18.3.6 Klausur Mathematik III vom 18. Februar 2002

Arbeitszeit: 90 Minuten

K3/6–1. (6 Punkte)

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y'' + y' - 56y = 56$!

K3/6–2. (11 Punkte)

Ermitteln Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ über dem Kreis $(x-3)^2 + (y-2)^2 = \dfrac{1}{5}$!

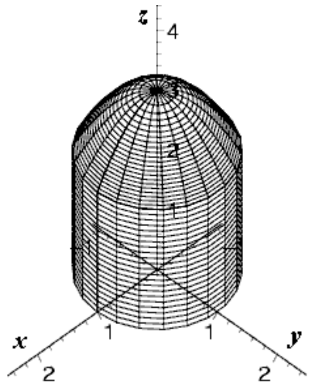
K3/6–3. (6 Punkte)

Diskutieren Sie die Unterschiede zwischen Fourier- und Taylorentwicklung von Funktionen einer reellen Veränderlichen!

K3/6–4. (8 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumen des über dem Einheitskreis der kartesischen x–y–Ebene errichteten Zylinders der Höhe $3 - x^2 - y^2$!

b) Bekanntlich hat die Einheitskugel das Volumen $\dfrac{4}{3}\pi$. Verifizieren Sie dies mit Hilfe eines Doppelintegrals!



K3/6–5. (9 Punkte)

In einer Stadt gibt es 100 Bäcker B_i $(i = 1, \ldots, 100)$. Jeder von ihnen verkauft in seinem Laden x_i Brötchen, von denen er 10/12 selbst herstellt, während er je 1/12 von seinen Nachbarkollegen B_{i-1} und B_{i+1} bezieht. Dabei habe der Bäcker B_1 die Nachbarn B_{100} und B_2 sowie der Bäcker B_{100} die Nachbarn B_{99} und B_1.

Die Bäcker B_1 bis B_{50} stellen je 1000 Brötchen, die Bäcker B_{51} bis B_{100} stellen je 2000 Brötchen her. Es wird angenommen, dass alle hergestellten Brötchen auf die beschriebene Weise auch verkauft werden.

a) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Bestimmung der x_i auf!

b) Geben Sie für dieses Gleichungssystem die Iterationsvorschrift des Jacobischen Gesamtschrittverfahrens an!

c) Begründen Sie die Konvergenz dieses Verfahrens!

d) Um eine Startnäherung für die Jacobiiteration zu erhalten, wird angenommen, dass jeder Bäcker seine Produktion vollständig im eigenen Laden verkauft. Führen Sie von dieser Startnäherung ausgehend einen Jacobiiterationsschritt aus!

e) Berechnen Sie für x_{50} und x_{51} auch das Ergebnis des zweiten Jacobiiterationsschritts!

18.3.7 Klausur Mathematik III vom 07. August 2002

Arbeitszeit: 90 Minuten

K3/7–1. (10 Punkte)

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y''' + y'' - 56y' = 56$!

K3/7–2. (12 Punkte)

Ermitteln Sie die Extrema der Funktion $f(x, y) = x^3 - 3\sqrt{2}\,y$ über dem Teil der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$, für den $x \geq 1$ gilt!

K3/7–3. (10 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 2 \end{cases}$ werde 4–periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!

b) Wie muss bei der Fourierentwicklung $F(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\,Cx + b_k \sin k\,Cx)$ der Parameter C gewählt werden?

c) Approximieren Sie die Funktion mittels Fourierentwicklung durch ein trigonometrisches Polynom 1. Grades $F_1(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos Cx + b_1 \sin Cx$!

d) Für welche x konvergiert die Fourierreihe $F(x)$ gegen $f(x)$, was passiert für die x, für die keine Konvergenz gegen $f(x)$ erfolgt?

K3/7–4. (8 Punkte)

Auf das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^4 + 2xy^2 &= 3.1 \\ x^2y + y^3 &= 2.1 \end{aligned}$$

soll das Newtonverfahren angewendet werden.

a) Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems an!

b) Ermitteln Sie überschlägig eine geeignete Startnäherung!

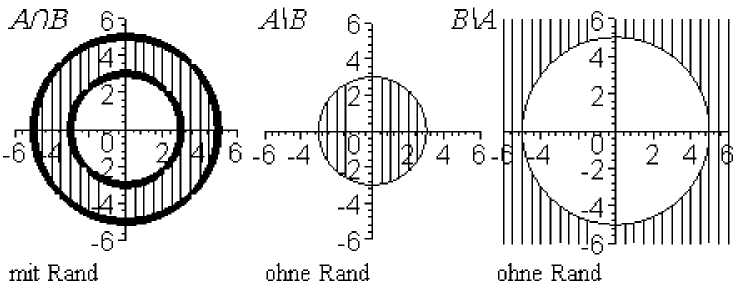
c) Führen Sie für diese Startnäherung einen Iterationsschritt aus!

Kapitel 19
Lösungen

19.1 Grundlagen

Aufgabe 1.12

a) $A \cap B = (1,4], \;\; A \cup B = \mathbb{R}, \;\; A \backslash B = (-\infty, 1], \;\; B \backslash A = (4, \infty)$
b) $A \cap B = [0,2), \;\; A \cup B = [-1,2], \;\; A \backslash B = [-1,0), \;\; B \backslash A = \{2\}$
c) $A \cap B = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 9 \le x^2 + y^2 \le 25\}$ (Kreisring),
$A \cup B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (ganze Ebene),
$A \backslash B = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 9\}$,
$B \backslash A = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 > 25\}$



Aufgabe 1.14

a) $x^2 - 6x + 9 > 1 \iff x^2 - 6x + 8 > 0, \quad x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 4, \; 2,$
$x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2) > 0$ falls $x - 4 > 0 \;\wedge\; x - 2 > 0 \;\Rightarrow\; x > 4$
oder $x - 4 < 0 \;\wedge\; x - 2 < 0 \;\Rightarrow\; x < 2,$

Lösung: $\{x \in \mathbb{R} : \; x < 2 \;\vee\; x > 4\} = (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

b)

		Beitrag zur Lösung:
$x < \frac{7}{5}$:	$2x + 4 < 15x - 21,\ 25 < 13x,\ x > \frac{25}{13}$	Widerspruch zu $x < \frac{7}{5}$
$x = \frac{7}{5}$:	nicht definiert	
$x > \frac{7}{5}$:	$2x + 4 > 15x - 21,\ 25 > 13x,\ x < \frac{25}{13}$	$\frac{7}{5} < x < \frac{25}{13}$

Lösung: $\{x \in \mathbb{R} :\ \frac{7}{5} < x < \frac{25}{13}\} = (\frac{7}{5}, \frac{25}{13})$

c) $|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ 1-x & x < 1 \end{cases}$

		Beitrag zur Lösung:
$x \geq 1$:	$x - 1 \geq 4,\ x \geq 5$	$x \geq 5$
$x < 1$:	$1 - x \geq 4,\ x \leq -3$	$x \leq -3$

Lösung: $\{x \in \mathbb{R} :\ x \leq -3\ \vee\ 5 \leq x\} = (-\infty, -3] \cup [5, \infty)$

d)

		Beitrag zur Lösung:
$x < 1$:	$3 - x \leq 2(1-x),\ 3 - x \leq 2 - 2x,\ x \leq -1$	$x \leq -1$
$1 \leq x < 3$:	$3 - x \leq 2(x-1),\ 3 - x \leq 2x - 2,\ 3x \geq 5,\ x \geq \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3} \leq x < 3$
$3 \leq x$:	$x - 3 \leq 2(x-1),\ x - 3 \leq 2x - 2,\ -1 \leq x$	$3 \leq x$

Lösung: $\{x \in \mathbb{R} :\ x \leq -1\ \vee\ \frac{5}{3} \leq x\} = (-\infty, -1] \cup [\frac{5}{3}, \infty)$

Aufgabe 1.15

Fallunterscheidung:

$x < -3$:	$1 - x \leq -2x - 6,\quad x \leq -7$	Lösungsbestandteil: $(-\infty, -7]$
$x = -3$:	nicht definiert	
$-3 < x < 1$:	$1 - x \geq -2x - 6,\quad x \geq -7$	Lösungsbestandteil: $(-3, 1)$
$1 \leq x$:	$x - 1 \geq -2x - 6,\quad 3x \geq -5,\quad x \geq -\frac{5}{3}$	Lösungsbestandteil: $[1, \infty)$

Lösung: $(-\infty, -7] \cup (-3, \infty)$

Aufgabe 1.19

a) $\sum_{i=1}^{10} a_i = \sum_{i+1=1}^{10} a_{i+1} = \sum_{i=0}^{9} a_{i+1} = \sum_{j=0}^{9} a_{j+1}$, d.h. richtig

b) $\sum_{i=0}^{9} (a_i + 1) = \sum_{i=0}^{9} a_i\ +\ 10$ i.A. $\neq \sum_{i=1}^{10} a_i$, d.h. falsch

c) $\sum_{i=1}^{n} (5a_i + 1) = 5 \sum_{i=1}^{n} a_i\ +\ 5 = 5 \sum_{j=1}^{n} a_j\ +\ 5 \neq 5 \sum_{j=1}^{n} a_j\ +\ 1$, d.h. falsch

Aufgabe 1.20

Durch den Preisindex wird der Preis des Warenkorbes im Basisjahr mit dem Preis verglichen, der für diesen Warenkorb im Berichtsjahr zu zahlen gewesen wäre. Deshalb gehen die Verbrauchsmengen im Berichtsjahr nicht in die Berechnung ein.

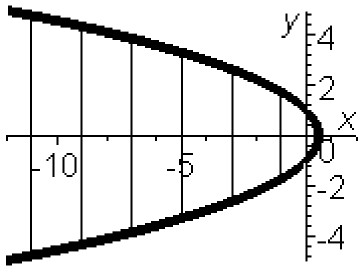
$$I_{1996}^{1998} = \frac{0.55 \cdot 300 + 3.30 \cdot 50 + 1.20 \cdot 100}{0.50 \cdot 300 + 3.00 \cdot 50 + 1.00 \cdot 100} = \frac{450}{400} = 1.125$$

Die Preise haben sich in 2 Jahren um den Faktor 1.125 erhöht, das entspricht einer durchschnittlichen jährlichen Erhöung um den Faktor $\sqrt{1.125} \approx 1.06066$. Die durchschnittliche jährliche Preissteigerung beträgt also 6.07 %.

Aufgabe 1.23

a) $z = x + \mathrm{i}y,\ |z| = \sqrt{x^2+y^2},\ \mathrm{Re}(z) = x,$ d.h. $\sqrt{x^2+y^2} \le 1 - x.$

b) Aus $\sqrt{x^2+y^2} \le 1-x$ folgt zunächst, dass $1-x \ge 0$ und damit $x \le 1$ sein muss. Ist dies der Fall, so ist die Ungleichung äquivalent zu
$x^2+y^2 \le 1-2x+x^2 \iff y^2 \le 1-2x \iff x \le -\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}.$
Ist die zuletzt notierte Ungleichung erfüllt, so ist $x \le 1$ automatisch erfüllt. Die Lösungsmenge kann also durch $\{z \in \mathbb{C} :\ z = x + \mathrm{i}y,\ x \le -\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\}$ beschrieben werden.



Aufgabe 1.29

a) $\dfrac{(2\mathrm{i}+1)(\mathrm{i}-2)+1}{(2-\mathrm{i})^2-2+\mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{i}^2+\mathrm{i}-4\mathrm{i}-2+1}{4-4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2-2+\mathrm{i}} = \dfrac{-3-3\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}} = \dfrac{(-3-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{(1-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})} = \dfrac{6-12\mathrm{i}}{10} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$

b) $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3+1} = \sqrt{2},\ \varphi = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ (da I. Quadrant),
$z^{20} = \left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})\right)^{20} = 2^{10}(\cos\frac{20\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{20\pi}{6}) = 2^{10}(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}) =$
$2^{10}(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3}) = -2^9(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = -512 - 512\sqrt{3}\mathrm{i}$

c) $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3+1} = \sqrt{2},\ \varphi = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ (da I. Quadrant),
$z^{30} = \left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})\right)^{30} = 2^{15}(\cos\frac{30\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{30\pi}{6}) =) = 2^{15}(\cos 5\pi + \mathrm{i}\sin 5\pi) =$
$2^{15}(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -2^{15} = -32768$

Aufgabe 0.6

Üblicherweise bezeichnet man als Handelsspanne den dem Händler verbleibenden Anteil am Verkaufspreis, d.h.

$$\text{Handelsspanne} = \frac{\text{Verkaufspreis} - \text{Einkaufspreis}}{\text{Verkaufspreis}} = \frac{V-E}{V}.$$

Der Umsatz ergibt sich durch Multiplikation der verkauften Stückzahl mit dem Preis. Ist n die zum nicht rabattierten Preis V und n_R die zum rabattierten Preis V_R verkaufbare Stückzahl, so bedeutet eine Umsatzsteigerung von 70 % bei einem Preisnachlass von 10 %

$$1.7\; n\; V = n_R\; V_R = n_R\; 0.9\; V.$$

Der Gewinn ergibt sich durch Multiplikation der verkaufbaren Stückzahl mit der Differenz von Verkaufs- und Einkausfspreis. Gleichheit des Gewinns heißt also

$$n\;(V-E) = n_R\;(V_R - E) = n_R\;(0.9\,V - E).$$

Zur Berechnung der Handelsspanne müssen die nicht in sie eingehenden Größen n und n_R eliminiert werden. Aus der ersten Gleichung ergibt sich $n_R = \frac{1.7}{0.9}\,n = \frac{17}{9}\,n$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
n\;(V-E) &= \frac{17}{9}\,n\;(0.9\,V - E)\\
V - E &= \frac{17}{9}\;(0.9\,V - E)\\
V - E &= \frac{17}{9}\,0.9\,V - \frac{17}{9}\,E\\
\frac{17}{9}\,E - E &= \frac{17}{9}\,0.9\,V - V\\
\frac{17-9}{9}\,E &= \frac{17\cdot 0.9 - 9}{9}\,V\\
8\,E &= 6.3\,V, \qquad\qquad E = 0.7875\,V
\end{aligned}$$

Also beträgt der Einkaufspreis 78.75 % vom nicht rabattierten Verkaufspreis, die Handelsspanne damit $1 - 0.7875 = \underline{\underline{21.25\,\%}}$

Aufgabe 0.7

Vereinfachen des ersten Summanden ergibt:

$$\frac{(2^{n+2})^2}{32\cdot 4^{n-1}} = \frac{2^{2n+4}}{2^5\cdot(2^2)^{n-1}} = \frac{2^{2n+4}}{2^5\cdot 2^{2n-2}} = \frac{2^{2n+4}}{2^{2n+3}} = 2$$

Die anderen Summanden werden durch Hauptnennerbildung zusammengefasst. Da $(2^n-1)(2^n+1) = 4^n - 1$ ist dies der Hauptnenner und man erhält:

$$\frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^n+1} - \frac{2}{4^n-1} = \frac{2^n+1-(2^n-1)-2}{4^n-1} = 0$$

Es bleibt also nur der erste Summand übrig und der Ausdruck vereinfacht sich zu 2.

Aufgabe 1.37

Die Ereignisse sollen wie folgt bezeichnet werden:
R . . . Es ist ein Regenbogen zu sehen.
r . . . Es regnet.
S . . . Die Sonne scheint.
Die Lösungen lauten dann wie folgt:

a) $\underbrace{R}_{Prämisse} \Rightarrow \underbrace{r \wedge S}_{Konklusion}$

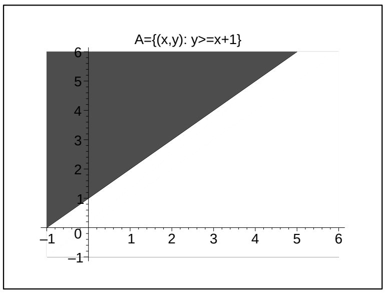
b) Das Erscheinen eines Regenbogens ist hinreichend dafür, dass es regnet und die Sonne scheint.
Regen und Sonnenschein sind notwendig dafür, dass ein Regenbogen zu sehen ist.

c) $\neg r \vee \neg S \Rightarrow \neg R$
In Worten: Wenn es nicht regnet oder nicht die Sonne scheint, dann ist auch kein Regenbogen zu sehen.

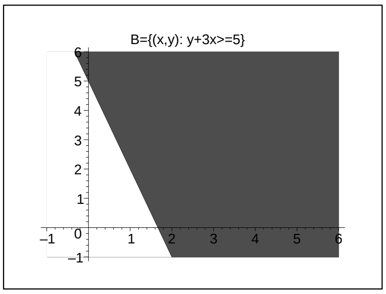
Aufgabe 1.38

Die Bilder sollten so oder so ähnlich aussehen:

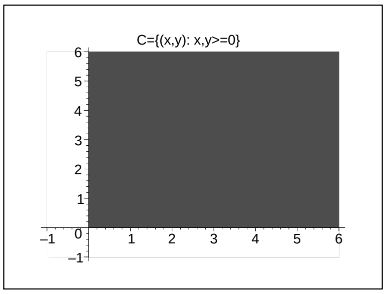
A



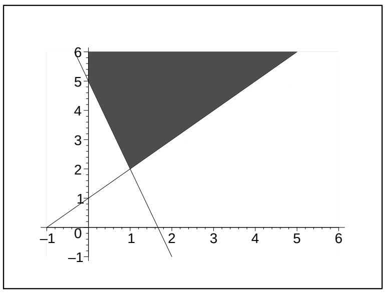
B



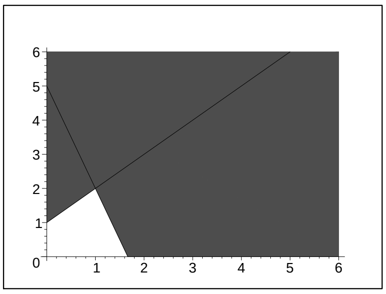
C



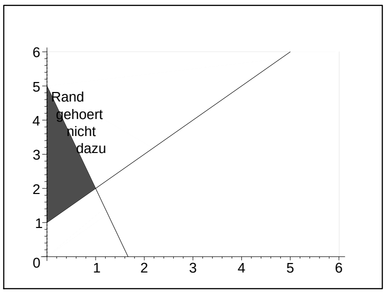
$(A \cap B) \cap C$



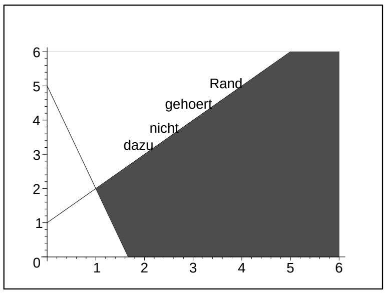
$(A \cup B) \cap C$



$(A \backslash B) \cap C$



$(B \backslash A) \cap C$



Aufgabe 1.39

Wir unterscheiden vier Fälle:

(I) $x > 6$.Betragszeichen können weggelassen werden, da das Argument positiv ist. Nach Multiplikation mit $2(6-x)$ ergibt sich jedoch $2x+6 < 6-x$ (Relationszeichen umdrehen, da Multiplikation mit negativer Größe) und damit $x < 0$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

(II) $x = 6$. Dieser Fall ist nicht definiert, da Division durch Null aufträte.

(III) $-3 \leq x < 6$. Betragszeichen werden weggelassen. Es ergibt sich:
$x + 3 > 3 - \frac{x}{2}$ und $\frac{3}{2}x > 0$, also $x > 0$.
Lösung sind also die x mit $0 < x < 6$

(IV) $x < -3$. Betragszeichen werden weggelassen, ihr Inhalt mit -1 multipliziert. Hier erhält man:
$-3 - x > 3 - \frac{x}{2}$ oder $-6 > \frac{x}{2}$, also $x < -12$.
Diese x erfüllen alle auch die Bedingung $x < -3$.

Damit gilt die Ungleichung für alle $x \in (-\infty, -12) \cup (0, 6)$

Aufgabe 1.40

a) Werten zuerst Zähler und Nenner des großen Bruchs getrennt aus:
Zähler: Erweitern den Bruch mit $1 + 2\mathrm{i}$ und verwenden 3. binomische Formel:

$$z = \frac{40 - 20\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}} = \frac{20(2 - \mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})}{5} = 4(4 + 3\mathrm{i})$$

Nenner: Bilden den Hauptnenner $(5 + 2\mathrm{i})(5 - 2\mathrm{i})$

$$n = \frac{(5 - 2\mathrm{i}) - (5 + 2\mathrm{i})}{(5 + 2\mathrm{i})(5 - 2\mathrm{i})} = \frac{-2\mathrm{i} - 2\mathrm{i}}{25 - 4\mathrm{i}^2} = -\frac{4\mathrm{i}}{29}$$

Betrachten nun den eigentlichen Ausdruck:

$$\frac{1}{29}\frac{z}{n} = \frac{1}{29}\frac{4(4 + 3\mathrm{i})}{-\frac{4\,\mathrm{i}}{29}} = \frac{4 + 3\mathrm{i}}{-\mathrm{i}} = -3 + 4\mathrm{i}$$

Der Betrag dieser komplexen Zahl ist gleich $\sqrt{3^2+4^2}=5$. Das Argument errechnet z.B. sich aus $\tan\varphi=-\frac{4}{3}$ und der zusätzlichen Überlegung, dass die komplexe Zahl im II. Quadranten liegt. Es gilt $\arctan -\frac{4}{3} = -53.13\,^\circ$. Da φ im II. Quadranten liegt, folgt $\varphi = -53.13\,^\circ + 180\,^\circ = 126.87\,^\circ$. Die trigonometrische Darstellung lautet also $5(\cos 126.87\,^\circ + \mathrm{i}\sin 126.87\,^\circ)$.

b) Hier fängt man besser mit der trigonometrischen Form an. Offensichtlich ist $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$ und $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4}))$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\frac{(1+\mathrm{i})^{2002}}{(1-\mathrm{i})^{1982}} &= (1+\mathrm{i})^{20}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{1982}\\ &= \left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})\right)^{20}\left(\frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4}))}\right)^{1982}\\ &= \sqrt{2}^{20}(\cos 5\pi+\mathrm{i}\sin 5\pi)\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)^{1982}\\ &= 2^{10}\,(-1)\,(\cos 991\pi+\mathrm{i}\sin 991\pi) = -2^{10}(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=1024.\end{aligned}$$

Das reelle Ergebnis 1024 kann komplex algebraisch als $1024+0\,\mathrm{i}$ und trigonometrisch als $1024\,(\cos 0+\mathrm{i}\,\sin 0)$ dargestellt werden.

Aufgabe 1.41

a) Setzt man die Darstellung von z in die Ungleichung ein, so ergibt sich:

$$|x+\mathrm{i}y| \le \sqrt{|\mathrm{Re}(x+\mathrm{i}y)|} \iff \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{|x|} \iff x^2+y^2 \le |x|.$$

b) Zum Auflösen des Betrages führen wir eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $x \ge 0$ Betragszeichen werden weggelassen. Erhalten

$$x^2+y^2 \le x \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \le \frac{1}{4}.$$

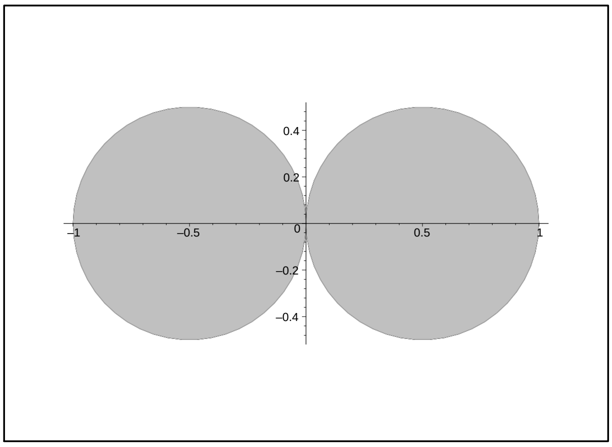
Dies entspricht einem Kreis mit Mittelpunkt $(1/2,0)$ und Radius $1/2$. Seine Punkte haben alle eine nichtnegative x–Koordinate, so dass er vollständig zur gesuchten Menge gehört.

2. Fall: $x < 0$ Betragszeichen durch Multiplikation mit -1 ersetzen. Erhalten

$$x^2+y^2 \le -x \iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \le \frac{1}{4}.$$

Dies entspricht einem Kreis mit Mittelpunkt $(-1/2,0)$ und Radius $1/2$. Seine Punkte haben alle eine negative x–Koordinate, so dass er vollständig zur gesuchten Menge gehört (bis auf $(0,0)$, dieser Punkt ist aber schon im anderen Kreis enthalten).

Damit ergibt sich folgendes Bild:



19.2 Lineare Algebra

Aufgabe 2.6

$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Produkt von Nichtnullmatrizen kann Nullmatrix werden!),

$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -12 \\ -9 & 12 & -18 \\ -3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ $(\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}\,!)$, $\mathbf{AC}$ existiert nicht, $\mathbf{CA} = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -13 \\ -6 & 9 & -15 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 7 \\ -8 & -11 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -5 & 7 & -11 \end{pmatrix}$, $\mathbf{ABC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{CBA}$ ex. nicht

Aufgabe 2.7

$\mathbf{YAX}$ existiert nicht,

$$\mathbf{Y}^\mathsf{T}\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

Aufgabe 2.9

a) $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2^\mathsf{T}\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 14 & 28 \\ 14 & 18 & 26 \\ 8 & 6 & 14 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{r} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} + \mathbf{A}_2^\mathsf{T} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12480 \\ 12960 \\ 6660 \end{pmatrix}$

Es werden 12480 Einheiten R_1, 12960 Einheiten R_2 und 6660 Einheiten R_3 benötigt.

Aufgabe 2.13

$$
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\
2 & 4 & 1 & 3 & 9 \\
3 & 1 & 9 & 2 & 1 \\
4 & 5 & 12 & 5 & 11 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\
0 & 0 & -5 & -5 & -5 \\
0 & -5 & 0 & -10 & -20 \\
0 & -3 & 0 & -11 & -17 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\
0 & \boxed{0} & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\
0 & 3 & 0 & 11 & 17 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & \\
\hline
1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 3 & 11 & 17 \\
\hline
1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\
\hline
1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & \\
\hline
1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\end{array}
$$

Spaltentausch wegen 0 auf Hauptdiagonale, dabei ändert sich Variablenreihenfolge

$$\underline{\underline{x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1}}$$

Aufgabe 2.14

Gaußscher Algorithmus:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 100 \\
3 & 0 & 2 & 0 & 4 & 90 \\
0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 75 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 30 \\
0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 90 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 50 \\
3 & 0 & 2 & 0 & 4 & 90 \\
0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 75 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 30 \\
0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 90 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 50 \\
0 & -6 & 2 & 0 & 4 & -60 \\
0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 75 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 60 \\
0 & -2 & 1 & 2 & 0 & -20 \\
0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 90 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 50 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 60 \\
0 & -6 & 2 & 0 & 4 & -60 \\
0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 75 \\
0 & -2 & 1 & 2 & 0 & -20 \\
0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 90 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 50 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 60 \\
0 & 0 & 8 & 0 & 22 & 300 \\
0 & 0 & -1 & 3 & -5 & -45 \\
0 & 0 & 3 & 2 & 6 & 100 \\
0 & 0 & -3 & 2 & -7 & -90 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 50 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 60 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 45 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 11 & 150 \\
0 & 0 & 3 & 2 & 6 & 100 \\
0 & 0 & -3 & 2 & -7 & -90 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 50 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 60 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 45 \\
0 & 0 & 0 & 12 & -9 & -30 \\
0 & 0 & 0 & 11 & -9 & -35 \\
0 & 0 & 0 & -7 & 8 & 45 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 50 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 60 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 45 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\
0 & 0 & 0 & 11 & -9 & -35 \\
0 & 0 & 0 & -7 & 8 & 45 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 50 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 60 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 45 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{15}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{4} & \frac{55}{2} \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 50 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 60 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 45 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 50 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 30 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 50 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 30 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 50 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
\hline
\end{array}
$$

Lösung: $x_1 = 10,\ x_2 = 20,\ x_3 = 10,\ x_4 = 5,\ x_5 = 10$

Aufgabe 2.15

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 & b \\ \hline 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & a+2 & -1 & b+4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & a+2 & -1 & b+4 \\ \hline 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 & b-2a \end{array}$$

für $a \neq -1$ $\quad \text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{y}) = 3 \quad \Longrightarrow$ genau eine Lösung,
für $a = -1,\ b = -2$ gilt $b - 2a = 0,\quad \text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{y}) = 2$
$\Longrightarrow$ unendlich viele Lösungen ($3 - \text{rang}(\mathbf{A}) = 1$ frei wählbarer Parameter),
für $a = -1,\ b \neq -2$ gilt $b - 2a \neq 0,\quad \text{rang}(\mathbf{A}) = 2 \neq \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{y}) = 3 \quad \Longrightarrow$ keine Lösung

Aufgabe 2.17

a)
$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 13 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & -3 & \lambda \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 21 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & 27 \\ 0 & 1 & 8 & -9 & \lambda+24 \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 21 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 48 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & \lambda+3 \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-45 \end{array}$$

b) lösbar nur für $\lambda - 45 = 0$, d.h. $\lambda = 45$

c) Für $\lambda = 45$ ergibt sich
$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \end{array},$$

d.h. $x_1 = -5 - 2x_4,\ x_2 = 5 + x_4,\ x_3 = 8 + x_4$, also $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2.18

a) Gaußscher Algorithmus:

$$\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 3 & 1 & 0 & -2 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3/2 & -1/2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 11 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3/2 & -1/2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5/2 & 1 & 1/2 & 11/2 \\ \hline \end{array}$$

$x_1 = -4 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_5, \quad x_4 = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5,$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Gaußscher Algorithmus:

$$\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 3 & 1 & 0 & -2 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrrrr|r} -2 & 3 & 1 & 0 & -2 & 8 \\ 10 & -15 & 0 & 2 & 11 & -29 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrrrr|r} -2 & 3 & 1 & 0 & -2 & 8 \\ 5 & -15/2 & 0 & 1 & 11/2 & -29/2 \\ \hline \end{array}$$

$x_3 = 8 + 2x_1 - 3x_2 + 2x_5, \quad x_4 = -\frac{29}{2} - 5x_1 + \frac{15}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_5,$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ -\frac{29}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ \frac{15}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -\frac{11}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) z.B. aus a) mit $x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_5 = 1$ ergibt sich $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) z.B. aus a): $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

g) Nein, es gibt nur $n - \text{rang}(\mathbf{A}) = 5 - 2 = 3$ linear unabhängige Lösungen.

Aufgabe 2.19

a)
$$\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 2 & 4 & 9 & 4 & 18 \\ 3 & -2 & 2 & 6 & -1 & 15 \\ \hline -\frac{3}{2} & 1 & 2 & \frac{9}{2} & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 15 & 3 & 33 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr|r} -\frac{3}{2} & 1 & 2 & \frac{9}{2} & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ \hline -\frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{array}$$

$x_2 = -2 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 - x_5, \quad x_3 = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \frac{11}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Z.B. ergibt sich mit $s=2, t=0, u=1$ die Lösung $x_1=2, x_2=0, x_3=5, x_4=0, x_5=1$.

c) Linear unabhängige Lösungen können z.B. aus der Lösung von a) entnommen werden: $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Nein, die allgemeine Lösung des homogenen Systems enthält

$5 - \text{rang}(A) = 5 - 2 = 3$ frei wählbare Parameter. Es gibt also nur 3 linear unabhängige Lösungen.

Aufgabe 2.21

x_1 bis x_4 seien die zu produzierenden Mengen der Waschmittel 1 bis 4 in Tonnen. Dann muss folgendes Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{array}{rrrrcl} \frac{1}{2}x_1 & & +\frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{4}x_4 & = & 2 \\ \frac{3}{5}x_1 & +\frac{3}{5}x_2 & & +\frac{3}{5}x_4 & = & 3 \\ & x_2 & +\frac{3}{5}x_3 & +\frac{3}{5}x_4 & = & 1 \\ & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Gaußscher Algorithmus:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{16} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{16} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & 0 \\ \hline \end{array}$$

Also gilt $x_1 = 4 - \frac{7}{16}x_4,\ x_2 = 1 - \frac{9}{16}x_4,\ x_3 = -\frac{1}{16}x_4$, aus letzterem und der Nichtnegativitätsbedingung folgt $x_3 = x_4 = 0$ und damit $x_1 = 4,\ x_2 = 1$ als eindeutige Lösung. Somit müssen 4 t Waschmittel 1 und 1 t Waschmittel 2 produziert werden, während die Waschmittel 3 und 4 nicht zu produzieren sind.

Aufgabe 2.29

Inversion von $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

oder:

Die gesuchte Matrix $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$ kann durch Lösung des Gleichungssystems

$\mathbf{AX} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}$ ermittelt werden:

$$\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 4 & 4 & -6 & 0 \\
2 & 1 & 1 & -2 & 7 & 2 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 & 0 & -8 & -2 \\
0 & -1 & -1 & -6 & 5 & 0 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 6 & -5 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 0 & 0 & -4 & 6 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\
\hline
\end{array}$$

Aufgabe 2.5

Typen: $\mathbf{A}:\ 2{\times}3,\quad \mathbf{x}:\ 3{\times}1,\quad \mathbf{y}:\ 2{\times}1$

a) $\mathbf{yAx}:\ 2{\times}1\ \cdot\ 2{\times}3\ \cdot\ 3{\times}1$: unverträglich, nicht definiert
b) $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{Ax}:\ 1{\times}2\ \cdot\ 2{\times}3\ \cdot\ 3{\times}1 \longrightarrow 1{\times}1$: Zahl
c) $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Ay}:\ 1{\times}3\ \cdot\ 2{\times}3\ \cdot\ 2{\times}1$: unverträglich, nicht definiert
d) $\mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A})^\mathsf{T}:\ 1{\times}3\cdot(1{\times}2\cdot 2{\times}3)^\mathsf{T} \mathrel{\hat{=}} 1{\times}3\cdot(1{\times}3)^\mathsf{T} \mathrel{\hat{=}} 1{\times}3\cdot 3{\times}1 \longrightarrow 1{\times}1$: Zahl
e) $\mathbf{Axy}^\mathsf{T}:\ 2{\times}3\ \cdot\ 3{\times}1\ \cdot\ 1{\times}2 \longrightarrow 2{\times}2$: Matrix
f) $\mathbf{yx}^\mathsf{T}\mathbf{A}:\ 2{\times}1\ \cdot\ 1{\times}3\ \cdot\ 2{\times}3$: unverträglich, nicht definiert
g) $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{yx}^\mathsf{T}:\ 3{\times}2\ \cdot\ 2{\times}1\ \cdot\ 1{\times}3 \longrightarrow 3{\times}3$: Matrix

Aufgabe 2.10

a) $\begin{pmatrix}3\\8\\17\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 3 &= r \\ 8 &= 2r+s \quad\Longrightarrow\quad s=2 \\ 17 &= 3r+4s \quad \text{stimmt für } r=3,\ s=2, \end{aligned}$

also $\begin{pmatrix}3\\8\\17\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ Linearkombination.

$\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 2 &= r \\ 3 &= 2r+s \quad\Longrightarrow\quad s=-1 \\ 1 &= 3r+4s \quad \text{nicht erfüllt wegen } 3r+4s=2, \end{aligned}$

es gibt also keine Parameter r, s, die das erfüllen, somit keine Linearkombination.

b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig. Jedes System von 3 linear unabhängigen Vektoren des $\mathbb{R}^3$ ist Basis des $\mathbb{R}^3$. Also handelt es sich bei den 3 Vektoren um eine Basis.

$\begin{pmatrix}3\\8\\17\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ gilt offensichtlich für $r=3$, $s=2$, $t=0$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rl} 1 = r \qquad +2t & r = 1-2t \\ 5 = 2r + s + 3t & s = 5-2r-3t \\ & \quad = 5-2+4t-3t = 3+t \\ 16 = 3r+4s+t & 16 = 3r+4s+t \\ & \quad = 3-6t+12+4t+t, \end{array}$$

$t=-1$, $r=3$, $s=2$, also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.11

a) $$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 & 0 & \frac{5}{2} & 4 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

Durch elementare Umformungen ergibt sich eine Dreiecksmatrix mit von Null verschiedenen Elementen bis zur 3. Zeile. Also ist der Rang der Matrix 3.

oder:

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind nach Aufgabe 2.10 linear unabhängig. Da die Matrix 3 linear unabhängige Spalten hat, ist ihr Rang 3.

b) $$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 2 & 8 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 17 & 3 & 4 & 3 & 17 & 4 & 0 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Durch elementare Umformungen ergibt sich eine Dreiecksmatrix mit von Null verschiedenen Elementen bis zur 2. Zeile. Also ist der Rang der Matrix 2.

oder:

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind nach Aufgabe 2.10 linear abhängig. Also hat die Matrix keine 3 linear unabhängigen Spalten. Da z.B. die 2. und 3. Spalte voneinander linear unabhängig sind (sonst müsste eine Vielfaches der anderen sein), gibt es 2 linear unabhängige Spalten, so dass der Rang der Matrix 2 ist.

c) $$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 & 2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}$$

Durch elementare Umformungen ergibt sich eine Trapezform mit von Null verschiedenen Elementen bis zur 3. Zeile. Also ist der Rang der Matrix 3.

oder:

Die Lösung des Gleichungssystems aus Aufgabe 2.20 enthält einen frei wählbaren Parameter. Da 4 Variable gesucht sind, beträgt die Zahl der frei wählbaren Parameter $4 - \operatorname{rang} \mathbf{A}$, so dass $\operatorname{rang} \mathbf{A} = 3$ ist.

d) Da offensichtlich keine Zeile Vielfaches der anderen Zeile ist, sind beide Zeilen linear unabhängig. Da die Matrix nur 2 Zeilen hat, beträgt ihr Rang 2.

Aufgabe 2.37

a) Ausgangsstoffe — Zwischenprodukte

	je Z_1	je Z_2	je Z_3
A_1	5	6	4
A_2	2	0	2
A_3	1	2	2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Zwischenprodukte — Endprodukte

	je E_1	je E_2	je E_3
Z_1	2	3	1
Z_2	3	2	1
Z_3	1	0	1

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ausgangsstoffe — Endprodukte

direkt

	je E_1	je E_2	je E_3
A_1	5	0	0
A_2	0	0	0
A_3	0	0	0

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über Zwischenprodukte:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 27 & 15 \\ 6 & 6 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$

insgesamt also $\mathbf{D} = \mathbf{AB} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 37 & 27 & 15 \\ 6 & 6 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

b)
$$\mathbf{D} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} + \mathbf{A} \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 27 & 15 \\ 6 & 6 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1360 \\ 300 \\ 390 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1460 \\ 340 \\ 410 \end{pmatrix}$$

Es werden 1460 Einheiten A_1, 340 Einheiten A_2 und 410 Einheiten A_3 benötigt.

Aufgabe 2.38

a) $$\begin{array}{rl} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 & \\ x_1 \quad + x_3 - 2x_4 = 3 & \Longrightarrow \quad x_1 = 3 - x_3 + 2x_4, \\ & \quad x_2 = 7 - 2x_1 - 3x_3 - 4x_4 \\ & \quad\quad = 7 - 6 + 2x_3 - 4x_4 - 3x_3 - 4x_4, \\ & \quad x_2 = 1 - x_3 - 8x_4 \end{array}$$

Also ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $$\begin{array}{rl} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 & \\ x_1 \quad + x_3 - 2x_4 = 3 & \Longrightarrow \quad 2x_4 = x_1 + x_3 - 3, \\ & \quad x_4 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}, \\ & \quad x_2 = 7 - 2x_1 - 3x_3 - 4x_4 \\ & \quad\quad = 7 - 2x_1 - 3x_3 - 2x_1 - 2x_3 + 6, \\ & \quad x_2 = 13 - 4x_1 - 5x_3 \end{array}$$

Also ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

c) Einsetzen von $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ ergibt $$\begin{array}{ll} 1 + 3x_3 + 4x_4 = 7 & 3x_3 + 4x_4 = 6 \quad \big| + \\ 1 + x_3 - 2x_4 = 3 & x_3 - 2x_4 = 2 \quad \big| *2 \\ & 2x_3 + 4x_4 = 4 \quad \big| - \\ & x_3 = 2,\ x_4 = 0 \end{array}$$

Die gesuchte spezielle Lösung ist also $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) Nach a) gilt für jede Lösung $x_1 = 3 - x_3 + 2x_4$, $x_2 = 1 - x_3 - 8x_4$. Wenn alle Komponenten **positiv** und ganzzahlig sind, gilt insbesondere $x_3 \geq 1$, $x_4 \geq 1$. Daraus folgt $-x_3 \leq -1$, $-8x_4 \leq -8$ und damit $x_2 = 1 - x_3 - 8x_4 \leq 1 - 1 - 8 = -8$. Somit können nicht alle Komponenten einer Lösung des Gleichungssystems positiv und ganzzahlig sein.

e) **Z.B.** ist nach a) jede Lösung des Gleichungssystems darstellbar in der Form

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{allg. Lsg.} \\ \text{inhom. GS}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{spez. Lsg.} \\ \text{inhom. GS}}} + \underbrace{s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{allgemeine Lösung des} \\ \text{homog. Gleichungssystems}}}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Somit lässt sich die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems **z.B.** in der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$ darstellen.

Aufgabe 2.36

a) Addieren der beiden Gleichungen liefert $-x_2 + 2x_5 = 3 \Rightarrow x_2 = 2x_5 - 3$. Einsetzen dieses Resultats in die erste Gleichung führt auf $x_1 - 2(2x_5 - 3) + x_3 - x_4 + 3x_5 = 1$, also $x_1 = -x_3 + x_4 + x_5 - 5$. Wir führen frei wählbare Parameter $x_3 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$ ein und erhalten die allgemeine Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Eine spezielle Lösung erhält man z.B., wenn man $r = s = t = 0$ setzt, es ist dann $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Das Gleichungssystem ist lösbar genau dann, wenn die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmen. Da sowohl die Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ als auch die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ zwei Zeilen enthalten, die offensichtlich nicht voneinander abhängig sind, gilt $\text{rang}(\boldsymbol{A}) = \text{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = 2$, das Gleichungssystem ist lösbar. Die allgemeine Lösung enthält $n - \text{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = 5 - 2 = 3$ frei wählbare Parameter.

c) Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems setzt sich zusammen aus einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems (hier $\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) und der allgemeinen

Lösung des homogenen Systems, die als Linearkombination von $n - \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ linear unabhängigen Lösungen des homogenen Systems darstellbar ist. Drei linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems sind also die die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems aufspannenden Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d) Nein! Wie oben gezeigt, ist jede Lösung des homogenen Systems eine Linearkombination der $n - \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = 3$ unter c) angegebenen Lösungen, d. h., sie ist von diesen linear abhängig. Mit anderen Worten: Der Lösungsraum des homogenen Systems wird von nur drei Vektoren aufgespannt, es kann in ihm also keine vier linear unabhängigen Elemente geben.

Aufgabe 2.39

Anwendung des Gaußalgorithmus auf das Gleichungssystem liefert:

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & a & b \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & a-2 & b-6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+8 & b-1 \end{array}$$

Damit wird ersichtlich:

– Im Fall $a = -8$ ist $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = 3$, also existiert genau eine Lösung.
– Im Fall $a = -8,\ b \neq 1$ ist $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) = 2 \neq 3 = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$, also gibt es keine Lösung.
– Im Fall $a = -8,\ b = 1$ ist $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = 2 < 3$, also gibt es unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 2.40

a) Die inverse Matrix existiert genau dann, wenn $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ gilt, also, wenn $ad-bc \neq 0$ ist.

b) Anwendung des Gaußalgorithmus liefert im Falle $a \neq 0,\ ad - bc \neq 0$

$$\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \\ \hline 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \\ \hline 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}$$

Somit ist $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Durch Berechnung von $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$ kann man sich davon überzeugen, dass diese Matrix auch im Falle $a = 0$ inverse Matrix ist, im Falle $ad - bc = 0$ existiert die inverse Matrix nicht.

Aufgabe 2.41

a)
$$
\begin{array}{rrrr|rrrr}
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 9 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 5 & 12 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -5 & 0 & -10 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -5 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -3 & 0 & -11 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{11}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr|rrrr}
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{25} & -\frac{3}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{25} & \frac{3}{25} & 0 & -\frac{1}{5} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{25} & \frac{19}{25} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{25} & -\frac{11}{25} & 0 & \frac{2}{5} \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{25} & -\frac{3}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{25} & \frac{3}{25} & 0 & -\frac{1}{5}
\end{array}
$$

Es ist also $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -2 & 19 & 15 & -15 \\ -7 & -11 & 0 & 10 \\ -1 & -3 & -5 & 5 \\ 11 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

b) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Um die ermittelte inverse Matrix nutzen zu können, müssen beim zweiten Gleichungssystem die 2. und die 3. Zeile vertauscht werden. Durch den Zeilentausch ändert sich die Lösung des Gleichungssystems nicht.

Die Lösungen sind $\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

19.3 Eigenwerte

Aufgabe 3.6

a) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -10 & -10 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 3(-6) = -18$

b)
$$\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -10 & -10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \\ \hline 1 & -\frac{10}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & -\frac{10}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{25}{9} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -10 & -10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -10 & -10 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -5 & -2\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -5 & -2\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(-2-\lambda) = 0$$

$\Longrightarrow \qquad \lambda_{1/2} = 3, \lambda_3 = -2$

EV zu $\lambda_{1/2} = 3$:
$$\begin{array}{rrr} 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$x_2 = -x_3,\ x_1$ beliebig,

EV $C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_3 = -2$:
$$\begin{array}{rrr} 5 & -10 & -10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$x_1 = 2x_3,\ x_2 = 0,$ EV $E \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.7

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) + 5 = 8 - 6\lambda + \lambda^2 + 5 = \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

=> Eigenwerte sind $\lambda_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm 2i$.

Eigenvektor zu $3+2i$

$\begin{pmatrix} 2-3-2i & 5 \\ -1 & 4-3-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

=> $\begin{pmatrix} -1-2i & 5 \\ -1 & 1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

=> $\begin{pmatrix} 1 & -1+2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

=> EV: $\begin{pmatrix} 1-2i \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu $3-2i$

$\begin{pmatrix} 2-3+2i & 5 \\ -1 & 4-3+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

=> $\begin{pmatrix} -1+2i & 5 \\ -1 & 1+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

=> $\begin{pmatrix} 1 & -1-2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

=> EV: $\begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.5

Lassen $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ unverändert und bestimmen $\bar{\boldsymbol{x}}_2$ so, dass $\bar{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \lambda \boldsymbol{x}_1$ und $\bar{\boldsymbol{x}}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 = 0$ (Orthogonalität) gilt. Es muss also gelten:

$$\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2\lambda \\ 5-\ \lambda \\ -4+2\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2(7-2\lambda)+5-\lambda-2(-4+2\lambda)$$

$$= -9\lambda + 27 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 3, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist unser neues, orthogonalisiertes Vektorsystem $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Aufgabe 3.10

a) $\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot 6 - 3 \cdot 3 \cdot (-5) = -36 + 45 = 9$

b)

$$\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -5 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} =(-2-\lambda)(3-\lambda)(6-\lambda)+15(3-\lambda)=(3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-12+15) \\ =(3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3)=0, \qquad \lambda_1=3,\ \lambda_{2/3}=2\pm\sqrt{4-3}=3;1 \end{array}$

Eigenvektor zu $\lambda_{1/2} = 3$

$$\begin{array}{rrr} -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x+z=1 \\ z=-x \\ x=C, y=D, z=-C \\ \text{EV } C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Eigenvektor zu $\lambda_3 = 1$

$$\begin{array}{rrr} -3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ \hline 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3x+5z=1,\ y=0 \\ z=-\frac{5}{3}x,\ y=0 \\ x=3E, y=0, z=-5E \\ \text{EV } E\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

d) Die Matrix $\boldsymbol{B}$, für die $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}$ (mit $\boldsymbol{D}$ als Diagonalmatrix aus den Eigenwerten) gilt, wird aus 3 linear unabhängigen Eigenvektoren zusammengesetzt:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Invertierung

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Dies liefert die folgende Diagonalisierung:

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$\boldsymbol{D}$.

Aufgabe 3.11

Eigenwerte: $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(2-\lambda) + 18 = \lambda^2 - 10\lambda + 34 = 0$

$\Longrightarrow \quad \lambda_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25-34} = 5 \pm 3\mathrm{i}$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 5 + 3\mathrm{i}$

$$\begin{array}{cc} 3-3\mathrm{i} & 3 \\ -6 & -3-3\mathrm{i} \\ \hline 1-\mathrm{i} & 1 \\ -2 & -1-\mathrm{i} \\ \hline 1-\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (1-\mathrm{i})x + y = 0 \\ y = (-1+\mathrm{i})x \\ x=C, y=(-1+\mathrm{i})C \\ \text{EV } C\begin{pmatrix} 1 \\ -1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \end{array}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 5 - 3\mathrm{i}$

$$\begin{array}{cc} 3+3\mathrm{i} & 3 \\ -6 & -3+3\mathrm{i} \\ \hline 1+\mathrm{i} & 1 \\ -2 & -1+\mathrm{i} \\ \hline 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (1+\mathrm{i})x + y = 0 \\ y = (-1-\mathrm{i})x \\ x=D, y=(-1-\mathrm{i})D \\ \text{EV } D\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \end{array}$$

19.4 Vektorgeometrie im $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 4.8

a) Bestimmung der Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{r_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{r_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=> E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\overrightarrow{r_1} + t\overrightarrow{r_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Normalenvektors:

$$\overrightarrow{n_0} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} - 5\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der rechten Seite durch Einsetzen eines Punktes der Ebene:

$$(\overrightarrow{n_0})^T \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$=> E : (\overrightarrow{n_0})^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2y - 5z = 4$$

b)

x-Achse:	$y = z = 0$	$x = 4$	Punkt $(4, 0, 0)$
y-Achse:	$x = z = 0$	$2y = 4$	Punkt $(0, 2, 0)$
z-Achse:	$x = y = 0$	$-5z = 4$	Punkt $(0, 0, -4/5)$

xy-Ebene: $z = 0$ $\quad x + 2y = 4 => x = 4 - 2y \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

xz-Ebene: $y = 0$ $\quad x - 5z = 4 => x = 4 + 5z \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

yz-Ebene: $x = 0$ $\quad 2y - 5z = 4 => y = 2 + 5/2z \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) Einsetzen der Parameterform der Ebene E in die Gleichung der 2.Ebene:

$(2 + 3s + 2t) + 3(1 + s - t) + s = 3 => 2 + 7s - t = 0$

$$t = 2 + 7s => x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (2 + 7s) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 17 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Richtung des Lotes ist der Normalenvektor $\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ der Ebene E

Bestimmung des Schnittpunktes von $\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $x + 2y - 5z = 4$:

$6 + t + 2(14 + 2t) - 5(-12 - 5t) = 4 => 94 + 30t = 4 => t = -3$

Schnittpunkt ist $\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$: Lotfußpunkt

Abstand: $\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = 3 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{1 + 4 + 25} = 3\sqrt{30} \approx 16.43$

Aufgabe 4.9

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3-1 \\ -1-0 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \hat{=} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0, \qquad 7x - y + 5z = 12$$

b) z–Achse: $x = y = 0$, also $5z = 12$, $z = \frac{12}{5}$, d.h. Schnittpunkt $(0, 0, \frac{12}{5})$

x–y–Ebene: $z = 0$, also $7x - y = 12$, $z = 0$, $\quad y = -12 + 7x$, $z = 0$,

d.h. Schnittgerade $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Schnittgerade: $x + 3y + z = 3$, $\quad 7x - y + 5z = 12$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 5 \end{array}\right| \begin{array}{c} 3 \\ 12 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -22 & -2 \end{array}\right| \begin{array}{c} 3 \\ 9 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} 3 \\ \frac{9}{2} \end{array} \qquad \left.\begin{array}{ccc} 1 & -8 & 0 \\ 0 & 11 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \end{array}$$

$x = -\frac{3}{2} + 8y$, $z = \frac{9}{2} - 11y$, $\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}$

Schnittwinkel: Ebenen schneiden sich im gleichen Winkel wie ihre Stellungsvektoren, d.h.

$$\varphi = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\|} = \arccos \frac{9}{\sqrt{11}\ \sqrt{75}} \approx 71.74^{\mathrm{O}}$$

d) Auf $7x - y + 5z = 12$ steht $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ senkrecht, d.h. Lot ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Im Lotfußpunkt gilt $7(17 + 7t) - (2 - t) + 5(9 + 5t) = 12$,
$162 + 75t = 12, \quad 75t = -150, \quad t = -2$, also ist
$\begin{pmatrix} 17 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Lotfußpunkt, $\left\| 2 \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{75} = 10\sqrt{3} \approx 17.32$
Abstand.

Aufgabe 4.12

a) Parameterform: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Stellungsvektor: $\boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -4 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -36 \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

Also lautet die Ebenengleichung parameterfrei $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} =$ 7, d.h. $\underline{\underline{3x + 4y - 12z = 7}}$.

b) y–Achse: $x = z = 0 \quad \Longrightarrow 4y = 7,\ y = \frac{7}{4}$, Schnittpunkt $\left(0, \frac{7}{4}, 0\right)$

Winkel zwischen dem Stellungsvektor der Ebene und y–Achse:

$$\cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{4}{13 \cdot 1} = \frac{4}{13} \quad \Longrightarrow \quad \beta \approx 72.08^\circ$$

Da der Stellungsvektor senkrecht auf der Ebene steht, ist der gesuchte Winkel zwischen der Ebene und der y–Achse ungefähr 17.92°.

c) x–z–Ebene: $y=0$ $\implies$ $3x-12z=7,\ x=\frac{7}{3}+4z$, Schnittgerade $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}7/3\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$

Die Ebenen $3x+4y-12z=7$ und $y=0$ schneiden sich im gleichen Winkel wie ihre auf ihnen jeweils senkrecht stehenden Stellungsvektoren $\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, wie unter b) bereits berechnet also im Winkel von ungefähr 72.08°.

d) Da der Stellungsvektor $\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}$ auf der Ebene $3x+4y-12z=7$ senkrecht steht, lautet die Geradengleichung des Lotes $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}7\\18\\-21\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}$.

e) Der Lotfußpunkt ergibt sich als Schnittpunkt von Lot und Ebene durch Einsetzen der Geradengleichung des Lotes in die Ebenengleichung:
$3(7+3t)+4(18+4t)-(-21-12t)=7,\ 169t=-338,\ t=-2.$
Also ist der Lotfußpunkt $\begin{pmatrix}7\\18\\-21\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\10\\3\end{pmatrix}$ und der Abstand als Länge des Lotes $\left\|\begin{pmatrix}1\\10\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\18\\-21\end{pmatrix}\right\|=2\left\|\begin{pmatrix}3\\4\\-12\end{pmatrix}\right\|=2\cdot 13=\underline{\underline{26}}.$

Aufgabe 4.14

a) Der Spat wird aufgespannt von den Vektoren $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2\\4\\10\end{pmatrix}$. Die Ortsvektoren der Eckpunkte lauten somit

$\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}2\\5\\11\end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}5\\4\\9\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}3\\6\\13\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}6\\7\\17\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}7\\8\\19\end{pmatrix}$.

b) $V = |\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 10 \end{vmatrix}\right| = |20+32+12-8-40-24| = |-8| = \underline{\underline{8}}$

c) Die Oberfläche besteht aus 3 Paaren einander gegenüberliegender Parallelogramme. Diese haben die Flächeninhalte

$$\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\| = \left\|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{12},$$

$$\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}\| = \left\|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{44} \text{ und}$$

$$\|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}\| = \left\|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -4 \\ -28 \\ 12 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{944}.$$

Der Oberflächeninhalt beträgt somit $O = 2(\sqrt{12}+\sqrt{44}+\sqrt{944}) \approx \underline{\underline{81.74}}$.

d) $$\sphericalangle\, CAB = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right\|} = \arccos\frac{18}{\sqrt{6}\sqrt{56}} \approx 10.89^\circ,$$

$$\sphericalangle\, DAB = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}\right\|} = \arccos\frac{26}{\sqrt{6}\sqrt{120}} \approx 14.31^\circ,$$

$$\sphericalangle\, DAC = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}\right\|} = \arccos\frac{76}{\sqrt{56}\sqrt{120}} \approx 22.01^\circ$$

19.5 Hauptachsentransformation

Aufgabe 5.2

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$AA^T = A^TA = E$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=> \begin{cases} (1) & a^2+b^2 = a^2+c^2 = b^2+d^2 = c^2+d^2 = 1 \\ (2) & ac+bd = ab+cd = 0 \end{cases}$

Aus (1) folgt $b^2 = c^2, d^2 = a^2 => d = \pm a$.

Aus (2) folgt $bd = -ac => \begin{cases} a \neq 0 & => c = \mp b \\ a = 0 & \text{Dann gilt dennoch wegen (1) } c^2 = b^2 => b = \mp c. \end{cases}$

Also gilt $A = \begin{pmatrix} a & \mp c \\ c & \pm a \end{pmatrix}$ und $a^2 + c^2 = 1$.

Da $-1 \leq a \leq 1$ kann $a = \cos\alpha$ gesetzt werden. Dann ist $c = \pm\sin\alpha$, wobei der Fall $a = \cos\alpha$, $c = -\sin\alpha$ zurückgeführt werden kann auf $a = \cos(-\alpha), c = \sin(-\alpha)$. Somit gilt $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ \sin\alpha & \pm\cos\alpha \end{pmatrix}$. Der Fall $\begin{array}{c} x = \cos\alpha * \xi - \sin\alpha * \eta \\ y = \sin\alpha * \xi + \cos\alpha * \eta \end{array}$ entspricht einer Drehung des Koordinatensystems um den Winkel α in positiver Drehrichtung, im Fall $\begin{array}{c} x = \cos\alpha * \xi + \sin\alpha * \eta \\ y = \sin\alpha * \xi - \cos\alpha * \eta \end{array}$ kommt eine Klappung um die ξ–Achse (Änderung der Orientierung) hinzu.

Also bedeutet eine Koordinatentransformation mit einer orthogonalen Matrix eine Drehung und ggf. Klappung des Koordinatensystems.

Aufgabe 5.4

a) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda_{1/2} = \pm 1$

EV zu 1: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ EV $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

EV zu -1: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ EV $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\mathbf{V}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, Drehung um 45°

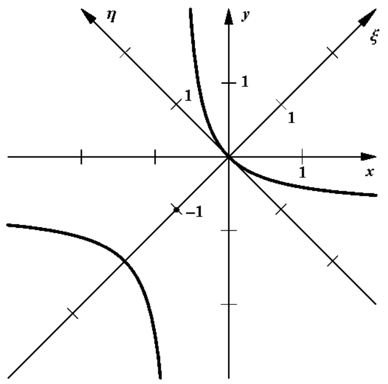
$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0$

$\xi^2 - \eta^2 + 2\xi = 0, \quad (\xi + 1)^2 - \eta^2 = 1:$
Hyperbel, Mittelpunkt $(-1, 0)$, reelle Halbachse 1

Das transformierte Koordinatensystem entsteht durch Drehung um 45°.

b)



Aufgabe 5.6

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 12$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & -1 \\ 4 & 8-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (8-\lambda)(5-\lambda)^2 - 16 - 16 - (8-\lambda) - 16(5-\lambda) - 16(5-\lambda)$$

$$= (8-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 25) - 32 - (8-\lambda) - 32(5-\lambda)$$

$$= 8\lambda^2 - 80\lambda + 200 - \lambda^3 + 10\lambda^2 - 25\lambda - 32 - 8 + \lambda - 160 + 32\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 72\lambda = 0 => \lambda^3 - 18\lambda^2 + 72\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_{2/3} = 9 \pm \sqrt{81-72} = \begin{cases} 6 \\ 12 \end{cases}$$

EV zu 0

$$\begin{array}{rrr} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ \hline 1 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ \hline 1 & -4 & -5 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 24 & 24 \\ \hline 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

EV zu 6

$$\begin{array}{rrr} -1 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ \hline 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & -4 & -1 \\ 0 & 9 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

EV zu 12

$$\begin{array}{rrr} -7 & 4 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -7 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -7 \\ -7 & 4 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 6 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}$$

EV: $A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ EV: $B\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ EV: $C\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

norm. EV: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ norm. EV: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ norm. EV: $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

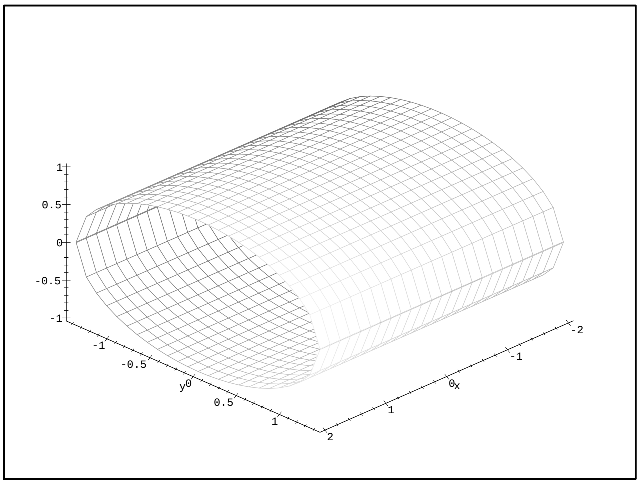
$$V=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}V^TAV &= \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 4 & 8 & 4\\ -1 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -6/\sqrt{2} & 12/\sqrt{6}\\ 0 & 0 & 24/\sqrt{6}\\ 0 & 6/\sqrt{2} & 12/\sqrt{6}\end{pmatrix}\\ &\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 12/2 & 0\\ 0 & 0 & 72/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=V\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix}\xi & \eta & \zeta\end{pmatrix}V^TAV\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi & \eta & \zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=12$$

$6\eta^2+12\zeta^2=12 \quad => \quad \eta^2/2+\zeta^2=1 \quad => \quad \underline{\underline{(\eta/\sqrt{2})^2+\zeta^2=1}}$

Es handelt sich um einen elliptischen Zylinder mit den Halbachsen ∞, $\sqrt{2}$ und 1.



Aufgabe 5.7

a) $$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-2\lambda+\lambda^2)(5-\lambda)+3+3-9(5-\lambda)-(1-\lambda)-(1-\lambda) =$$

$$5-10\lambda+5\lambda^2-\lambda+2\lambda^2-\lambda^3+6-45+9\lambda-2+2\lambda = -\lambda^3+7\lambda^2-36 = 0$$

$$\lambda_1 = 6, \quad (\lambda^3 - 7\lambda^2 \qquad +36):(\lambda-6) = \lambda^2-\lambda-6\ , \quad \lambda_{2/3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{24}{4}} = 3, -2$$

$$\begin{array}{rrr} \lambda^3 & -6\lambda^2 & \\ \hline & -\lambda^2 & +36 \\ & -\lambda^2 \ +6\lambda & \\ \hline & -6\lambda & +36 \\ & -6\lambda & +36 \\ \hline & & 0 \end{array}$$

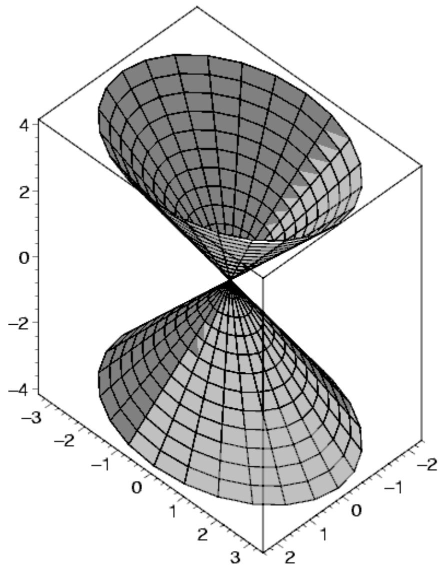
Durch die Hauptachsentransformation entsteht $6\xi^2+3\eta^2-2\zeta^2 = 0$.

b) Schnitt mit ξ,η–Ebene: $\zeta=0$: $6\xi^2+3\eta^2=0 \Rightarrow \xi=\eta=0$: nur Koordinatenursprung
Schnitt mit ξ,ζ–Ebene: $\eta=0$: $6\xi^2-2\zeta^2=0 \Rightarrow \zeta=\pm\sqrt{3}\xi$: Paar sich schneid. Geraden
Schnitt mit η,ζ–Ebene: $\xi=0$: $3\eta^2-2\zeta^2=0 \Rightarrow \zeta=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\eta$: Paar sich schneid. Geraden

c) Der Schnitt mit jeder Ebene $\zeta = c$ ist eine Ellipse $6\xi^2+3\eta^2 = 2c^2$. Die Halbachsen der Ellipsen wachsen mit steigendem c, für $c = 0$ reduziert sich die Ellipse auf einen Punkt.

Der Schnitt mit jeder Ebene $\eta = a\xi$ ist ein Paar sich schneidender Geraden $\zeta=\pm\sqrt{\frac{6+3a^2}{2}}\xi$. Es handelt sich also um einen elliptischen Doppelkegel.

d)



Aufgabe 5.10

a) Kurve (I):

$4x^2 + 25y^2 - 56x + 100y + 196 = 4(x^2 - 14x) + 25(y^2 + 4y) + 196 =$
$4\left((x-7)^2 - 7^2\right) + 25\left((y+2)^2 - 2^2\right) + 196 = 4(x-7)^2 - 196 + 25(y+2)^2 - 100 + 196 = 0,$
$4(x-7)^2 + 25(y+2)^2 = 100, \quad \dfrac{(x-7)^2}{5^2} + \dfrac{(y+2)^2}{2^2} = 1$

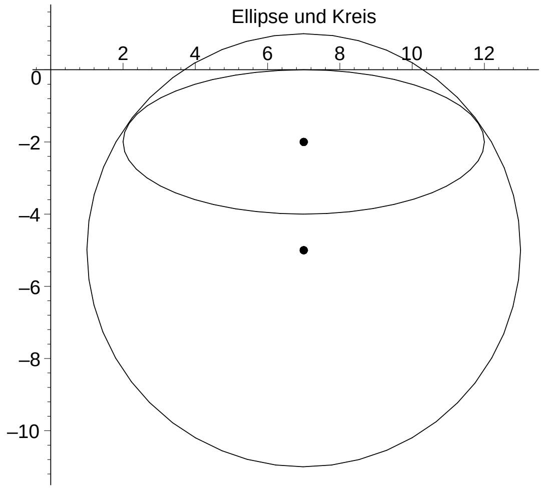
Die Kurve ist also eine Ellipse mit dem Mittelpunkt (7,-2) und den Halbachsen 5 und 2.

Kurve (II):

$2x^2 + 2y^2 - 28x + 20y + 76 = 0 \quad | \quad : 2$
$x^2 - 14x + 49 - 49 + y^2 + 10y + 25 - 25 + 38 = (x-7)^2 + (y+5)^2 - 36 = 0,$
$(x-7)^2 + (y+5)^2 = 36 = 6^2$

Diese Kurve ist also ein Kreis mit dem Mittelpunkt (7,-5) und dem Radius 6.

b)



Aufgabe 5.12

Die Transformationsmatrix für die Drehung lautet $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Für $\varphi = \arctan\dfrac{12}{5}$ erhält man mit dem Taschenrechner $\sin\varphi \approx 0.92307,\ \cos\varphi \approx 0.38461$. Man kann die Werte der Winkelfunktionen aber auch rechnerisch ermitteln:

$\varphi = \arctan\dfrac{12}{5}$, $\dfrac{12}{5} = \tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$, $\sin^2\varphi = \dfrac{144}{25}(1-\sin^2\varphi)$, $\sin\varphi = \dfrac{12}{13}$,

$\cos\varphi = \sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2} = \dfrac{5}{13}$. Bei der Rechnung wurde hinsichtlich des Vorzeichens von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ berücksichtigt, dass $\varphi = \arctan 2.4$ im I. Quadranten liegt. Da der Tangens das Verhältnis von Sinus und Kosinus ist, stehen Sinus und Kosinus des Winkels im Verhältnis $12 : 5$. Durch die Verwendung pythagoreischer Zahlen ($5^2 + 12^2 = 13^2$, analog $3^2 + 4^2 = 5^2$) wird die Rechnung erleichtert.

Zusammen mit der Verschiebung gilt für die Transformation des Koordinatensystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -27 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Es ist also $x = \dfrac{1}{13}(5\xi - 12\eta - 27)$ und $y = \dfrac{1}{13}(12\xi + 5\eta + 20)$.

Setzt man dies in die Geradengleichung $y = 4x + \dfrac{22}{13}$ ein und multipliziert zur Vereinfachung die Gleichung mit 13, so erhält man

$12\xi + 5\eta + 20 = 4(5\xi - 12\eta - 27) + 22,\ \ 12\xi + 5\eta + 20 = 20\xi - 48\eta - 108 + 22,\ \ 53\eta = 8\xi - 106$

und damit die gesuchte Geradengleichung $\eta = \dfrac{8}{53}\xi - 2$.

Aufgabe 5.13

Gegeben ist die Kurve $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & -120 \\ -120 & 288 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 104 & -689 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 169 = 0.$

a) Hauptachsentransformation

$$\begin{vmatrix} 50-\lambda & -120 \\ -120 & 288-\lambda \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (50-\lambda)(288-\lambda) - 14400 = 14400 - 338\lambda + \lambda^2 - 14400 \\ &= \lambda^2 - 338\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 338 \end{aligned}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0$

$$\begin{array}{rr} 50 & -120 \\ -120 & 288 \\ \hline 5 & -12 \\ 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{ norm. EV } \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 338$

$$\begin{array}{rr} -288 & -120 \\ -120 & -50 \\ \hline 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{ norm. EV } \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Die Drehung kann also nach der Vorschrift $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ erfolgen.

Bemerkung: Selbstverständlich können die Eigenvektoren auch in anderer Reihenfolge aneinander gesetzt werden. Allerdings ist zu beachten, dass die Matrix $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ nicht die Form $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ hat. In diesem Falle kommt zu der Drehung eine Klappung um die ξ–Achse hinzu. Will man nur drehen, könnte man in diesem Falle z.B. mit dem Eigenvektor $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ arbeiten und die Matrix $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$ verwenden.

$$\frac{1}{169}\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 & -120 \\ -120 & 288 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$
$$+\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 104 & -689 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + 169 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 338 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -169 & -676 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + 169 = 0,$$

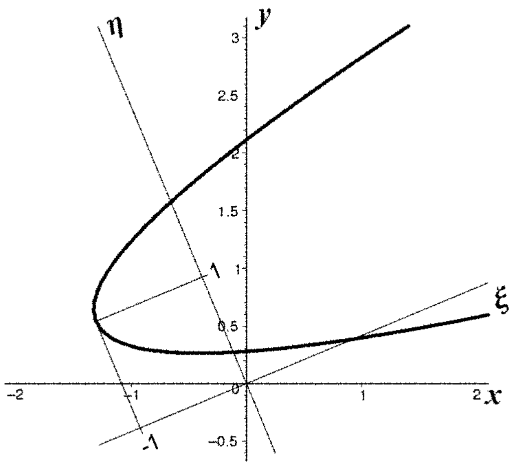
$$338\eta^2 - 169\xi - 676\eta + 169 = 0,\quad 2\eta^2 - \xi - 4\eta + 1 = 0,\quad 2(\eta-1)^2 - 2 - \xi + 1 = 0,$$

$$\underline{\underline{\xi = 2(\eta-1)^2 - 1}}$$

b) Es handelt sich um eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $(\xi, \eta) = (-1, 1)$.

c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\underline{\underline{\alpha \approx 22.62°}}$

Bemerkung: Bei Verwendung der Drehmatrix $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$ ergibt sich ein Drehwinkel von $-67.38°$ und die Darstellung $\eta = 2(\xi+1)^2 - 1$.

d) 

Aufgabe 5.14

Gegeben ist die Fläche $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 144.$

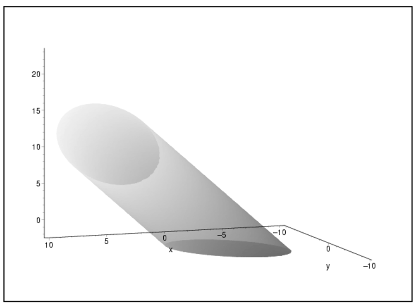
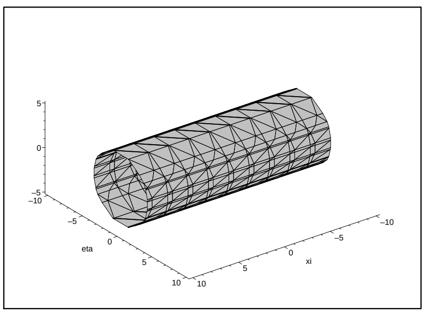
a) $\begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (8-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+25)-16-16-4(5-\lambda)-4(5-\lambda)-16(8-\lambda) \\ &= -\lambda^3+18\lambda^2-81\lambda = -\lambda(\lambda-9)^2 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2/3} = 9 \end{aligned}$

Die Hauptachsentransformation führt auf $\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = 0,$

also $9\eta^2 + 9\zeta^2 = 144,\ \underline{\underline{\eta^2+\zeta^2 = 4^2}}$

Bemerkung: Die transformierte Matrix ergibt sich aus den Eigenwerten. Da in der gegebenen Darstellung der Fläche keine linearen Terme enthalten sind, muss die Transformationsmatrix nicht ausgerechnet werden.

b) $\eta^2 + \zeta^2 = 4^2$ beschreibt einen Kreis mit Radius 4 in der η–ζ–Ebene. Da die ξ–Komponente frei gewählt werden kann, handelt es sich bei der Fläche um einen unendlichen Kreiszylinder mit Radius 4.

c) 


19.6 Lineare Optimierung

Aufgabe 6.1

x_1: Anzahl der herzustellenden Erzeugnisse E_1,
x_2: Anzahl der herzustellenden Erzeugnisse E_2

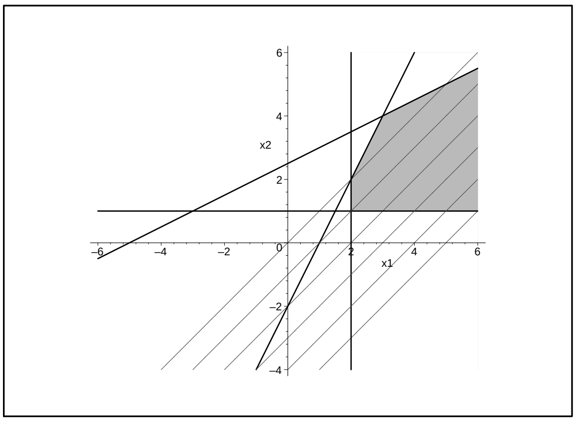
Gewinn:	$3x_1+7x_2 \to \max$
Rohstoff R_1 :	$x_1+3x_2 \leq 50$
Rohstoff R_2 :	$2x_1+3x_2 \leq 60$
Energie:	$5x_1+8x_2 \leq 150$
Arbeitszeit:	$\frac{1}{3}x_1+ x_2 \leq 24$
Nichtnegativität:	$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

Aufgabe 6.4

a) grafische Lösung

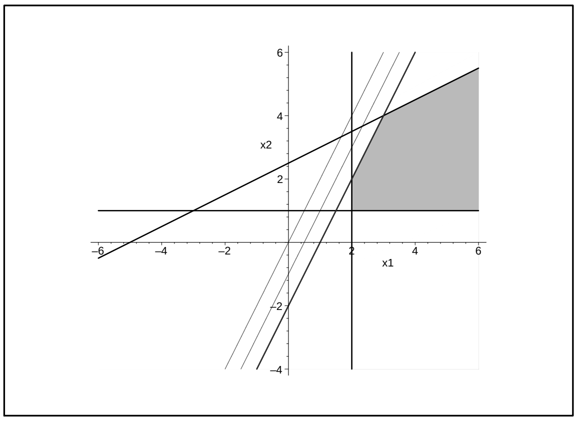
(I) siehe Folie Abbildung 20.2

(II) Minimierung durch Verschiebung des Zielfunktionsniveaus nach rechts unten



$z = -x_1 + x_2 \longrightarrow -\infty$: Zielfunktion unbeschränkt

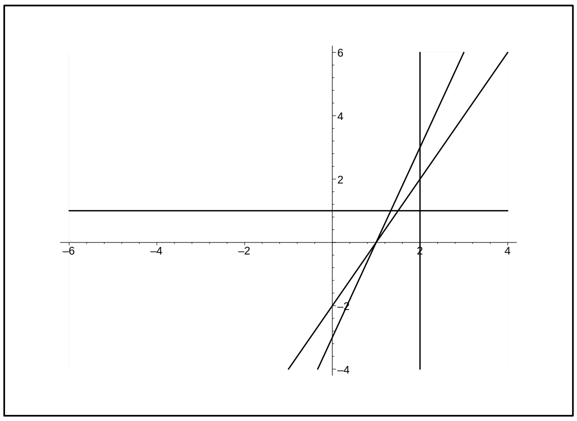
(III) Maximierung des Zielfunktionsniveaus in Richtung links oben



Optimale Lösung auf der Geraden $2x_1 - x_2 = 2$ zwischen den Schnittpunkten $(2,2)$ mit $x_1 = 2$ und $(3,4)$ mit $-x_1 + 2x_2 = 5$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{opt}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1; \qquad z_{\text{opt}} = -4$$

(IV) Zulässiger Bereich rechts von $x_1 = 2$ und gleichzeitig oberhalb $3x_1 - x_2 = 3$ und unterhalb von $2x_1 - x_2 = 2$ (jeweils einschließlich): leer $\Longrightarrow$ Opt.aufgabe unlösbar



b) rechnerische Lösung

(II) Variable: $x_1' = x_1 - 2,\ x_2' = x_2 - 1$, d.h. $x_1 = x_1' + 2,\ x_2 = x_2' + 1$,

ZF: $-z = (x_1' + 2) - (x_2' + 1) = x_1' - x_2' + 1$, d.h. $z' = x_1' - x_2',\ z = -z' - 1$

NB1: $2(x_1'+2) - (x_2'+1) - u_1 = 2 \ \rightarrow\ 2x_1' - x_2' - u_1 = -1 \ \rightarrow\ -2x_1' + x_2' + u_1 = 1$

NB2: $-(x_1' + 2) + 2(x_2' + 1) + u_2 = 5 \quad \rightarrow \quad -x_1' + 2x_2' + u_1 = 5$

Normalform:
$$\begin{array}{rcl} x_1' - x_2' & \rightarrow & \max \\ -2x_1' + x_2' + u_1 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -\ x_1' + 2x_2' \qquad + u_2 & = & 5 \\ x_1',\ \ x_2',\ \ u_1,\ \ u_2 & \geq & 0 \end{array}$$

BV	c_B	x_1' 1	x_2' -1	u_1 0	u_2 0	x_B	θ
u_1	0	-2	1	1	0	1	–
u_2	0	-1	2	0	1	5	–
		$\boxed{-1}$	1	0	0	0	

alle a_{i1} negativ $\Longrightarrow$ Zielfunktion unbeschränkt

(III) Variable: $x_1' = x_1 - 2,\ x_2' = x_2 - 1$, d.h. $x_1 = x_1' + 2,\ x_2 = x_2' + 1$,
ZF: $z = -4(x_1'+2)+2(x_2'+1) = -4x_1'+2x_2'-6$, d.h. $z' = -4x_1'+2x_2',\ z = z'-6$
NB1: $2(x_1'+2)-(x_2'+1)-u_1 = 2 \ \rightarrow\ 2x_1'-x_2'-u_1 = -1 \ \rightarrow\ -2x_1'+x_2'+u_1 = 1$
NB2: $-(x_1'+2) + 2(x_2'+1) + u_2 = 5 \ \rightarrow\ -x_1' + 2x_2' - u_2 = 5$

Normalform:
$$\begin{array}{rcl} -4x_1' + 2x_2' & \rightarrow & \max \\ -2x_1' + \ x_2' + u_1 & = & 1 \\ -\ x_1' + 2x_2' \qquad + u_2 & = & 5 \\ x_1',\ \ x_2',\ \ u_1,\ \ u_2 & \geq & 0 \end{array}$$

BV	c_B	x_1' -4	x_2' 2	u_1 0	u_2 0	x_B	θ	
u_1	0	-2	1	1	0	1	$\boxed{1}$	u_1 aus Basis ausschließen
u_2	0	-1	2	0	1	5	$\frac{5}{2}$	
		4	$\boxed{-2}$	0	0	0		x_2' in Basis aufnehmen
x_2	2	-2	1	1	0	1	–	alle $\Delta_j \geq 0 \Rightarrow$ Max. bei $x_1'=0, x_2'=1$,
u_2	0	3	0	-2	1	3	$\boxed{1}$	Δ_j ist auch für Nichtbasisvariable x_1
		$\boxed{0}$	0	2	0	2		gleich 0. $\Rightarrow$ Weiterrechnung möglich
x_2	2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{9}{2}$	alle $\Delta_j \geq 0 \Rightarrow$ Max. bei $x_1'=1, x_2'=3$,
x_1	-4	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\boxed{1}$	Δ_j ist auch für Nicht-BV u_2 gleich 0.
		0	0	2	$\boxed{0}$	2		Weiterrechn. führt zur. auf BV x_1', x_2'

Alle Punkte auf der Kante zwischen den Ecken $(x_1', x_2') = (0,1) \ \widehat{=}\ (x_1, x_2) = (2,2)$ und $(x_1', x_2') = (1,3) \ \widehat{=}\ (x_1, x_2) = (3,4)$ sind optimale Lösungen, d.h. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{opt}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$; $\quad z_{\text{opt}} = z'_{\text{opt}} = 2 - 6 = -4$.

(IV) Variable: $x_1' = x_1 - 2,\ x_2' = x_2 - 1$, d.h. $x_1 = x_1' + 2,\ x_2 = x_2' + 1$,
ZF: $z = -(x_1'+2) + (x_2'+1) = -x_1' + x_2' - 1$, d.h. $z' = -x_1' + x_2',\ z = z' - 1$
NB1: $2(x_1'+2)-(x_2'+1)-u_1 = 2 \ \rightarrow\ 2x_1'-x_2'-u_1 = -1 \ \rightarrow\ -2x_1'+x_2'+u_1 = 1$
NB2: $3(x_1'+2)-(x_2'+1)+u_2 = 3 \ \rightarrow\ 3x_1'-x_2'+u_2 = -2 \ \rightarrow\ -3x_1'+x_2'-u_2 = 2$

Normalform:
$$\begin{array}{rcl} -\ x_1' + x_2' & \rightarrow & \max \\ -2x_1' + x_2' + u_1 & = & 1 \\ -3x_1' + x_2' \qquad - u_2 & = & 2 \end{array}$$

$$x_1',\quad x_2',\quad u_1,\quad u_2 \;\geq\; 0$$

Da keine Basislösung ablesbar ist, wird eine künstliche Variable v_2 eingeführt und zur Ermittlung einer ersten zulässigen Basislösung die

Ersatzaufgabe:

$$\begin{array}{rcl} -v_2 & \rightarrow & \max \\ -2x_1' + x_2' + u_1 & = & 1 \\ -3x_1' + x_2' \quad - u_2 + v_2 & = & 2 \\ x_1',\ x_2',\ u_1,\ u_2,\ v_2 & \geq & 0 \end{array}$$

gelöst (1. Phase der Simplexmethode).

		x_1'	x_2'	u_1	u_2	v_2		
BV	c_B	0	0	0	0	−1	x_B	θ
u_1	0	−2	1	1	0	0	1	$\boxed{1}$
v_2	−1	−3	1	0	−1	1	2	2
		3	$\boxed{-1}$	0	1	0	−2	
x_2'	0	−2	1	1	0	0	1	
v_2	−1	−1	0	−1	−1	1	1	
		1	0	1	1	0	−1	

alle $\Delta_j \geq 0 \Longrightarrow$ Maximum der Ersatzaufgabe $< 0 \Rightarrow$ zulässiger Bereich der Ausgangsaufgabe leer, d.h. unlösbar

Aufgabe 6.6

x: Anzahl Tische, y: Anzahl Stühle

Gewinn: $x\,(260\,\text{DM} - 180\,\text{DM}) + y\,(45\,\text{DM} - 30\,\text{DM}) = x\,80\,\text{DM} + y\,15\,\text{DM}$

$$\begin{array}{llrcrcrcl} \text{Zielfunktion} & & 80x + 15y & \longrightarrow & \max & \hat{=} & 16x + 3y & \longrightarrow & \max \\ \text{Nebenbedingungen} & \text{Zeit} & 5x + 1.25y & \leq & 200 & \hat{=} & 4x + y & \leq & 160 \\ & \text{Aufwand} & 180x + 30y & \leq & 5400 & \hat{=} & 6x + y & \leq & 180 \\ & & & & & & x, y \geq 0, & & \text{ganz} \end{array}$$

Normalform:

$$\begin{array}{rcl} 16x + 3y & \longrightarrow & \max \\ 4x + y + u_1 & = & 160 \\ 6x + y \quad + u_2 & = & 180 \\ x, y, u_1, u_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Simplexschema

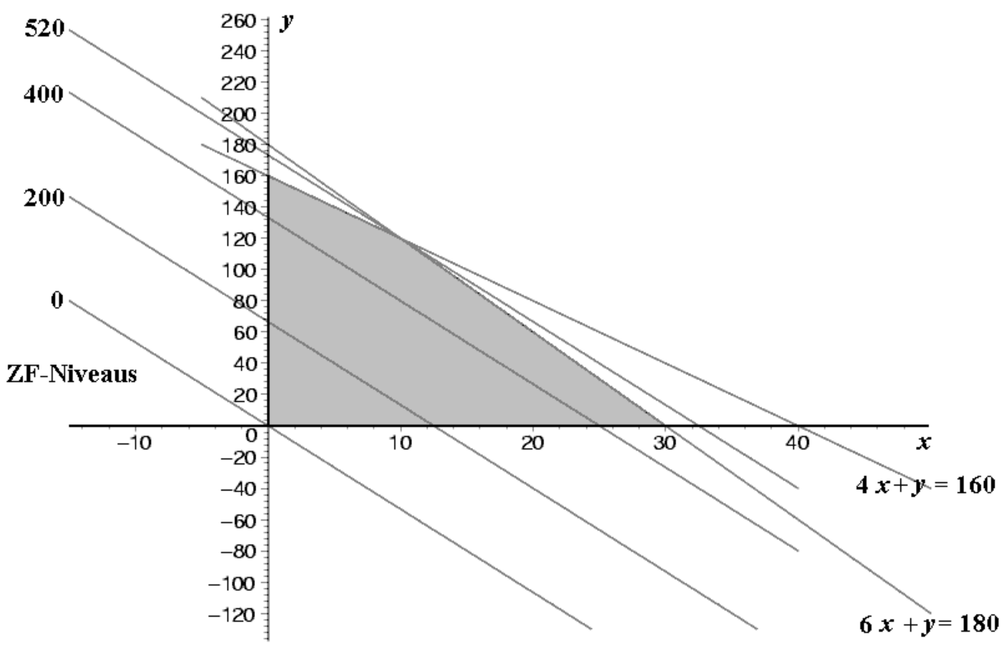
		x	y	u_1	u_2		
BV	c_B	16	3	0	0	x_B	θ
u_1	0	4	1	1	0	160	40
u_2	0	6	1	0	1	180	$\boxed{30}$
		$\boxed{-16}$	-3	0	0	0	
u_1	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	40	$\boxed{120}$
x	16	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	30	180
		0	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	0	$\frac{8}{3}$	480	
y	3	0	1	3	-2	120	
x	16	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	10	
		0	0	1	2	520	

alle $\Delta_j \geq 0 \implies$ Optimum bei $x = 10,\ y = 120$,

d.h. maximaler Gewinn $5 * 520\,\text{DM} = 2600\,\text{DM}$ für 10 Tische und 120 Stühle

oder:

grafische Lösung



Maximum im Schnitt von $4x+y=160$ und $6x+y=180$: $x=10,\ y=120$,

d.h. maximaler Gewinn $5 * 520\,\text{DM} = 2600\,\text{DM}$ für 10 Tische und 120 Stühle

Aufgabe 6.7

Zur Überführung in Normalform sind die Substitutionen $x_2 = -x_2'$ und $z = -z'$ erforderlich.

Normalform:
$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2' + 2x_3 - x_4 + x_5 & \to & \min \\ 2x_1 + x_2' + x_3 & = & 6 \\ x_1 + 4x_2' + x_4 & = & 8 \\ 2x_1 + 2x_2' + x_5 & = & 12 \\ x_1,\ x_2'\ x_3,\ x_4,\ x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Simplexmethode:

BV	c_B	x_1 3	x_2' 2	x_3 2	x_4 -1	x_5 1	x_B	θ	
x_3	2	2	1	1	0	0	6	6	
x_4	-1	1	4	0	1	0	8	$\boxed{2}$	x_4 aus Basis ausschließen
x_5	1	2	2	0	0	1	12	6	
		2	$\boxed{-2}$	0	0	0	16		x_2' in Basis aufnehmen
x_3	2	$\frac{7}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	4		
x_2'	2	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	2		alle $\Delta_j \geq 0 \implies$ Maximum für
x_5	1	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	8		$x_1^*=0,\ x_2'^*=2,\ x_3^*=4,\ x_4^*=0,\ x_5^*=8,$
		$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	20		optimaler ZF-Wert $z'^* = 20$

Nach Rücktransformation ergibt sich als optimale Lösung der Ausgangsaufgabe
$x_1^* = 0,\ x_2^* = -2,\ x_3^* = 4,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 8,\quad z^* = -20.$

Aufgabe 6.10

x_1 Anz. herzustellende größere Einzelteile, x_2 Anz. herzustellende kleinere Einzelteile

$$\begin{array}{lrrcr} \text{Gewinn:} & (208-144)x_1 + & (36-24)x_2 & \longrightarrow & \max \\ \text{Arbeitszeit:} & 4x_1 + & x_2 & \leq & 80 \\ \text{Kosten:} & 144x_1 + & 24x_2 & \leq & 2160 \\ \text{Nichtnegativität:} & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Das Modell lässt sich durch Division der Gewinnfunktion durch 4 und der Ungleichung für die Kosten durch 24 vereinfachen zu

$$\begin{array}{rcrcr} z' = z/4 & = & 16x_1 + 3x_2 & \longrightarrow & \max \\ & & 4x_1 + x_2 & \leq & 80 \\ & & 6x_1 + x_2 & \leq & 90 \\ & & x_1,\ x_2 & \geq & 0\quad , \end{array}$$

die Normalform lautet
$$\begin{array}{rcrcr} z' & = & 16x_1 + 3x_2 & \longrightarrow & \max \\ & & 4x_1 + x_2 + u_1 & = & 80 \\ & & 6x_1 + x_2 + u_2 & = & 90 \\ & & x_1,\ x_2,\ u_1,\ u_2 & \geq & 0\quad . \end{array}$$

Simplexschema:

BV	c_B	x_1 16	x_2 3	u_1 0	u_2 0	x_B	θ
u_1	0	4	1	1	0	80	20
u_2	0	6	1	0	1	90	$\boxed{15}$
		$\boxed{-16}$	-3	0	0	0	
u_1	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	20	$\boxed{60}$
x_1	16	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	15	90
		0	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	0	$\frac{8}{3}$	240	
x_2	3	0	1	3	-2	60	
x_1	16	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	
		0	0	1	2	260	

Alle Optimalitätsindikatoren sind positiv. Damit liegt das Optimum bei $x_1^* = 5$, $x_2^* = 60$, $z'^* = 260$, $z^* = 4z'^* = 1040$. Der maximal mögliche Gewinn liegt bei 1040 €, er wird erzielt, wenn 5 größere und 60 kleinere Einzelteile gefertigt werden.

Aufgabe 6.11

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & \to & \max \\ x_1 + x_2 & \geq & 12 \\ 2x_1 + x_2 & \geq & 20 \\ x_1 \geq 3, & & x_2 \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} x_1' = x_1 - 3, & x_1 = x_1' + 3 \\ x_2' = -x_2, & x_2 = -x_2' \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 3x_1' + 9 - 2x_2' & \to & \max \\ x_1' + 3 - x_2' & \geq & 12 \\ 2x_1' + 6 - x_2' & \geq & 20 \\ x_1' \geq 0, & & x_2' \geq 0 \end{array}$$

Statt $3x_1'-2x_2'+9$ kann auch $3x_1'-2x_2'$ maximiert werden. Die Normalform lautet somit nach Einführung der Schlupfvariablen u_1 und u_2

$$\begin{array}{rcl} 3x_1' - 2x_2' & \to & \max \\ x_1' - x_2' - u_1 & \geq & 9 \\ 2x_1' - x_2' - u_2 & \geq & 14 \\ x_1', \; x_2', \; u_1, \; u_2 & \geq & 0 \;. \end{array}$$

Eine zulässige Basislösung ist nicht direkt ablesbar, deshalb werden die künstlichen Variablen v_1 und v_2 eingeführt, für die folgendes Hilfsproblem gelöst wird:

$$\begin{array}{rcl} -v_1 - v_2 & \to & \max \\ x_1' - x_2' - u_1 + v_1 & \geq & 9 \\ 2x_1' - x_2' - u_2 + v_2 & \geq & 14 \\ x_1', \; x_2', \; u_1, \; u_2, \; v_1, \; v_2 & \geq & 0 \;. \end{array}$$

1. Phase des Simplexalgorithmus:

		x_1'	x_2'	u_1	u_2	v_1	v_2		
BV	c_B	0	0	0	0	−1	−1	x_B	θ
v_1	−1	1	−1	−1	0	1	0	9	9
v_2	−1	2	−1	0	−1	0	1	14	$\boxed{7}$
		$\boxed{-3}$	2	1	1	0	0	−23	
v_1	−1	0	$-\frac{1}{2}$	−1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	2	$\boxed{4}$
x_1'	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	7	–
		0	$\frac{1}{2}$	1	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	0	$\frac{3}{2}$	−2	
u_2	0	0	−1	−2	1	2	−1	4	
x_1'	0	1	−1	−1	0	1	0	9	
		0	0	0	0	1	1	0	

Alle Optimalitätsindikatoren sind nichtnegativ, maximaler Zielfunktionswert der Ersatzaufgabe ist 0. Also ist $x_1'=9,\ x_2'=0,\ u_1=0,\ u_2=4$ eine zulässige Basislösung der Normalform.

2. Phase des Simplexalgorithmus:

		x_1'	x_2'	u_1	u_2		
BV	c_B	3	−2	0	0	x_B	θ
u_2	0	0	−1	−2	1	4	–
x_1'	3	1	−1	−1	0	9	–
		0	−1	$\boxed{-3}$	0	27	

Da in der Spalte mit negativem Optimalitätsindikator −3 alle Koeffizienten des Gleichungssystems nichtpositiv sind, ist die Zielfunktion unbeschränkt und die Optimierungsaufgabe unlösbar.

Die Unbeschränktheit der Zielfunktion ist sofort zu sehen, wenn man sich z.B. überlegt, dass alle Punkte der x_1–Achse mit $x_1 \geq 12$ zulässig sind. Für $x_1 \to \infty$, $x_2 = 0$ gilt $z = 3x_1 + 2x_2 \to \infty$, so dass die Zielfunktion über alle Grenzen wächst.

19.7 Folgen und Reihen

Aufgabe 7.1

a) Zu zeigen ist, dass für $n \geq 0$ die Beziehung $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\gamma}{a_n}\right) > \sqrt{\gamma}$ gilt. Falls $a_n > 0$ ist, ist dies äquivalent zu $a_n^2 + \gamma > 2a_n\sqrt{\gamma}$, was wegen $\gamma > 0$ zu $\left(a_n - \sqrt{\gamma}\right)^2 > 0$ und damit zu $a_n \neq \sqrt{\gamma}$ äquivalent ist. Laut Voraussetzung ist $a_0 > 0$ und $a_0 \neq \sqrt{\gamma}$, daraus folgt $a_1 > \sqrt{\gamma}$ und damit insbesondere auch $a_1 > 0$ und $a_1 \neq \sqrt{\gamma}$. Hieraus folgt induktiv $a_n > \sqrt{\gamma}$ für alle n.

b) Zu zeigen ist, dass für $n \geq 1$ die Beziehung $\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\gamma}{a_n}\right) < a_n$ gilt. Dies ist äquivalent zu $\frac{1}{2}\frac{\gamma}{a_n} < \frac{a_n}{2}$ und wegen $a_n > 0$ zu $\sqrt{\gamma} < a_n$. Letzteres ist nach a) erfüllt.

c) Nach a) und b) ist die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt, damit ist sie konvergent. Deshalb gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \frac{\gamma}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\right)$. Daraus folgt $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^2 = \gamma$ und schließlich $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\gamma}$.

Aufgabe 7.2

vgl. Satz 8.1

Aufgabe 7.3

a) $q = \frac{99}{100}$, $a_n = q^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ wegen $|q| < 1$, d.h. Folge konvergiert gegen 0,
Reihe geometrisch mit $|q| < 1 \Longrightarrow$ konvergent. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{100^n} = \frac{99}{100}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{99^n}{100^n} = \frac{99}{100}\frac{1}{1-\frac{99}{100}} = 99.$

b) $q = \frac{101}{100}$, $a_n = q^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ wegen $q > 1$, also Folge divergent,
die Reihe ist dann erst recht divergent.

c) $a_n = \left(\frac{1}{8}\right)^n + \left(\frac{1}{9}\right)^n$, wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n = 0$ gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
Reihe konvergiert als Summe zweier konvergenter geometrischer Reihen,
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{8}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n + \frac{1}{9}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{1}{8}} + \frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{15}{56}.$

d) Folge $a_n = \sin^2 n$ divergiert unbestimmt, Reihe divergiert deshalb erst recht.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\lim\limits_{N\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) = \frac{3}{4}$,

f) $a_n = \sqrt{n}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{\frac{1}{n}+1})}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$,
Reihe divergiert, da Folge nicht gegen 0 konvergiert.

g) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, Reihe divergiert deshalb erst recht.

h) $a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
$a_n > \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2n}$, nach dem Majorantenkriterium divergiert die Reihe, da die „Hälfte“ der harmonischen Reihe $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert.

Aufgabe 7.4

a) geometrische Reihe mit $|q| = \frac{9}{10} < 1 \Longrightarrow$ konvergent.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{10^n} = \frac{9}{10}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{10^n} = \frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{9}{10}} = 9.$

b) geometrische Reihe mit $|q| = 2 > 1 \implies$ divergent.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 \neq 0 \implies$ Reihe divergent.

d) $a_n = \frac{1}{2}\sin^2 n$ divergiert unbestimmt $\implies$ Reihe divergent.

e) $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert (harmonische Reihe). Nach dem Majorantenkriterium divergiert auch die gegebene Reihe.

f) $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(N+1) - \ln 1 = \ln(N+1) \longrightarrow \infty$ für $N \to \infty$. Reihe divergiert.

g) $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \longrightarrow 1$ für $N \to \infty$. Reihe konvergiert gegen 1.

h) $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^{-n} + 3^{-2n}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n$. Die beiden geometrischen Reihen konvergieren wegen $|\frac{1}{2}| < 1$ und $|\frac{1}{9}| < 1$. $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{25}{8}$.

i) geometrische Reihe mit $|q| = \frac{1}{18} < 1 \implies$ konvergent. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{18}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{18}} = \frac{18}{17}$.

Aufgabe 7.8

$|a_k| < \varepsilon$ bedeutet $\dfrac{1}{2^k} < \varepsilon \iff \dfrac{1}{\varepsilon} < 2^k \iff \ln\dfrac{1}{\varepsilon} < k\ln 2 \iff k > -\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 2}$.

Wählt man als $N_0(\varepsilon)$ die zu $-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 2}$ nächstgrößere ganze Zahl, so ergibt sich

$N_0(0.1) = 4$, $N_0(0.01) = 7$ und $N_0(0.001) = 10$.

Aufgabe 7.9

a)
$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n^2-2n+3} - \frac{1}{2n^2+2n+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-2n+3} - \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+2n+3}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 1}{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} - \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 1}{n^2\left(2+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

b)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+5}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2+\frac{5}{n}} - 1\right) = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$$

c) Da $\sin\frac{n\pi}{2}$ für $n \to \infty$ immer abwechselnd die Werte 0, 1, 0 und -1 annimmt, divergiert die Folge unbestimmt.

Aufgabe 7.10

a) Durch Anwendung der Formel für die geometrische Reihe ergibt sich
$$\sum_{m=2}^{\infty} 2^{-2m}3^m = \sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^m - \left(\frac{3}{4}\right)^0 - \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 1 - \frac{3}{4} = 4 - \frac{7}{4} = \frac{9}{4}.$$

b) Berechnung nach der Formel für die Partialsumme der geometrischen Reihe
$$\sum_{m=0}^{k} q^m = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$$
Achtung: Summe muss dabei bei $m = 0$ anfangen. Wir erhalten
$$\sum_{m=2}^{50} 2^{2m}3^{-m} = \sum_{m=2}^{50}\left(\frac{4}{3}\right)^m = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \sum_{m=0}^{48}\left(\frac{4}{3}\right)^m = \frac{16}{9}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^4 9 - 1}{\frac{4}{3}-1} \approx 7063118.52.$$

19.8 Finanzmathematik

Aufgabe 8.3

vgl. Beispiel 8.2, R: Rechnungsbetrag,

Barwert zum Rechnungsdatum bei Zahlung nach 30 Tagen: $K_0 = \dfrac{R}{1 + 0.025\frac{1}{12}}$,

Barwert zum Rechnungsdatum bei Zahlung nach 10 Tagen: $K_0 = \dfrac{R * 0.98}{1 + 0.025\frac{10}{360}}$,

$$\frac{R}{1+\frac{i}{12}} = \frac{R * 0.98}{1+\frac{i}{36}}, \quad 1 + \frac{i}{36} = 0.98\left(1 + \frac{i}{12}\right), \quad 0.02 = 1.94\frac{i}{36}, \quad i = 37.11\%$$

Der Unterschied zu dem in Beispiel 8.2 ermittelten Zinssatz von 36.73 % ist darin begründet, dass dort die Barwerte zum Rechnungsfälligkeitsdatum (30 Tage nach Rechnungsdatum), hier jedoch zum Rechnungsdatum gleichgesetzt werden.

Aufgabe 8.4

a) ohne Skonto nach 30 Tagen: $5542\,\mathrm{DM}\frac{1}{1+0.03\frac{30}{360}} = 5528.18\,\mathrm{DM}$,
mit Skonto nach 10 Tagen: $5542\,\mathrm{DM} * 0.98 * \frac{1}{1+0.03\frac{10}{360}} = 5426.64\,\mathrm{DM}$

b) $5542\,\mathrm{DM}\frac{1}{1+i\frac{30}{360}} = 5542\,\mathrm{DM} * 0.98 * \frac{1}{1+i\frac{10}{360}}$, $\frac{1}{1+\frac{i}{12}} = \frac{0.98}{1+\frac{i}{36}}$, $1 + \frac{i}{36} = 0.98(1 + \frac{i}{12})$,
$0.02 = \frac{1.94}{36}i$, $i = 0.37113$, Barwerte gleich für Kalkulationszinssatz 37.11 %.

c) $K_t = K_0(1 + it)$, $1 + it = \frac{K_t}{K_0}$, $1 + i\frac{20}{360} = \frac{1}{0.98}$, $i = 0.36734$, d.h. 36.73 %.

d) Die Inanspruchnahme des Überziehungskredits in Höhe von $5542\,\mathrm{DM}\frac{1}{1+0.115\frac{20}{360}} =$ $5506.82\,\mathrm{DM}$ würde 20 Tage später incl. 11.5 % Zinsen p.a. Schulden in Höhe von

5542.00 DM verursachen. Mit Skonto müssen jedoch nur 5431.16 DM gezahlt werden, so dass das Skonto in Anspruch genommen werden sollte, auch wenn der Betrag mit dem Überziehungskredit finanziert werden muss. (In diesem Fall hat man 20 Tage später nur Schulden in Höhe von 5465.86 DM.)

Aufgabe 8.7

Sparphase: $E_{20}^{\text{vor}} = rq\frac{q^{20}-1}{q-1} = 2000\,\text{DM} \cdot 1.06 \cdot \frac{1.06^{20}-1}{0.06} = 77985.45\,\text{DM}$,
Auszahlphase: $77985.45\,\text{DM} = B_{15}^{\text{vor}} = \frac{r}{q^{14}}\frac{q^{15}-1}{q-1} = \frac{r}{1.06^{14}}\frac{1.06^{15}-1}{0.06}$,
jährliche Auszahlung also $r = 77985.45\,\text{DM} \cdot 1.06^{14} \cdot \frac{0.06}{1.06^{15}-1} = 7575.09\,\text{DM}$.

Aufgabe 8.9

a) Grundstückspreis: $\frac{1}{1.0348}\ 200000\,\text{DM} = 193274.06\,\text{DM}$,
Courtage: $\frac{0.0348}{1.0348}\ 200000\,\text{DM} = 6725.94\,\text{DM}$.

b) Jahresrate (Annuität): 7% * 200000 DM = 14000 DM,
Restschuld nach 4 Jahren = Wert des Darlehens nach 4 Jahren − Wert der Leistungen des Schuldners nach 4 Jahren (Endwert einer nachschüssigen Rente) =
$200000 \cdot 1.06^4 - 14000 \cdot \frac{1.06^4-1}{1.06-1} = 252495.39 - 61244.62 = \underline{\underline{191250.77}}$ (alles in DM)

oder:

Zins- und Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld zu Jahresbeginn	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld zu Jahresende
1	200000.00	12000.00	2000.00	14000.00	198000.00
2	198000.00	11880.00	2120.00	14000.00	195880.00
3	195880.00	11752.80	2247.20	14000.00	193632.80
4	193632.80	11617.97	2382.03	14000.00	$\underline{\underline{191250.77}}$

c) Quartalsrate: $\frac{1}{4}$ * 7% * 200000 DM =1.75% * 200000 DM = 3500 DM,
Restschuld nach 16 Quartalen = Wert des Darlehens nach 16 Quartalen − Wert der Leistungen des Schuldners nach 16 Quartalen (Endwert einer nachschüssigen Rente) =
$200000 \cdot 1.015^{16} - 3500 \cdot \frac{1.015^{16}-1}{1.015-1} = 253797.11 - 62763.29 = \underline{\underline{191033.82}}$ (alles in DM)

oder:

Zins- und Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld zu Quartalsbeginn	Zinsen	Tilgung	Quartalsrate	Restschuld zu Quartalsende
1	200000.00	3000.00	500.00	3500.00	199500.00
2	199500.00	2992.50	507.50	3500.00	198992.50
3	198992.50	2984.89	515.11	3500.00	198477.39
4	198477.39	2977.16	522.84	3500.00	197954.55
5	197954.55	2969.32	530.68	3500.00	197423.87
6	197423.87	2961.36	538.64	3500.00	196885.23
7	196885.23	2953.28	546.72	3500.00	196338.51
8	196338.51	2945.08	554.92	3500.00	195783.59
9	195783.59	2936.75	563.25	3500.00	195220.34
10	195220.34	2928.31	571.69	3500.00	194648.65
11	194648.65	2919.73	580.27	3500.00	194068.38
12	194068.38	2911.03	588.97	3500.00	193479.41
13	193479.41	2902.19	597.81	3500.00	192881.60
14	192881.60	2893.22	606.78	3500.00	192274.82
15	192274.82	2884.12	615.88	3500.00	191658.94
16	191658.94	2874.88	625.12	3500.00	$\underline{\underline{191033.82}}$

d) Bei b) ist der Effektivzins gleich dem Nominalzins von 6 %, während bei c) wegen der unterjährigen Verzinsung der Effektivzins $1.015^4 - 1 = 6.14$ % beträgt. Trotz der höheren Restschuld ist damit b) günstiger. (Der unterjährig eingesparte Aufwand kann vom Darlehensnehmer bis zum Jahresende verzinst angelegt werden.)

Aufgabe 8.15

a) Ein Darlehen, bei dem Zinsen und Tilgung in gleichbleibenden Raten zu erbringen sind, heißt **Annuitätendarlehen**, die (Jahres–)Rate heißt Annuität. Sie wird zunächst für die Zinszahlung verwendet, mit dem verbleibenden Teil wird die Darlehensschuld gemindert (getilgt). Hier handelt es sich um gleichbleibende Monatsraten.

Man kann alle Zahlungen und die Entwicklung der Schuld in einem Zahlungsplan (Zins- und Tilgungsplan) erfassen. Ein solcher würde dem Kreditnehmer auch von der Bank ausgehändigt.

Monat	Restschuld zu Monatsbeginn	Zinsen	Tilgung	Monatssrate	Restschuld zu Monatsende
1	150000.00	625.00	375.00	1000.00	149625.00
2	149625.00	623.44	376.56	1000.00	149248.44
3	149248.44	621.87	378.13	1000.00	148870.31
4	148870.31	620.29	379.71	1000.00	148490.60
5	148490.60	618.71	381.29	1000.00	148109.31
6	148109.31	617.72	382.88	1000.00	$\underline{147726.43}$
7	147726.43	615.53	384.47	1000.00	147341.96
8	147341.96	613.92	386.08	1000.00	146955.88
9	146955.88	612.32	387.68	1000.00	146568.20
10	146568.20	610.70	389.30	1000.00	146178.90
11	146178.90	609.08	390.92	1000.00	145787.98
12	145787.98	607.45	392.55	1000.00	$\underline{\underline{145395.43}}$

Die Restschuld lässt sich auch mit den Formeln der Rentenrechnung ermitteln. Bei den regelmäßigen Zahlungen des Schuldners in gleicher Höhe handelt es sich um eine nachschüssige Rente. Die Verzinsung beträgt 5 % p.a., denn die Zahlungen bedienen und mindern ja eine zu 5 % p.a. verzinste Schuld. Tatsächliche Zinsperiode ist jedoch der Monat mit einer Verzinsung von 5 % : 12 = $0.41\overline{6}$ % pro Monat. Der Endwert der nachschüssigen Rente beträgt nach 6 Monaten

$$E_6^{\text{nach}} = r\frac{q^6-1}{q-1} = 1000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^6 - 1}{\left(1+\frac{0.05}{12}\right) - 1} = 6062.84.$$

Der Wert des ausgereichten Darlehensbetrages beträgt dagegen nach 12 Monaten

$$150000 \cdot \left(1+\frac{0.05}{12}\right)^6 = 153789.27.$$

Restschuld nach 6 Monaten = Wert der Leistungen des Darlehensgebers − Wert der Leistungen des Darlehensnehmers = $153789.27 - 6062.84 = \underline{147726.43}$ (alles in €).

Analog ergibt sich die Restschuld nach 12 Monaten = Wert des Darlehens nach 12 Monaten − Wert der Leistungen des Schuldners nach 12 Monaten =

$$150000 \cdot \left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{12} - 1000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{12} - 1}{\left(1+\frac{0.05}{12}\right) - 1} = 157674.27 - 12278.83 =$$

$\underline{\underline{145395.44}}$.

b) Hier ist nur eine Jahresrate zu berücksichtigen, es ergibt sich

Jahr	Restschuld zu Jahresbeginn	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld zu Jahresende
1	150000.00	7500	4500.00	12000.00	$\underline{\underline{145500.00}}$

Restschuld nach 1 Jahr = Wert des Darlehens nach 1 Jahr − Wert der Leistung des Schuldners (nach 1 Jahr erbracht) =

$$150000 \cdot 1.05 - 12000 = 157500.00 - 12000.00 = \underline{\underline{145500.00}}.$$

Trotz der höheren Restschuld ist b) günstiger. Der unterjährig eingesparte Aufwand kann vom Darlehensnehmer bis zum Jahresende verzinst angelegt werden.

Rechnerisch kann dies durch Ermittlung des effektiven Jahreszinses dargestellt werden. Bei b) ist dieser gleich dem Nominalzins von 5 %. Bei a) ergibt sich hingegen für das Jahr ein Aufzinsungsfaktor von $\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{12} = 1.0511618$, so dass der effektive Jahreszins nach Preisangabenverordnung (vgl. Aufgabe 8.16) 5.12 % beträgt.

Aufgabe 8.16

Wir führen einen Barwertvergleich zum 7. Februar durch. Der Kaufpreis K_0 hat dann den Barwert K_0, während der am 22. März zu zahlende Preis $K_t = 1.01\,K_0$ für den Jahresanteil t mit der Effektivzinsrate i_{eff} abzuzinsen ist.

Bei einfacher Verzinsung (Aufgabe a)) ergibt sich $K_0 = \dfrac{K_t}{1+i_{\text{eff}}t} = \dfrac{1.01\,K_0}{1+i_{\text{eff}}t}$,

bei exponentieller Verzinsung (Aufgabe b)) dagegen $K_0 = \dfrac{K_t}{(1+i_{\text{eff}})^t} = \dfrac{1.01\,K_0}{(1+i_{\text{eff}})^t}$.

Zusätzlich ist die unterschiedliche Berechnung von t zu beachten.

Nach der Methode 30/360 (Aufgabe a)) ergibt sich $t = \dfrac{30+15}{360} = \dfrac{45}{360}$,

nach der Methode 30,41666/365 (Aufgabe b)) dagegen $t = \dfrac{1}{12} + \dfrac{15}{365} = \dfrac{45.41\overline{6}}{365}$.

a) $1.01 = 1 + i_{\text{eff}}\dfrac{30+15}{360}, \quad i_{\text{eff}} = 0.1\dfrac{360}{45} = 0.08 = \underline{\underline{8.00\,\%}},$

b) $1.01 = (1+i_{\text{eff}})^{\frac{1}{12}+\frac{15}{365}} = (1+i_{\text{eff}})^{\frac{45.41\overline{6}}{365}}, \quad i_{\text{eff}} = 1.01^{\frac{365}{45.41\overline{6}}} - 1 = 0.08325 \approx \underline{\underline{8.33\,\%}}.$

Aufgabe 8.17

a) Zinsperiode ist das Halbjahr mit einem Aufzinsungsfaktor von $q = 1.2$. Die Barwertformel für die nachschüssige Rente ergibt

$$B_2^{\text{nach}} = \frac{r}{q^2}\,\frac{q^2-1}{q-1} = \frac{r}{q^2}\,(q+1) = \frac{500\,€}{1.2^2} \cdot 2.2 = \underline{\underline{763.89\,€}}.$$

b)

Halbjahr	Restschuld zu Halbjahresbeginn	Zinsen	Tilgung	Halbjahresrate	Restschuld zu Halbjahresende
1	763.89	152.78	347.22	500.00	416.67
2	416.67	83.33	416.67	500.00	0.00

c) Da nach der Preisangabenverordnung die exponentielle Verzinsung auch im unterjährigen Bereich gilt und die tatsächliche Verzinsung für das Halbjahr 20 % beträgt, gilt ${q_{\text{eff}}}^{\frac{1}{2}} = 1.2$, also $q_{\text{eff}} = 1.44$ und damit $\underline{\underline{i_{\text{eff}} = 44.00\,\%}}$.

Oder:

Nach der Rechenvorschrift aus dem Anhang zu § 6 der Preisangabenverordnung wären die Barwerte der Leistungen des Kreditgebers und des Kreditnehmers zum Zeitpunkt der Ausreichung des Kredits gleichzusetzen:

$$763.89 = \frac{500}{q_{\text{eff}}^{\frac{1}{2}}} + \frac{500}{q_{\text{eff}}}, \quad 763.89 q_{\text{eff}} = 500\sqrt{q_{\text{eff}}} + 500, \quad q_{\text{eff}} - \frac{500}{763.89}\sqrt{q} - \frac{500}{763.89} = 0.$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung für $\sqrt{q_{\text{eff}}}$ ergibt $\sqrt{q_{\text{eff}}} = 1.2$, also ist $q_{\text{eff}} = 1.44$ und $\underline{\underline{i_{\text{eff}} = 44.00\,\%}}$ wie bereits bekannt.

d) Auf der einen Seite muss der Kreditbetrag (Zahlung des Kreditgebers) für 1 Jahr verzinst, auf der anderen Seite die erste Rate für 1/2 Jahr und die zweite Rate (beides Zahlungen des Kreditnehmers) nicht verzinst werden.

$$763.89\,(1 + i_{\text{eff}}) = 500\,(1 + i_{\text{eff}}\frac{1}{2}) + 500, \quad 763.89 + 763.89\,i_{\text{eff}} = 500 + 250\,i_{\text{eff}} + 500,$$
$$513.89\,i_{\text{eff}} = 236.11, \quad \underline{\underline{i_{\text{eff}} = 0.459456 \approx 45.95\,\%}}$$

19.9 Differentialrechnung in einer Veränderlichen

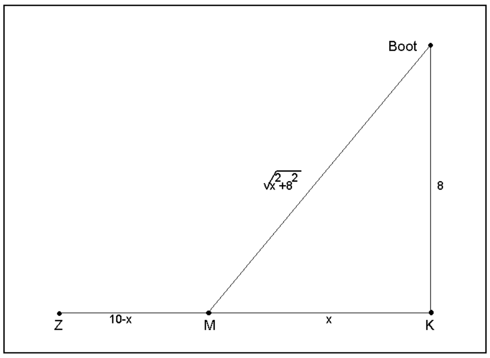
Aufgabe 9.2

siehe Folie Abbildung 20.1

Aufgabe 9.3

siehe Folie Abbildung 20.15

Aufgabe 9.10



$t(x) = \dfrac{s_1}{v_1} + \dfrac{s_2}{v_2} = \dfrac{\sqrt{x^2+8^2}}{3} + \dfrac{10-x}{5}$,

$t' = \dfrac{x}{3\sqrt{x^2+8^2}} - \dfrac{1}{5} = 0 \implies$

$\dfrac{x}{3\sqrt{x^2+64}} = \dfrac{1}{5}$, $\dfrac{x^2}{9(x^2+64)} = \dfrac{1}{25}$,

$x^2 = 36$, $x = \pm 6$

Die Lösung $x = -6$ ist sinnlos, so dass $x = 6$ der einzig mögliche Punkt für ein Minimum ist. Da $t(x)$ nach unten beschränkt ist, muss es ein Minimum geben. Also muss ein 6 km von K entfernter Punkt angesteuert werden.

Aufgabe 9.11

$$U = 2a + 2b,\ F = ab = \frac{1}{2}a(U-2a),\ F' = \frac{1}{2}(U-4a)\begin{cases} >0 & a < \frac{U}{4} & \text{monoton wachsend} \\ =0 & a = \frac{U}{4} & \text{Maximum} \\ <0 & a > \frac{U}{4} & \text{monoton fallend} \end{cases}$$

maximaler Flächeninhalt beim Quadrat mit $a = b = \dfrac{U}{4}$, $F = \dfrac{U^2}{16}$

Aufgabe 9.12

$V = \pi r^2 h = 1[\mathrm{dm}^3]$, $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$, $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \dfrac{2}{r} \to \max$,

$$O' = 4\pi r - \frac{2}{r^2}\begin{cases} <0 & r < \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} & \text{monoton fallend} \\ =0 & r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} & \text{Minimum} \\ >0 & r > \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} & \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

minimaler Materialverbrauch bei $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} = 0.5419\,\mathrm{dm}$, $h = \sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}} = 2r = 1.0838\,\mathrm{dm}$,

Materialverbrauch dabei $O = 5.54\,\mathrm{dm}^2$

Aufgabe 9.15

a) $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{3x^2-1}{x^3}$: definiert und stetig für $x \neq 0$,

Nullstellen: $3x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3-\frac{1}{x^2}}{x} = 0$,

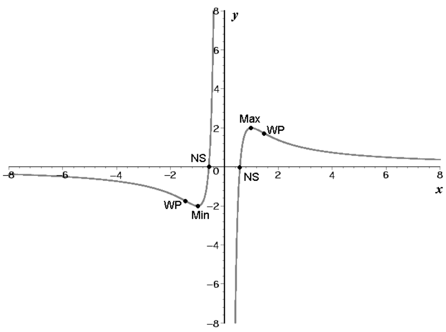
$\lim\limits_{x\to 0\pm 0} y(x) = \lim\limits_{x\to 0\pm 0} \dfrac{3x^2-1}{x^3} = \mp\infty$ (Pol 1. Ordnung bei $x = 0$),

damit sind sowohl die x– als auch die y–Achse Asymptoten.

$$y'(x) = -3x^{-2}+3x^{-4} = 3\frac{1-x^2}{x^4} = \begin{cases} <0 & x<-1 & \text{monoton fallend} \\ =0 & x=-1 & \text{Minimum } y(-1)=-2 \\ >0 & -1<x<0 & \text{monoton wachsend} \\ >0 & 0<x<1 & \text{monoton wachsend} \\ =0 & x=1 & \text{Maximum } y(1)=2 \\ <0 & 1<x & \text{monoton fallend} \end{cases}$$

Wertebereich ist folglich die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

$$y''(x) = 6x^{-3}-12x^{-5} = 6\frac{x^2-2}{x^5} \begin{cases} <0 & x<-\sqrt{2} & \text{konkav} \\ =0 & x=-\sqrt{2} & \text{WP } f(-\sqrt{2})=-\frac{5}{2\sqrt{2}} \\ >0 & -\sqrt{2}<x<0 & \text{konvex} \\ <0 & 0<x<\sqrt{2} & \text{konkav} \\ =0 & x=\sqrt{2} & \text{WP } f(\sqrt{2})=\frac{5}{2\sqrt{2}}\approx 1.7677 \\ >0 & \sqrt{2}<x & \text{konvex} \end{cases}$$



b) $y = \frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}$: definiert und stetig für $x \neq 2$, Wertebereich $y \geq 0$,
Nullstelle: $x=-2$ (doppelt), Asymptoten: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1$

$$y' = -8\frac{x+2}{(x-2)^3} \begin{cases} <0 & x<-2 & \text{monoton fallend} \\ =0 & x=-2 & \text{Minimum bei } y=0 \\ >0 & -2<x<2 & \text{monoton wachsend} \\ \text{n.def.} & x=2 & \text{Pol 2. Ordnung} \\ <0 & x>2 & \text{monoton fallend} \end{cases}$$

$$y'' = 16\frac{x+4}{(x-2)^4} \begin{cases} <0 & x<-4 & \text{konkav} \\ =0 & x=-4 & \text{Wendepunkt bei } y=\frac{1}{9} \\ >0 & -4<x<2 & \text{konvex} \\ \text{n.def.} & x=2 & \\ >0 & x>2 & \text{konvex} \end{cases}$$

Aufgabe 9.16

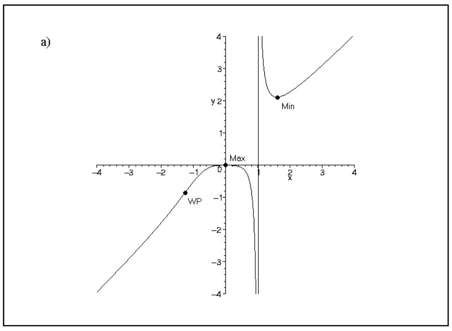
a) $y = \frac{x^4}{x^3-1} = \frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)}$: definiert und stetig für $x \neq 1$,
Nullstelle: $x=0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = \pm\infty$, Asymptote dabei $y=x$, da $y = \frac{x}{1-\frac{1}{x^3}}$,

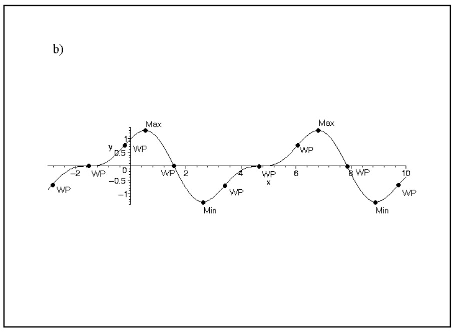
$\lim\limits_{x\to 1\pm 0} y(x) = \pm\infty$ (Pol 1. Ordnung bei $x = 1$),

$$y'(x) = \frac{x^6 - 4x^3}{(x^3-1)^2} = \frac{x^3}{(x^3-1)^2}(x^3-4) \begin{cases} >0 & x<0 & \text{monoton wachsend} \\ =0 & x=0 & \text{Maximum } y(0)=0 \\ <0 & 0<x<1 & \text{monoton fallend} \\ \text{n. def.} & x=1 & \\ <0 & 1<x<\sqrt[3]{4} & \text{monoton fallend} \\ =0 & x=\sqrt[3]{4}\approx 1.5874 & \text{Min. } y(\sqrt[3]{4})\approx 2.1165 \\ >0 & \sqrt[3]{4}<x & \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

Wertebereich: $y \le 0$ und $y \ge \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$

$$y''(x) = \frac{6x^2}{(x^3-1)^3}(x^3+2) \begin{cases} >0 & x<-\sqrt[3]{2} & \text{konvex} \\ =0 & x=-\sqrt[3]{2}\approx -1.2599 & \text{WP } f(-\sqrt[3]{2})\approx -0.8399 \\ <0 & -\sqrt[3]{2}<x<0 & \text{konkav} \\ =0 & x=0 & \text{kein Wendepunkt} \\ <0 & 0<x<1 & \text{konkav} \\ \text{n. def.} & x=1 & \\ >0 & 1<x & \text{konvex} \end{cases}$$





b) $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x = \cos x(\sin x + 1)$: definiert und stetig für $x \in \mathbb{R}$,
beschränkt, deshalb ergibt sich Wertebereich aus Extrema,
Nullstellen: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k beliebig ganz

$y' = \cos 2x - \sin x = 1 - 2\sin^2 x - \sin x = -2(\sin x - \frac{1}{2})(\sin x + 1) = 0$
für $\sin x = \frac{1}{2}, -1$,
Ableitung hat Nullstellen für $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, k bel. ganz,

$$y' \begin{cases} >0 & -\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi & \text{monoton wachsend} \\ =0 & x=\frac{\pi}{6}+2k\pi & \text{Maximum bei } y=\frac{3}{4}\sqrt{3} \\ <0 & \frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi & \text{monoton fallend} \\ =0 & x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi & \text{Minimum bei } y=-\frac{3}{4}\sqrt{3} \\ >0 & \frac{5\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi & \text{monoton wachsend} \\ =0 & x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi & \text{kein Extremwert (s.Forts.oben: mon.wachs.)} \end{cases}$$

Wertebereich: $-\frac{3}{4}\sqrt{3} \le y \le \frac{3}{4}\sqrt{3}$

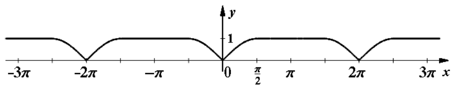
$y'' = -2\sin 2x - \cos x = -\cos x(1 + 4\sin x) = 0$ für $\cos x = 0$ und $\sin x = -\frac{1}{4}$, d.h.
für $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \arcsin\frac{1}{4} + (2k+1)\pi \approx \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$, $x = -\arcsin\frac{1}{4} + (2k+2)\pi \approx$

$\frac{23\pi}{12} + 2k\pi$,

$$y'' \begin{cases} < 0 & -\arcsin\frac{1}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi & \text{konkav} \\ = 0 & x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi & \text{Wendepunkt bei } y = 0 \\ > 0 & \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \arcsin\frac{1}{4} + (2k+1)\pi & \text{konvex} \\ = 0 & x = \arcsin\frac{1}{4} + (2k+1)\pi \approx \frac{13\pi}{12} + 2k\pi & \text{Wendepunkt bei } y = -\frac{3}{16}\sqrt{15} \\ < 0 & \arcsin\frac{1}{4} + (2k+1)\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi & \text{konkav} \\ = 0 & x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi & \text{Wendepunkt bei } y = 0 \\ > 0 & \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < \arcsin\frac{1}{4} + (2k+2)\pi & \text{konvex} \\ = 0 & x = -\arcsin\frac{1}{4} + (2k+2)\pi \approx \frac{23\pi}{12} + 2k\pi & \text{Wendepunkt bei } y = \frac{3}{16}\sqrt{15} \end{cases}$$

Aufgabe 9.17

Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Wegen $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}-0} f(x) = 1 = \sin\frac{\pi}{2} = f(-\frac{\pi}{2})$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = 0 = \sin 0 = f(0) = \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ und $f(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)$ ist die gegebene Funktion, wegen $f(\pi) = 1 = f(-\pi)$ auch ihre periodische Fortsetzung überall stetig.



Nullstellen: $x = 2k\pi$, k ganz.

Wegen $\left.\dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 = \left.\dfrac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}$ und $\left.\dfrac{\mathrm{d}\sin(-x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-\frac{\pi}{2}} = -\cos\dfrac{\pi}{2} = 0 = \left.\dfrac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-\frac{\pi}{2}}$ (d.h. linksseitige und rechtsseitige Ableitung sind gleich) ist die Funktion für $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k ganz) differenzierbar, ebenso offensichtlich für $x = (2k+1)\pi$ (Funktion von beiden Seiten konstant 1). Wegen $\left.\dfrac{\mathrm{d}\sin(-x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -\cos 0 = -1$ und $\left.\dfrac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \cos 0 = 1$ ist die Funktion hingegen für $x = 2k\pi$ (k ganz) nicht differenzierbar. Somit gilt

$$f'(x) \begin{cases} = 0 & -\pi + 2k\pi \le x \le -\frac{\pi}{2} + 2k\pi & \text{konstant, Maximum } f(x) = 1 \\ = -\cos(-x) < 0 & -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 0 + 2k\pi & \text{monoton fallend} \\ \text{nicht def.} & x = 2k\pi & \text{Min.} f(x) = 0 \text{(da. zw.fall.u.wachs.)} \\ = \cos x > 0 & 0 + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi & \text{monoton wachsend} \\ = 0 & \frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi & \text{konstant, Maximum } f(x) = 1 \end{cases}$$

Somit liegen für $x = 2k\pi$ Minima ($f(x) = 0$) und für $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ Maxima ($f(x) = 1$) vor, dies ergibt sich auch unmittelbar aus dem Bild der Funktion.

Die zweite Ableitung existiert wegen $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\sin x}{\mathrm{d}^2x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\sin\dfrac{\pi}{2} = -1$ und $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 1}{\mathrm{d}^2x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$ sowie $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\sin(-x)}{\mathrm{d}^2x}\right|_{x=-\frac{\pi}{2}} = -\sin\dfrac{\pi}{2} = -1$ und $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 1}{\mathrm{d}^2x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$ zusätzlich auch für $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (k ganz) nicht. Es gilt

$$f''(x)\begin{cases} = 0 & -\pi+2k\pi \le x < -\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ \text{nicht. def.} & x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ = -\sin(-x)<0 & -\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < 0+2k\pi \qquad \text{konkav} \\ \text{nicht def.} & x = 2k\pi \\ = -\sin x<0 & 0+2k\pi < x < \frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad \text{konkav} \\ \text{nicht. def.} & x = \frac{\pi}{2}+2k\pi \\ = 0 & \frac{\pi}{2}+2k\pi < x \le \pi+2k\pi \end{cases}$$

Das Bild der Funktion zeigt, dass diese innerhalb jedes Intervalls $0+2k\pi \le x \le 2\pi+2k\pi$ konkav ist, da alle Sekanten unterhalb des Graphen bzw. auf dem Graphen der Funktion liegen. Wendepunkte existieren nicht.

Aufgabe 9.18

a) $f(x) = x^3,\ f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x,\ f'''(x) = 6,\ f^{(4)}(x) = \cdots = 0,$
$f(1) = 1,\ f'(1) = 3,\ f''(1) = 6,\ f'''(1) = 6,\ f^{(4)}(1) = \cdots = 0,$
Taylorentwicklung $f(x) = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

b) Restglieder $R_0=3\xi^2(x-1),\ R_1=3\xi(x-1)^2,\ R_2=(x-1)^3,\ R_3=0,\ \xi$ zwischen 1 u. x

c) siehe Folie Abbildung 20.3

Aufgabe 9.19

siehe Folie Abbildung 20.4

Aufgabe 9.20

siehe Folie Abbildung 20.5

Aufgabe 9.21

$\cos\varphi = 1+0-\dfrac{\varphi^2}{2}+0+R_3(\varphi),\ R_3(\varphi) = \cos^{(4)}(\overline{\varphi})\dfrac{x^4}{4!} = \cos^(\overline{\varphi})\dfrac{x^4}{24},\ \overline{\varphi}$ zwischen 0 und φ,

$|R_3(\varphi)| \le \dfrac{x^4}{24} \le 0.0001$ für $|x| \le\approx 0.2213 \approx 12.68^{\text{O}}$,

Probe: $\cos 0.2213 = 0.97561,\ 1-\dfrac{0.2213^2}{2} = 0.97551,$

siehe auch Folie Abbildung 20.5

Aufgabe 9.22

a) $$z'(v) = 1000\frac{4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}-v\left(\frac{1}{4}+\frac{v}{6}\right)}{\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)^2} = 1000\frac{4-\frac{v^2}{12}}{\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)^2},$$

$$z''(v) = 1000\frac{-\frac{v}{6}\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)^2-\left(4-\frac{v^2}{12}\right)2\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{v}{6}\right)}{\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)^4}$$

$$= 1000\frac{-\frac{v}{6}\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)-\left(4-\frac{v^2}{12}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{v}{3}\right)}{\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)^3}$$

$$= 1000\frac{-\frac{2v}{3}-\frac{v^2}{24}-\frac{v^3}{72}-2-\frac{4v}{3}+\frac{v^2}{24}+\frac{v^3}{36}}{\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)^3} = 1000\frac{-2-2v+\frac{v^3}{72}}{\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)^3},$$

$$z(12) = 1000\frac{12}{19},\quad z'(12) = 1000\left(-\frac{8}{361}\right),\quad z''(12) = 1000\left(-\frac{2}{6859}\right),$$

$$P_2(v) = 1000\left(\frac{12}{19}-\frac{8}{361}(v-12)-\frac{1}{6859}(v-12)^2\right)$$

$$\approx 631.57895 - 22.16066(v-12) - 0.14579(v-12)^2$$

b) Da das lineare Glied einen negativen Koeffizienten hat, führt eine Erhöhung von v gegenüber $v_0 = 12$ zu einer Verringerung der Durchlassfähigkeit. (Die Funktion $z(v)$ ist dort monoton fallend.)

c) $z'(v) = 0$ für $4 - \frac{v^2}{12} = 0,\ 4 = \frac{v^2}{12},\ v^2 = 48,\ v = \pm\sqrt{48}$,
dabei kommt nur $v = \sqrt{48}$ als Lösung in Frage, $z'(v)$ hat gleiches Vorzeichen wie $4 - \frac{v^2}{12}$,

$$4-\frac{v^2}{12}\left\{\begin{array}{ll} >0, & v<\sqrt{48}: \text{ monoton wachsend}\\ <0, & v>\sqrt{48}: \text{ monoton fallend}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Maximum bei } v=\sqrt{48},$$

Maximum bei $v = \sqrt{48}\frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{48}\frac{\text{km}}{1000}\frac{3600}{\text{h}} \approx 24.94\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 9.23

a)
$$\begin{array}{ll}
f(x)=(1+x)^m & f(0)=1\\
f'(x)=m(1+x)^{m-1} & f'(0)=m\\
f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2} & f''(0)=m(m-1)\\
f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} & f''(0)=m(m-1)(m-2)\\
\dots & \dots\\
f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n} & f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)
\end{array}$$

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\dots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$$
$$+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n$$

b) Quotientenkriterium: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n} = \frac{m-n}{n+1}x \longrightarrow -x$ für $n\to\infty$

$\Longrightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$ ab gewissem n für $|x|<1$.

Nach dem Quotientenkriterium liegt damit für $|x|<1$ Konvergenz vor.

c) Für $m = -3$ gilt $\binom{m}{n} = \frac{(-3)(-3-1)\cdots(-3-n+1)}{1\cdot 2\cdots n} = \frac{(-3)(-4)\cdots(-(n+2))}{1\cdot 2\cdots n} =$
$(-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} \implies (1+x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} (-x)^n.$

d) $(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 \pm \ldots,$
$P_0(0.001) = 1,$
$P_1(0.001) = 0.997,$
$P_2(0.001) = 0.997\,006,$
$P_3(0.001) = 0.997\,005\,990\,000, \qquad 1.001^{-3} = 0.997\,005\,990\,015.$

Aufgabe 9.25

a) $\frac{0}{0}: \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{\frac{1}{x}} = 3$

b) $\frac{0}{0}: \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x}}{\frac{1}{1+x}} = 3$

c) $\frac{0}{0}: \quad \lim_{x\to 1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}{1} = -\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{0}{0}: \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{4} = \frac{1}{4}$

e) $\frac{0}{0}: \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\frac{2}{1+2x}} = 1$

f) $\frac{0}{0}: \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2+\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x+2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x+\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2+2\cos 2x} = \frac{1}{4}$

g) $\frac{0}{0}: \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \infty$

h) $\frac{0}{0}: \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1+\tan^2 x)}{-\cos x} = -2$

i) $0\cdot\infty: \quad \lim_{x\to 0}(1-e^{2x})\cot x = \lim_{x\to 0} \frac{(1-e^{2x})}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2e^{2x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = -2$

j) $0\cdot\infty: \quad \lim_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\frac{x}{2} = \lim_{x\to\pi} \frac{\pi-x}{\cot\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\pi} \frac{-1}{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)} = 2$

k) $\frac{\infty}{\infty}: \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1-\sin x}{1+\cos x}$ existiert nicht, l'Hospital nicht anwendbar, aber
$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1+\frac{\cos x}{x})}{x(1+\frac{\sin x}{x})} = 1$

Aufgabe 9.29

a) $f(x) = (2x+3)^2 \mathrm{e}^{2x+3} \cdot \ln(2x+3)$

$$f'(x) = \Big(4(2x+3) \cdot \mathrm{e}^{2x+3} + 2(2x+3)^2 \cdot \mathrm{e}^{2x+3}\Big) \ln(2x+3) + 2 \cdot \frac{(2x+3)^2 \cdot \mathrm{e}^{2x+3}}{2x+3}$$
$$= 2 \cdot \mathrm{e}^{2x+3}(2x+3)\Big((2+(2x+3))\ln(2x+3)+1\Big)$$
$$= \mathrm{e}^{2x+3}(4x+6)\Big((2x+5)\ln(2x+3)+1\Big)$$

b) $f(x) = \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}} = \left(x\left(x\,x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x\,x^{\frac{5}{4}\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{17}{12}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{17}{24}}, \quad f'(x) = \frac{17}{24}x^{-\frac{7}{24}}$

c) $f(x) = \ln(\sqrt[2]{x^8+2x^4}) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^8+2x^4), \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8x^7+8x^3}{x^8+2x^4} = \frac{4}{x} \cdot \frac{x^4+1}{x^4+2}$

d) $f(x) = \frac{(x+2)\sin(3x+4)}{x^2+x}$,

$$f'(x) = \frac{\Big(\sin(3x+4) + 3(x+2)\cos(3x+4)\Big)(x^2+x) - \Big((x+2)\sin(3x+4)\Big)(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$
$$= \frac{\sin(3x+4)\,(-x^2-4x-2) + \cos(3x+4)\,(3x^3+9x^2+6x)}{(x^2+x)^2}$$

e) $f(x) = (\lg x^3)^{\frac{3}{2}}, \quad f'(x) = \frac{3}{2} \cdot (\log_{10} x^3)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{3x^2}{x^3} = \frac{9\sqrt{\lg x^3}}{2\,x\ln 10}$

Aufgabe 9.35

Eigenschaften, die ohne Ableitung zu ermitteln sind:

Definitionsbereich: Es muss $x \geq 0$ und $48-2x \geq 0$ sein, also Definitionsbereich $[0, 24]$.

Stetigkeit: Wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion ist $f(x)$ über dem gesamten Definitonsbereich stetig.

Nullstellen: $\sqrt{x}-\sqrt{48-2x}=0 \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{48-2x} \Rightarrow x=48-2x \Rightarrow 3x=48 \Rightarrow x=16$

Schnitt mit der y-Achse: $f(0) = \sqrt{0} - \sqrt{48-2\cdot 0} = -\sqrt{48} \approx -6.9282$

keine Polstellen (offensichtlich ist die Funktion über dem Definitionsbereich beschränkt)

Eigenschaften mit 1. Ableitung (Monotonie, Extremwerte):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{48-2x}}$$

Offensichtlich gilt über dem gesamten Definitionsbereich $f'(x) > 0$, die Funktion ist also überall streng monoton wachsend und hat im Inneren des Definitionsbereichs keine Extrema.

Wegen der strengen Monotonie gilt $f(0) < f(x) < f(48)$ für alle $0 < x < 24$. $\Longrightarrow$ globales Minimum: $f(0) = -\sqrt{48} \approx -6.9282$, globales Maximum $f(24) = \sqrt{24} \approx 4.8990$, Wertebereich $[-\sqrt{48}, \sqrt{24}]$

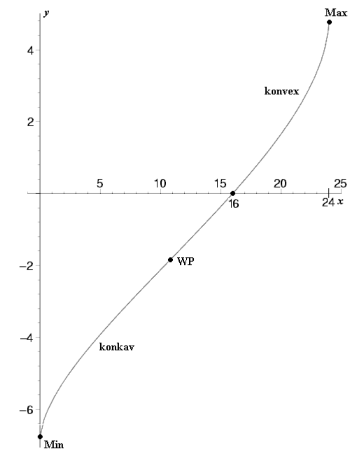
Eigenschaften mit 2. Ableitung (Krümmung, Wendepunkte):

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - 2(-\frac{1}{2})(48-2x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + (48-2x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = (48-2x)^{-\frac{3}{2}} \;\Leftrightarrow\; 48 - 2x = 4^{\frac{2}{3}}x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{48}{2+\sqrt[3]{16}} \approx 10.6198$$

Da sowohl $\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ als auch $(48-2x)^{-\frac{3}{2}}$ monoton wachsend sind, folgt

$$f''(x) \begin{cases} < 0, & x < \frac{48}{2+\sqrt[3]{16}} & \text{konkav} \\ = 0, & x = \frac{48}{2+\sqrt[3]{16}} \approx 10.6198 & \Rightarrow \text{ Wendepunkt } (10.6198, -1.9142) \\ > 0, & x > \frac{48}{2+\sqrt[3]{16}} & \text{konvex} \end{cases}$$



Aufgabe 9.36

a) $K(x) = 5 \cdot 10^{-9}x^3 - 6 \cdot 10^{-4}x^2 + 20.5x + K_0$,
$K'(x) = 15 \cdot 10^{-9}x^2 - 12 \cdot 10^{-4}x + 20.5$,
$K''(x) = 30 \cdot 10^{-9}x - 12 \cdot 10^{-4}$

$K(x)$ ist konkav für $K''(x) \le 0 \iff x \le \dfrac{12 \cdot 10^{-4}}{30 \cdot 10^{-9}} = \dfrac{2}{5}10^5 = 40000.$

Also ist $K(x)$ als Gesamtkostenfunktion für $0 < x \le 40000$ anwendbar.

b) $E_K(x) = \dfrac{K'(x)}{K(x)} \cdot x = \dfrac{15 \cdot 10^{-9}x^3 - 12 \cdot 10^{-4}x^2 + 20.5x}{5 \cdot 10^{-9}x^3 - 6 \cdot 10^{-4}x^2 + 20.5x + K_0}$,

$E_K(10000) = \dfrac{15000 - 120000 + 205000}{5000 - 60000 + 205000 + K_0} = \dfrac{100000}{150000 + K_0} = 0.5 \implies K_0 = 50000$ €

c) $\dfrac{\frac{\Delta K}{K}}{\frac{\Delta x}{x}} \approx E_K(10000) = 0.5 \Rightarrow \quad \dfrac{\Delta K}{K} \approx E_K(10000) \cdot \dfrac{\Delta x}{x} = 0,5 \cdot 0,4\% = 0,2\%$

Eine Steigerung der produzierten Stückzahl von 10000 aus um 0,4% hat eine Kostensteigerung von ca. 0,2% zur Folge.

d) Gesamtkostenfunktion $K(x) = 5 \cdot 10^{-9}x^3 - 6 \cdot 10^{-4}x^2 + 20.5x + 50000$

Durchschnittskostenfunktion $\dfrac{K(x)}{x} = 5 \cdot 10^{-9}x^2 - 6 \cdot 10^{-4}x + 20.5 + \dfrac{50000}{x}$

Grenzkostenfunktion $K'(x) = 15 \cdot 10^{-9}x^2 - 12 \cdot 10^{-4}x + 20.5$

e) Pro Stück müssen wenigstens die Durchschnittskosten $\frac{K(10000)}{10000} = 20$ erwirtschaftet werden, so dass der Preis mindestens auf 20 € festzusetzen ist.

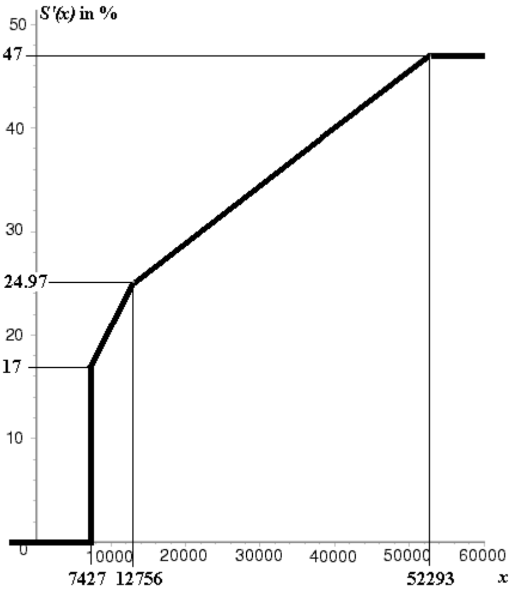
f) Pro Stück müssen mindestens die Grenzkosten $K'(10000) = 10$ erwirtschaftet werden, so dass der Preis mindestens auf 10 € festzusetzen ist.

Aufgabe 9.37

a) Sei $S(x)$ die auf das Einkommen x zu entrichtende Steuer, dann ist $\frac{S(x)}{x}$ der Durchschnittssteuersatz und $S'(x)$ der Grenzsteuersatz (d.h. die auf den letzten eingenommenen Euro zu errichtende Steuer).

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 7426 \\ (747.80 \cdot y + 1700) \cdot y, \quad y = \frac{x-7427}{10000}, & 7427 \leq x \leq 12755 \\ (278.59 \cdot z + 2497) \cdot z + 1118, \quad z = \frac{x-12756}{10000}, & 12756 \leq x \leq 52292 \\ 0.47 \cdot x - 9232, & 52293 \leq x \end{cases}$$

$$S'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 7426 \\ \frac{1495 \cdot y + 1700}{10000} = \frac{1495 \cdot \frac{x-7427}{10000} + 1700}{10000}, & 7427 \leq x \leq 12755 \\ \frac{557.18 \cdot z + 2497}{10000} = \frac{557.18 \cdot \frac{x-12756}{10000} + 2497}{10000}, & 12756 \leq x \leq 52292 \\ 0.47, & 52293 \leq x \end{cases}$$



b) $x = 20000$, $z = 0.7245$, zu entrichtende Steuer: $S(20000) = 3073.31$,

Anteil am Einkommen (Durchschnittssteuersatz): $\dfrac{S(20000)}{20000} = 15.37\%$,

Grenzsteuersatz: $S'(20000) = 29.01\%$

Die Rundungsregeln des § 32a Abs. 1 EStG sind dabei nicht berücksichtigt.

Aufgabe 9.38

Bei der Näherungsformel handelt es sich um das Taylorpolynom 4–ten Grades für $f(x) = \mathrm{e}^x$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Der Fehler kann daher mit dem Lagrangeschen Restglied angebeben werden: $R_4(x,0) = f^{(5)}(\xi)\dfrac{x^5}{5!} = \mathrm{e}^\xi \dfrac{x^5}{5!}$ für einen Zwischenpunkt $x < \xi < 0$.

Da $f(x) = \mathrm{e}^x$ positiv und monoton wachsend ist, gilt wegen $\xi < 0$ $0 < \mathrm{e}^\xi < \mathrm{e}^0 = 1$ und daher $|R_4(x,0)| < \dfrac{|x^5|}{120}$. $\dfrac{|x^5|}{120} \leq 0.0001$ ist äquivalent zu $|x| \leq \sqrt[5]{0.012} \approx 0.412892$. Für $\underline{\underline{-0.412892 \leq x < 0}}$ gilt daher auch $|R_4(x,0)| < 0.0001$.

Tatsächlich ist $\mathrm{e}^{-\sqrt[5]{0.012}} = 0.661734$ und $P_4(-\sqrt[5]{0.012}) = 0.661827$, so dass der Fehler bei $x = -\sqrt[5]{0.012}$ 0.000093 beträgt.

Aufgabe 9.39

Es handelt sich um einen Grenzwert der Form $\dfrac{0}{0}$. Nach der l'Hospitalschen Regel gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2\alpha x} - \mathrm{e}^{3\beta x}}{\sin 4\alpha x - \sin 6\beta x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\alpha \mathrm{e}^{2\alpha x} - 3\beta \mathrm{e}^{3\beta x}}{4\alpha \cos 4\alpha x - 6\beta \cos 6\beta x} = \frac{2\alpha - 3\beta}{4\alpha - 6\beta} = \frac{1}{2}$$

19.10 Integralrechnung in einer Veränderlichen

Aufgabe 10.5

a) $\int e^{-x}\mathrm{d}x + \int e^{-2x}\mathrm{d}x = -\int e^{-x}(\,-x) - \frac{1}{2}\int e^{-2x}(\,-2x) = -e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$

b) $\int (2\sin 3x + 3\cos 4x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \sin 3x \mathrm{d}3x + \frac{3}{4}\int \cos 4x \mathrm{d}4x = -\frac{2}{3}\cos 3x + \frac{3}{4}\sin 4x + C$

c) $\int \sqrt[7]{6x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int (6x+5)^{\frac{1}{7}}\mathrm{d}(6x+5) = \frac{1}{6}\frac{7}{8}(6x+5)^{\frac{8}{7}} + C = \frac{7}{48}(6x+5)\sqrt[7]{6x+5} + C$

d) $\int \frac{(\ln x^3)^2}{x}\mathrm{d}x = \int (3\ln x)^2\frac{\mathrm{d}x}{x} = 9\int (\ln x)^2 \mathrm{d}\ln x = 9\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C = 3(\ln x)^3 + C$

e) $\int \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x^2}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan x^2 + C$

f) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(e^{3x}+5)}{e^{3x}+5} = \frac{1}{3}\ln(e^{3x}+5) + C$

g) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 3}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sqrt{\sin^2 x + 3}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+3}} = \int \frac{\mathrm{d}\frac{t}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} =$

$\ln\frac{t+\sqrt{3+t^2}}{\sqrt{3}} + C = \ln(t+\sqrt{3+t^2}) + D = \ln(\sin x + \sqrt{3+\sin^2 x}) + D$

h) $\int \mathrm{e}^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x =$

$\int \mathrm{e}^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) = \mathrm{e}^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1} + C$

i) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \tan^3 x \,\mathrm{d}\tan x = \frac{1}{4}\tan^4 x + C$

oder $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x = -\int \frac{(1-\cos^2 x)\mathrm{d}\cos x}{\cos^5 x} = -\int (\cos^{-5} x - \cos^{-3} x)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{2\cos^2 x} + D = \frac{1-2\cos^2 x}{4\cos^4 x} + D$

$\left(= \frac{1-2\cos^2 x + \cos^4 x}{4\cos^4 x} + C = \frac{\sin^4 x}{4\cos^4 x} + C = \frac{1}{4}\tan^4 x + C\right)$

Aufgabe 10.8

a) $\int x\sin x\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x + C$

b) $\displaystyle\int x^2\cos x\mathrm{d}x = x^2\sin x - 2\int x\sin x\mathrm{d}x = x^2\sin x - 2\sin x + 2x\cos x + C$

c) $\displaystyle\int \arctan x\mathrm{d}x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} =$
$\displaystyle x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

d) $\displaystyle\int\limits_1^e x^2\ln x\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\ln x\right|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{3}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right|_1^e = \frac{1}{9}(2e^3+1)$

Aufgabe 10.9

$\displaystyle\int e^x\cos x\mathrm{d}x = e^x\cos x + \int e^x\sin x\mathrm{d}x = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\mathrm{d}x$

$\displaystyle\Longrightarrow \quad \int e^x\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$

Aufgabe 10.10

$\displaystyle\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x = -\sin^3 x\,\cos x + 3\int\sin^2 x\,\cos^2 x\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle-\sin^3 x\,\cos x + 3\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x - 3\int\sin^4 x\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle\Longrightarrow \quad \int\sin^4 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\sin^3 x\,\cos x + \frac{3}{4}\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x,$
$\displaystyle\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\sin x\,\cos x + \int\cos^2 x\,\mathrm{d}x = -\sin x\,\cos x + \int\mathrm{d}x - \int\sin^2\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle\Longrightarrow \quad \int\sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin x\,\cos x + \frac{1}{2}\int\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin x\,\cos x + \frac{1}{2}x + \tilde{C},$
$\displaystyle\int\sin^4 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\sin^3 x\,\cos x + \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{2}\sin x\,\cos x + \frac{1}{2}x + \tilde{C}\right] =$
$\displaystyle\frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\sin x\,\cos x - \frac{1}{4}\sin^3 x\,\cos x + C$

Aufgabe 10.13

a) $\displaystyle(2x^3 - x^2 - 10x + 19) : (x^2 + x - 6) = 2x - 3 + \frac{5x+1}{x^2+x-6},$
$x^2 + x - 6 = 0$ für $x_1 = 2,\ x_2 = -3,$
$\displaystyle\frac{2x^3 - x^2 - 10x + 19}{x^2+x-6} = 2x - 3 + \frac{5x+1}{x^2+x-6} = 2x - 3 + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3},$
$5x+1 = A(x+3) + B(x-2) = (A+B)x + (3A-2B),\quad A+B = 5,\quad 3A-2B = 1,$
$\displaystyle A = \frac{11}{5},\quad B = \frac{14}{5},$

$$\int \frac{2x^3 - x^2 - 10x + 19}{x^2 + x - 6}\mathrm{d}x = \int (2x-3)\mathrm{d}x + \frac{11}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} + \frac{14}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3} =$$
$$x^2 - 3x + \frac{11}{5}\ln|x-2| + \frac{14}{5}\ln|x+3| + C$$

b) $$\int \frac{9x^2 - 2x - 8}{x^3 - 4x}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$2\ln|x| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2| + \ln C = \ln(Cx^2|x-2|^3(x+2)^4)$$

c) $$\int \frac{3x^2 + 7x + 1}{x^3 + 2x^2 + x}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$\ln|x| + 2\ln|x+1| - 3\frac{1}{x+1} + \ln C = \ln(C|x|(x+1)^2) - 3\frac{1}{x+1}$$

d) $$\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 27x + 12}{x^2 + 2x + 10}\mathrm{d}x = \int \left(2x + 1 + \frac{5x+2}{x^2 + 2x + 10}\right)\mathrm{d}x =$$
$$\int (2x+1)\mathrm{d}x + \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2 + 2x + 10)}{x^2 + 2x + 10} - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 10} =$$
$$\int (2x+1)\mathrm{d}x + \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2 + 2x + 10)}{x^2 + 2x + 10} - \frac{3}{3}\int \frac{\mathrm{d}\frac{x+1}{3}}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 1} =$$
$$x^2 + x + \frac{5}{2}\ln(x^2 + 2x + 10) - \arctan\frac{x+1}{3} + C$$

e) $$(x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 13x - 10) : (x^3 - 5x^2) = x + \frac{7x^2 - 13x - 10}{x^3 - 5x^2} = x + \frac{7x^2 - 13x - 10}{x^2(x-5)},$$
$$\frac{7x^2 - 13x - 10}{x^2(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-5},$$
$$7x^2 - 13x - 10 = Ax(x-5) + B(x-5) + Cx^2 = (A+C)x^2 + (-5A+B)x - 5B,$$
$$-5B = -10 \Rightarrow B = 2, \quad -5A+B = -13 \Rightarrow A = 3, \quad A+C = 7 \Rightarrow C = 4,$$
$$\int \frac{x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 13x - 10}{x^3 - 5x^2}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x + 3\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x-5} =$$
$$\frac{x^2}{2} + 3\ln|x| - \frac{2}{x} + 4\ln|x-5| + D = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x} + \ln C(x-5)^4|x|^3$$

Aufgabe 10.14

a) $$t = e^{3x}, \int \frac{\mathrm{d}x}{e^{3x} + 5} = \int \frac{\frac{1}{3t}\mathrm{d}t}{t+5} = \frac{1}{15}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+5}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{15}\ln C\left(\frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5}\right)$$

b) $$t = \tan\frac{x}{2}, \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$$

c) $$t = \tan\frac{x}{2}, \int \frac{\mathrm{d}x}{8 - 4\sin x + 7\cos x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{8(1+t^2) - 4\cdot 2t + 7(1-t^2)} =$$

$$\int \frac{2\mathrm{d}t}{t^2-8t+15} = \int \left(\frac{\mathrm{d}t}{t-5} - \frac{\mathrm{d}t}{t-3} \right) = \ln C \left| \frac{\tan\frac{x}{2}-5}{\tan\frac{x}{2}-3} \right|$$

d) $t=\sqrt{1+x},\ x=t^2-1,\ \displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\mathrm{d}x = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t = 2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t =$

$$2\sqrt{1+x}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\right|+C$$

e) $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}},\ \mathrm{d}x=-\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t,\ \displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1-x)^2} = -\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$

f) $\displaystyle\int \sin 4x\sin 6x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 10x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{20}\sin 10x + C$

Aufgabe 10.15

a) $|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & 0\le x\le \pi \\ -\sin x, & -\pi<x<0,\ \pi<x<2\pi \end{cases},$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin x|\mathrm{d}x = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\sin x\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin x\mathrm{d}x = [\cos x]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}-[\cos x]_0^{\pi}+[\cos x]_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$=[1-\frac{1}{\sqrt{2}}]-[-1-1]+[-\frac{1}{\sqrt{2}}+1]=4-\frac{2}{\sqrt{2}}=4-\sqrt{2}$$

b) partielle Integration:

$$\int_0^{\pi} x\cos 3x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\sin 3x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin 3x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x\mathrm{d}x\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{9}-\frac{1}{9}=-\frac{2}{9}$$

c) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2},\quad x=A(x+2)+B(x+1)(x+2)+C(x+1)^2,$$

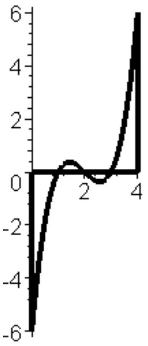
$B+C=0,\ A+3B+2C=1,\ 2A+2B+C=0,\quad A=-1,\ B=2,\ C=-2$

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}\mathrm{d}x = -\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}+2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+2}=$$

$$\frac{1}{x+1}+2\ln|x+1|-2\ln|x+2|\Big|_0^1 = \frac{1}{x+1}+\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\Big|_0^1=$$

$$\frac{1}{2}+\ln\frac{4}{9}-1-\ln\frac{1}{4}=\ln\frac{16}{9}-\frac{1}{2}\approx 0.0754$$

Aufgabe 10.16



$$\int_0^4 |(x-1)(x-2)(x-3)|\mathrm{d}x =$$

$$-\int_0^1 (x^3-6x^2+11x-6)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^3-6x^2+11x-6)\mathrm{d}x$$

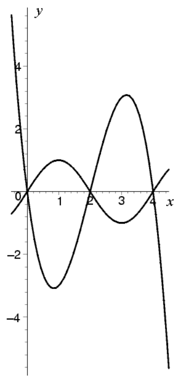
$$-\int_2^3 (x^3-6x^2+11x-6)\mathrm{d}x + \int_3^4 (x^3-6x^2+11x-6)\mathrm{d}x =$$

$$\left[\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x\right)\left(-\Big]_0^1 + \Big]_1^2 - \Big]_2^3 + \Big]_3^4\right) =$$

$$0 - 2(-\frac{9}{4}) + 2(-2) - 2(-\frac{9}{4}) + 0 = 5$$

Aufgabe 10.17

$\sin\dfrac{\pi}{2}x = 0$ gilt, falls $\dfrac{\pi}{2}x$ ganzzahliges Vielfaches von π ist, d.h. falls x eine gerade ganze Zahl ist.



$-x^3+6x^2-8x = -x(x^2-6x+8) = 0$ gilt für $x_1 = 0$,
$x_{2/3} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 2,\ 4.$

Somit hat die beschriebene Fläche die skizzierte Form, die Kurven schneiden sich für $x = 0$, 2 und 4.

$$\int_0^2 \sin\frac{\pi}{2}x\mathrm{d}x - \int_2^4 \sin\frac{\pi}{2}x\mathrm{d}x - \int_0^2 (-x^3+6x^2-8x)\mathrm{d}x + \int_2^4 (-x^3+6x^2-8x)\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^2 + \left[\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_2^4 - \left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-4x^2\right]_0^2 + \left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-4x^2\right]_2^4$$

$$= -\frac{2}{\pi}(-1-1) + \frac{2}{\pi}(1+1) - (-4-0) + (0+4) = \frac{8}{\pi} + 8 \approx \underline{\underline{10.55}}$$

Aufgabe 10.19

a) $\alpha \neq -1: \displaystyle\int_0^1 x^\alpha \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_\varepsilon^1 = \begin{cases} 1/(\alpha+1) & \alpha > -1 \\ \infty & \alpha < -1 \end{cases}$

$\alpha = -1: \displaystyle\int_0^1 x^{-1}\mathrm{d}x = [\ln x]_0^1 = \infty$

b) $\alpha \neq -1$: $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^\infty = \begin{cases} \infty & \alpha > -1 \\ -1/(\alpha+1) & \alpha < -1 \end{cases}$, $\alpha = -1$: $\displaystyle\int_1^\infty x^{-1}\mathrm{d}x = \infty$

c) $\displaystyle\int_2^{11} \frac{1}{\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x-2}\right]_2^{11} = 6$

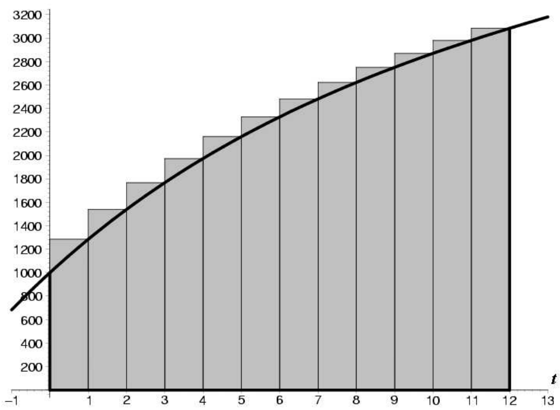
d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = [\arctan x]_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{2}$

e) $\displaystyle\int_0^\infty 2xe^{-2x}\mathrm{d}x = \left[-xe^{-2x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-2x}\mathrm{d}x = \left[-(x+\frac{1}{2})e^{-2x}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$

Aufgabe 10.26

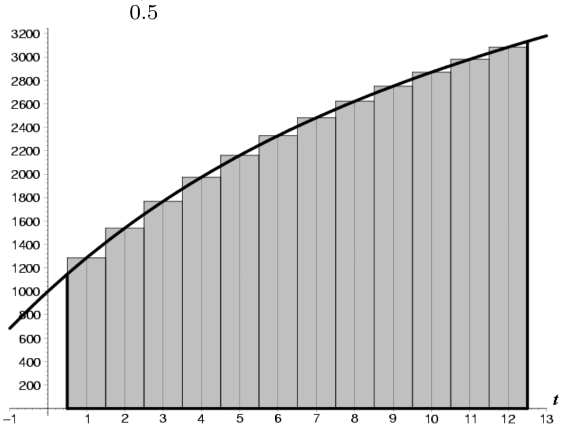
b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{12} K(m) = 27834.94,$

$\displaystyle\int_0^{12} K(t)\,\mathrm{d}t = 26810.14$



c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{12} K(m) = 27834.94,$

$\displaystyle\int_{0.5}^{12.5} K(t)\,\mathrm{d}t = 27827.16$



Aufgabe 10.27

a) $$\int\big(6\sin(4-3x)+3\mathrm{e}^{-2x}+5\big)\,\mathrm{d}x = -\frac{6}{3}\int\sin(4-3x)\,\mathrm{d}(4-3x) - \frac{3}{2}\int\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(-2x) + 5\int\mathrm{d}x$$
$$= 2\cos(4-3x) - \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} + 5x + C$$

b) $$\int \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x}+x^8}\,(\mathrm{e}^{2x}+4x^7)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x}+x^8}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}+x^8) = \frac{3}{8}(\mathrm{e}^{2x}+x^8)^{\frac{4}{3}} + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+49} = \frac{1}{49}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{7}\right)^2+1} = \frac{7}{49}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{7}\right)}{\left(\frac{x}{7}\right)^2+1} = \frac{1}{7}\arctan\frac{x}{7}+C$

d) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+50} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+49} = \frac{1}{49}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+1}{7}\right)^2+1} = \frac{7}{49}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{7}\right)}{\left(\frac{x+1}{7}\right)^2+1}$$
$$= \frac{1}{6}\arctan\frac{x+1}{7}+C$$

e) partielle Integration:
$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x\cos 3x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^x \sin 3x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^x\sin 3x - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^x\cos 3x\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^x\sin 3x + \frac{1}{9}\mathrm{e}^x\cos 3x - \frac{1}{9}\int \mathrm{e}^x\cos 3x\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$
$$\frac{10}{9}\int \mathrm{e}^x\cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^x\sin 3x + \frac{1}{9}\mathrm{e}^x\cos 3x + \widetilde{C},$$
$$\int \mathrm{e}^x\cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\mathrm{e}^x\left(3\sin 3x+\cos 3x\right)+C$$

Aufgabe 10.28

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$

b) $$\int_{-4}^{7} x|x|\,\mathrm{d}x = \int_{-4}^{0} x|x|\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{7} x|x|\,\mathrm{d}x = \int_{-4}^{0}(-x^2)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{7}x^2\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{7}$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{7} = 0-\frac{64}{3}+\frac{343}{3}-0 = 93$$

c) $\displaystyle\int_{2}^{4\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_{2}^{4\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}(3x^2+4)}{\sqrt{3x^2+4}} = \frac{2}{6}\sqrt{3x^2+4}\Big|_{2}^{4\sqrt{2}} = \frac{1}{3}(10-4) = 2$

Aufgabe 10.29

a) $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 2}\int_{\varepsilon}^{3}\frac{1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 2}\left[2\sqrt{x-2}\right]_{\varepsilon}^{3} = 2-\lim_{\varepsilon\to 2}2\sqrt{x-2} = 2$

b) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\int_3^A \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\left[2\sqrt{x-2}\right]_3^A = \lim_{A\to\infty} 2\sqrt{x-2}-2 = \infty$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\int_0^A \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\sin x|_0^A = \lim_{A\to\infty}\sin A$ divergiert unbestimmt, uneigentliches Integral existiert nicht (auch nicht im Sinne von $\pm\infty$)

d) $$\int_{-\infty}^2 \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty}\int_A^2 \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty}\frac{1}{4}\int_A^2 \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \lim_{A\to-\infty}\frac{2}{4}\int_A^2 \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_A^2 = \frac{1}{2}\left(\arctan 1 - \lim_{A\to-\infty}\arctan\frac{A}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arctan 1-\arctan(-\infty)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{2})\right) = \frac{3\pi}{8}$$

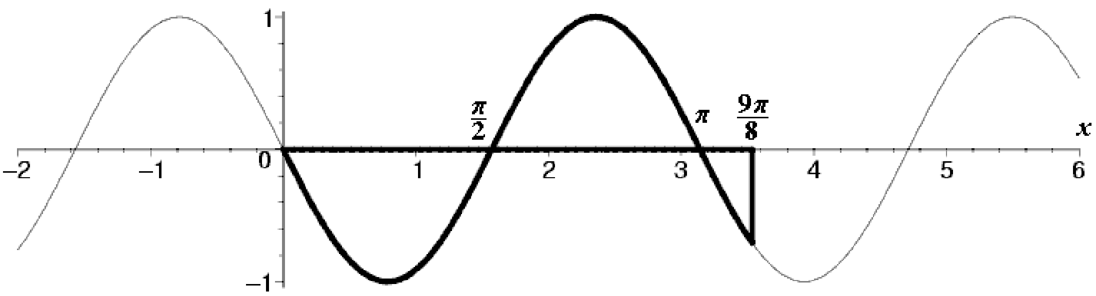
e) $$\int_{-\infty}^0 x\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x\mathrm{e}^{3x}\right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{9}\mathrm{e}^{3x}\Big|_{-\infty}^0$$

$$= -\frac{1}{9} - \lim_{A\to-\infty}\left(\frac{1}{3}A\mathrm{e}^{3A}-\frac{1}{9}\mathrm{e}^{3A}\right) = -\frac{1}{9},$$

da $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\mathrm{e}^{3A}=0$ und nach der l'Hospitalschen Regel auch

$\displaystyle\lim_{A\to-\infty}A\mathrm{e}^{3A} = \lim_{A\to-\infty}\frac{A}{\mathrm{e}^{-3A}} = \lim_{A\to-\infty}\frac{1}{-3\mathrm{e}^{-3A}} = -\frac{1}{3}\lim_{A\to-\infty}\mathrm{e}^{3A} = 0$ gilt

Aufgabe 10.30



$$A = \int_0^{\frac{9\pi}{8}} |\sin(2x+\pi)|\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x+\pi)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(2x+\pi)\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{\frac{9\pi}{8}}\sin(2x+\pi)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(2x+\pi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left[\cos(2x+\pi)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\cos(2x+\pi)\right]_{\pi}^{\frac{9\pi}{8}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos 2\pi - \cos\pi - \cos 3\pi + \cos 2\pi + \cos\frac{13\pi}{4} - \cos 3\pi\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-(-1)-(-1)+1+(-\frac{1}{\sqrt{2}})-(-1)\right) = \frac{5\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \approx \underline{\underline{2.14645}}$$

Aufgabe 10.31

Der Integrand $\frac{1}{x^4}$ hat an der Stelle $x=0$ einen Pol 4. Grades.

$$\int_{-1}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{x^4} = \int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^4} + \int_{0}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{x^4} = \lim_{\varepsilon\to -0}\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{-1}^{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to +0}\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{\varepsilon}^{3} = \infty - \frac{1}{3} - \frac{1}{81} - (-\infty) = \infty$$

19.11 Kurven im Raum, Kurvenintegrale

Aufgabe 11.2

a) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\ \ \mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} =$$
$$\left[\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\frac{1+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{8}} = 0.88137$$

b) $$\int_0^2 |\dot{\mathbf{x}}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^2\sqrt{e^{2t}[(\cos t-\sin t)^2+(\cos t+\sin t)^2+1]}\,\mathrm{d}t =$$
$$\sqrt{3}\int_0^2 e^t\mathrm{d}t = \sqrt{3}(e^2-1) = 11.066$$

Aufgabe 11.4

Tangente $\mathbf{x}(1)+u\dot{\mathbf{x}}(1) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}\begin{pmatrix}1\\2t\\3t^2\end{pmatrix},\quad \dot{\mathbf{T}}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}^3}\begin{pmatrix}-4t-18t^3\\2-18t^4\\6t+12t^3\end{pmatrix},$$

d.h. für $t=1$ ergeben sich als nicht normierter Tangenten-, Normalen- und Binormalenvektor

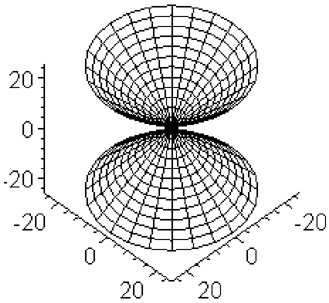
$\mathbf{t}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{n}=\begin{pmatrix}11\\8\\-9\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}=\begin{pmatrix}-42\\42\\-14\end{pmatrix}\hat{=}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$, Schmiegebene: $3x-3y+z=1$
Normalebene: $x+2y+3z=6$
rektif. Ebene: $11x+8y-9z=10$

Aufgabe 11.5

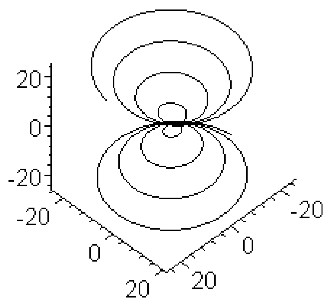
siehe Folie Abbildung 20.6

Aufgabe 11.8

siehe auch Folie Abbildung 20.8



a) Schnitt mit y-z-Ebene $x=0$: $z=\pm y$, d.h. zwei Geraden,
Schnitt mit x-z-Ebene $y=0$: $z=\pm x$, d.h. zwei Geraden,
Schnitt mit x-y-Ebene $z=0$: $x=y=z=0$, d.h. nur Koordinatenursprung,
Schnitt mit Ebene $z=a$: $x^2+y^2=a^2$, d.h. Kreis mit Radius $|a|$. Es handelt sich um einen Doppelkegel.



b) Es gilt $x^2+y^2=t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)=t^2=z^2$, d.h., die Kurve läuft auf dem Doppelkegel. Außerdem wächst die z-Komponente bei jeder Umdrehung. Also handelt es sich um eine konische Schraubenlinie.

c) $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}t\cos t\\t\sin t\\t\end{pmatrix}$, $\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}\cos t-t\sin t\\\sin t+t\cos t\\1\end{pmatrix}$,

$$|\dot{\vec{x}}(t)|=\sqrt{\cos^2 t+t^2\sin^2 t-2t\cos t\sin t+\sin^2 t+t^2\cos^2 t+2t\sin t\cos t+1}$$
$$=\sqrt{2+t^2},$$

Tangenteneinheitsvektor $\vec{T}(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2+t^2}}\begin{pmatrix}\cos t-t\sin t\\\sin t+t\cos t\\1\end{pmatrix}$,

Hauptnormalenrichtung

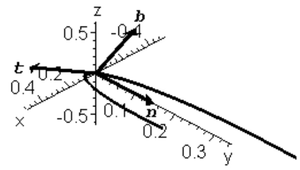
$$\dot{\vec{T}}(t)=\frac{1}{2+t^2}\begin{pmatrix}(-2\sin t-t\cos t)\sqrt{2+t^2}-(\cos t-t\sin t)\frac{t}{\sqrt{2+t^2}}\\(2\cos t-t\sin t)\sqrt{2+t^2}-(\sin t+t\cos t)\frac{t}{\sqrt{2+t^2}}\\-\frac{t}{\sqrt{2+t^2}}\end{pmatrix}.$$

Für $t=0$: $\vec{T}(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \dot{\vec{T}}(0)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$.

Also ist das begleitende Dreibein im Koordinatenursprung

$\vec{T}(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{N}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

$\vec{B}(0)=\vec{T}(0)\times\vec{N}(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.



In der Abbildung ist das begleitende Dreibein durch nichtnormierte Vektoren dargestellt.

$\kappa(0)=\frac{|\dot{\vec{T}}(0)|}{|\dot{\vec{x}}(0)|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ **oder**

Berechnung durch $\kappa(0)=\frac{\left|\dot{\vec{x}}(0)\times\ddot{\vec{x}}(0)\right|}{\left|\dot{\vec{x}}(0)\right|^3}=\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right|^3}=\frac{\left|\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2}^3}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}^3}=1$,

Krümmungsradius $\rho(0)=\frac{1}{\kappa(0)}=1$

Aufgabe 11.9

a) Die Kurve liegt in der x–y–Ebene. Die Funktion $x(t)=t-\sin t$ wächst wegen $x'(t)=1-\cos t\geq 0$ monoton von $-\infty$ nach $+\infty$, sie ist sogar überall streng monoton wachsend, da die Ableitung nur an isolierten Stellen gleich 0 wird. Weiterhin ist wegen $-1\leq\cos t\leq 1$ das Intervall $[0,2]$ Wertebereich von $y(t)$. Also kann die Kurve in der x–y–Ebene als Funktion $y(x)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und Wertebereich $[0,2]$ dargestellt werden.

Betrachtung der Funktion $y(x)$:

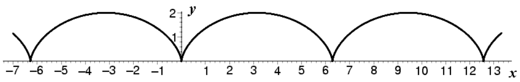
Nullstellen: $y(t)=1-\cos t=0 \Leftrightarrow t=2l\pi,\ l$ ganz $\Leftrightarrow x=2l\pi,\ l$ ganz

$y'(x)=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$. Da der Nenner nichtnegativ ist, hat $y'(x)$ das gleiche Vorzeichen wie $\sin t$. $y'(x)=0$ kann nur für $t=k\pi$ gelten. Für $k=2l+1$ ist der Nenner gleich 2, so dass eine Nullstelle vorliegt, für $k=2l$ hingegen gilt nach der l'Hospitalschen Regel $\lim\limits_{t\to k\pi\pm 0}\frac{\sin t}{1-\cos t}=\lim\limits_{t\to k\pi\pm 0}\frac{\cos t}{\sin t}=\pm\infty$, d.h., die Funktion $y(x)$ hat in ihren Nullstellen $x=2l\pi$ einen Knick mit senkrechter Tangente. In den übrigen Punkten gilt

$$y'(x)\begin{cases} >0, & 2l\pi<x<(2l+1)\pi \quad \text{monoton wachsend}\\ =0, & x=(2l+1)\pi \quad \Rightarrow \text{Maximum } y(x)=2\\ <0, & (2l+1)\pi<x<(2l+2)\pi \quad \text{monoton fallend}\end{cases}$$

$$y''(x) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} = \frac{(1 \cos t)\cos t - \sin^2 t}{(1-\cos t)^3} = \frac{\cos t - 1}{(1-\cos t)^3} = -\frac{1}{(1-\cos t)^2} < 0$$

$\Longrightarrow$ überall konkav.



Die Kurve wird als Zykloide bezeichnet.

b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin^2 \frac{t}{2} \\ 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 2\sin\frac{t}{2}\begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

$|\dot{\vec{x}}(t)| = 2|\sin\frac{t}{2}|\sqrt{\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}} = 2|\sin\frac{t}{2}| = 2\sin\frac{t}{2}$ wegen $0 \le \frac{t}{2} \le \pi$, also

Tangenteneinheitsvektor $\vec{T}(t) = \dfrac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

Hauptnormalenrichtung $\dot{\vec{T}}(t) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\dot{\vec{T}}(t)| = \frac{1}{2}$,

Hauptnormaleneinheitsvektor $\vec{N}(t) = \dfrac{\dot{\vec{T}}(t)}{|\dot{\vec{T}}(t)|} = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

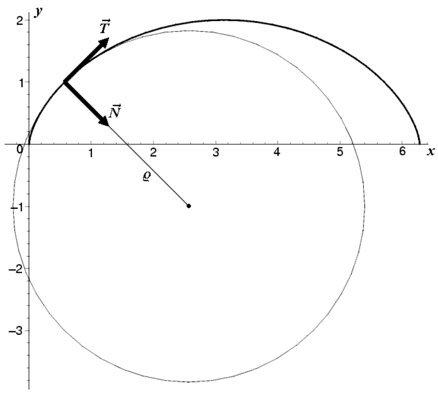
Binormaleneinheitsvektor $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(Das ist ohnehin offensichtlich, da die Kurve in der x–y–Ebene verläuft.)

Begleitendes Dreibein:

$\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\} =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$



c) Krümmungsradius $\varrho = \dfrac{|\dot{\vec{x}}(t)|}{|\dot{\vec{T}}(t)|} = \dfrac{2\sin\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{4\sin\frac{t}{2}}}$

d) Bogenlänge $s = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 4\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}\frac{t}{2} = -4\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi} = -4(-1-1) = \underline{\underline{8}}$$

e) $x(0) = 0,\ x(2\pi) = 2\pi,$

$$A = \int\limits_{x=0}^{x=2\pi} y\,\mathrm{d}x = \int\limits_{t=0}^{t=2\pi} y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} y\dot{x}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t$$

$$= t - 2\sin t + \frac{t + \sin t\cos t}{2}\bigg|_0^{2\pi} = 2\pi + \frac{2\pi}{2} = \underline{\underline{3\pi}}$$

Aufgabe 11.11

a) $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin t \\ 2-\sqrt{2}\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$, $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ -\sqrt{2}\cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}$, $\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\| = \sqrt{2\cos^2 t + 2\cos^2 t + 4\sin^2 t} =$
2,

Tangenteneinheitsvektor $\boldsymbol{T}(t) = \dfrac{\dot{\boldsymbol{x}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$,

$\dot{\boldsymbol{T}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$, $\|\dot{\boldsymbol{T}}(t)\| = \sqrt{\dfrac{1}{2}\sin^2 t + \dfrac{1}{2}\sin^2 t + \cos^2 t} = 1,$

Hauptnormaleneinheitsvektor $\boldsymbol{N}(t) = \dfrac{\dot{\boldsymbol{T}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{T}}(t)\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$,

Binormaleneinheitsvektor $\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T}(t) \times \boldsymbol{N}(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t & -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t & -\sin t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t & -\cos t \end{vmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2 t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2 t \\ \frac{1}{2}\cos t\sin t - \frac{1}{2}\sin t\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

begleitendes Dreibein $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

b) Schmiegebene: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin t \\ 2-\sqrt{2}\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \right) = 0,$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x - \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \sqrt{2} + \sin t = 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = \sqrt{2},\ \underline{\underline{x+y=2}},$$

Krümmung: $\kappa(t) = \frac{\|\dot{\boldsymbol{T}}(t)\|}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$, Krümmungsradius: $\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = \underline{\underline{2}}$,

Krümmungsmittelpunkt: $\boldsymbol{x}(t) + \rho(t)\boldsymbol{N}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin t \\ 2-\sqrt{2}\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} =$

$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}}$

c) Da der Krümmungsradius konstant ist und zu jedem Kurvenpunkt derselbe Krümmungsmittelpunkt gehört, ergibt sich für jeden Kurvenpunkt derselbe Krümmungskreis. Die Kurve $\boldsymbol{x}(t)$ fällt also mit ihrem Krümmungskreis zusammen. Es handelt sich um den Kreis mit Radius 2 um den Punkt $(0,2,0)$ in der Schmiegebene $x+y=2$.

Aufgabe 11.12

a) $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 6t^2 \\ 24t \end{pmatrix},\ \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 12t \\ 24 \end{pmatrix},$

$$\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\| = \sqrt{9t^4 + 144t^2 + 576} = \sqrt{9(t^4 + 16t^2 + 64)} = \sqrt{9(t^2+8)^2} = 3(t^2+8),$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix},\ l = \int_0^1 \|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 3(t^2+8)\,\mathrm{d}t = t^3 + 24t\Big|_0^1 = \underline{\underline{25}}$$

b) $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Tangentenrichtung: $\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$, normiert $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Tangente $\underline{\underline{\boldsymbol{X}(t) = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$, d.h. die z–Achse

c) Tangenteneinheitsvektor: $\boldsymbol{T}(t) = \dfrac{\dot{\boldsymbol{x}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|} = \dfrac{1}{t^2+8}\begin{pmatrix} t^2 \\ 4t \\ 8 \end{pmatrix}$,

Hauptnormalenrichtung: $\dot{\boldsymbol{T}}(t) = \dfrac{1}{(t^2+8)^2}\begin{pmatrix} 2t(t^2+8) - 2t\cdot t^2 \\ 4(t^2+8) - 4t\cdot 2t \\ -8\cdot 2t \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{T}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dot{\boldsymbol{T}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{N}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Binormaleneinheitsvektor (Stellungsvektor der Schmiegebene):

$$\boldsymbol{B}(0) = \boldsymbol{T}(0) \times \boldsymbol{N}(0) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Schmiegebene also $\underline{\underline{x = 0}}$ (y–z–Ebene)

d) Krümmung: $\kappa(0) = \dfrac{\|\dot{\boldsymbol{T}}(0)\|}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(0)\|} = \dfrac{1/2}{24} = \dfrac{1}{48}$, Krümmungsradius: $\rho(0) = \dfrac{1}{\kappa(0)} = 48$,

Krümmungsmittelpunkt: $\boldsymbol{x}(0) + \rho(0)\boldsymbol{N}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 48\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beim Krümmungskreis handelt es sich also um den Kreis mit dem Radius 48 um den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der Ebene $x = 0$, d.h. den Kreis $\underline{\underline{\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 48+48\cos t \\ 48\sin t \end{pmatrix}, \ -\pi \le t < \pi}}$

bzw. $\underline{\underline{x = 0,\ (y-48)^2 + z^2 = 48^2}}$.

Aufgabe 11.14

Parameterdarstellung des Einheitskreises: $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ 0 \le t < 2\pi$,

Bogendifferential: $\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t$,

Masse = Dichte (in Masseneinheit pro Längeneinheit) mal Länge, bei variabler Dichte

also $m = \displaystyle\int_K \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_K (1+y^2)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (1+\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$

Für die Auswertung des Integrals $\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t$ gibt es mehrere Möglichkeiten:

Verwendung der Formel $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t \implies \sin^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ und anschließende Integration

oder partielle Integration
$$\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = -\cos t \sin t + \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = -\cos t\sin t + \int (1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\cos t\sin t + t - \int \sin^2\,\mathrm{d}t \implies \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{t - \sin t\cos t}{2}$$

oder Benutzung einer Formelsammlung, die z.B. die Formel $\displaystyle\int \sin^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$ enthält.

$$m = \int_0^{2\pi} (1+\sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) \mathrm{d}t = \frac{3}{2}t + \frac{\sin 2t}{4}\bigg|_0^{2\pi} = \underline{\underline{3\pi}}$$

19.12 Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

Aufgabe 12.3

a) $f_{x_1} = \dfrac{-2x_1}{2\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} = -\dfrac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}$,

$$f_{x_1x_1} = -\frac{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2} + x_1\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}}{1-x_1^2-x_2^2} = -\frac{1-x_2^2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}^3},$$

$$f_{x_1x_2} = \frac{x_1\left(-\frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}\right)}{1-x_1^2-x_2^2} = -\frac{x_1x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}^3},$$

andere Ableitungen analog, also

$$\nabla f = -\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\quad H_f = -\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}^3}\begin{pmatrix} 1-x_2^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & 1-x_1^2 \end{pmatrix}$$

b) $\nabla f = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cos(ax+by),\ H_f = -\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}\sin(ax+by),$

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x_1 - (2+x_1)x_1x_2e^{x_1} \\ \ln x_3 - x_1^2e^{x_1} \\ \frac{x_2}{x_3} \end{pmatrix},$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2-(2x_2+4x_1x_2+x_1^2x_2)e^{x_1} & -(2+x_1)x_1e^{x_1} & 0 \\ -(2+x_1)x_1e^{x_1} & 0 & \frac{1}{x_3} \\ 0 & \frac{1}{x_3} & -\frac{x_2}{x_3^2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12.4

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2+1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(-1,1,2) = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy^2z & 6x^2yz & 3x^2y^2 \\ 6x^2yz & 2x^3z & 2x^3y \\ 3x^2y^2 & 2x^3y & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_f(-1,1,2) = \begin{pmatrix} -12 & 12 & 3 \\ 12 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12.7

$$\nabla f(x,y) = -\frac{16}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{normierter Richtungsvektor: } \mathbf{r} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung: $\partial_{\mathbf{r}}(\sqrt{3},1) = \nabla f(\sqrt{3},1)\cdot\mathbf{r} = 0$

Aufgabe 12.8

normierter Richtungsvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix}$,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\vec{a} = \frac{1}{2}(2\sqrt{3}xy^3+3x^2y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(1,-2) = \tfrac{1}{2}(-16\sqrt{3}+12) = 6-8\sqrt{3}$$

Aufgabe 12.13

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = (\cos\xi+2\xi\eta)2x+\xi^2y = 2x\cos(x^2+y^2)+(x^2+y^2)(5x^2+y^2)y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = (\cos\xi+2\xi\eta)2y+\xi^2x = 2y\cos(x^2+y^2)+(x^2+y^2)(x^2+5y^2)x$$

Aufgabe 12.15

siehe Folie Abbildung 20.9

Aufgabe 12.16

$$\nabla z = \begin{pmatrix} -\frac{\sin x}{\cos y} \\ \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y} \end{pmatrix}, \quad H_z = \begin{pmatrix} -\frac{\cos x}{\cos y} & -\frac{\sin x \sin y}{\cos^2 y} \\ -\frac{\sin x \sin y}{\cos^2 y} & \frac{\cos x(1+\sin^2 y)}{\cos^3 y} \end{pmatrix},$$

$$z(x,y) = z(0,0)+(x\ \ y)\nabla z(0,0)+\frac{1}{2}(x\ \ y)H_z(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\ldots = 1+\frac{1}{2}(-x^2+y^2)+\ldots,$$

Tangentialebene: $z = 1$

Aufgabe 12.17

$\nabla z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{y/x}\\ \sqrt{x/y}\end{pmatrix}$. Damit ergibt sich als Tangentialebene

$z = 6 + (x-3 \quad y-12)\,\nabla z(3,12) = 6 + (x-3) + \frac{1}{4}(y-12)$, d.h. $4x+y-4z = 0$.

Aufgabe 12.18

a) $\nabla f = -\frac{1}{2\sqrt{1-x-y}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $H_f = -\frac{1}{4\sqrt{1-x-y}^3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,

$f(0,0) = 1$, $\nabla f(0,0) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $H_f(0,0) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,

$$P_2(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$= 1 - \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{8}(x^2+2xy+y^2) = 1 - \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{8}(x+y)^2$$

b) $z = P_1(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x+y)$, d.h. $x+y+2z = 2$

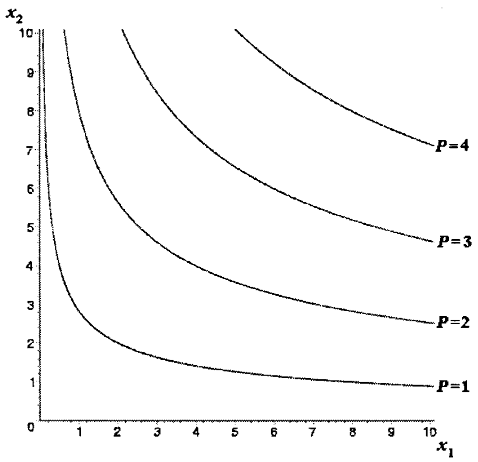
c) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}t\\ t\\ \sqrt{1-2t}\end{pmatrix}$, Tangentenrichtung: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1/\sqrt{1-2t}\end{pmatrix}$,

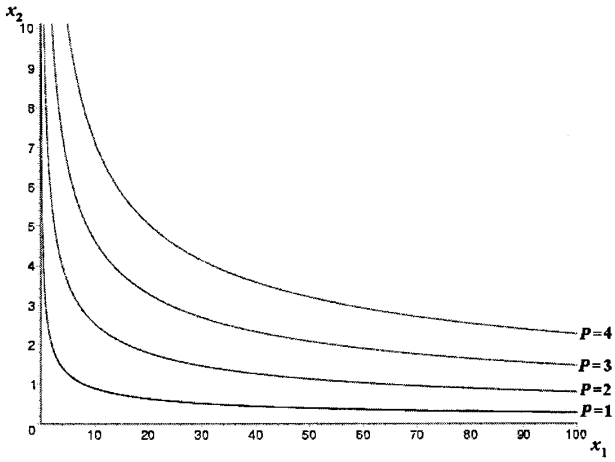
Tangente: $\vec{X}(v) = \vec{x}(0) + v\,\dot{\vec{x}}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

d) $x+y+2z = v+v+2(1-v) = 2$

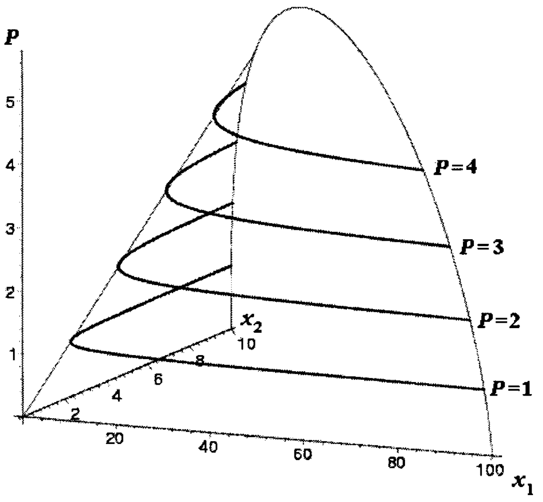
Aufgabe 12.21

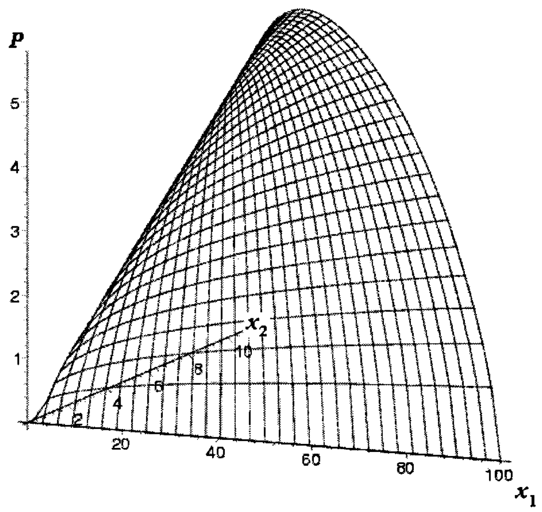
e) Niveaulinien





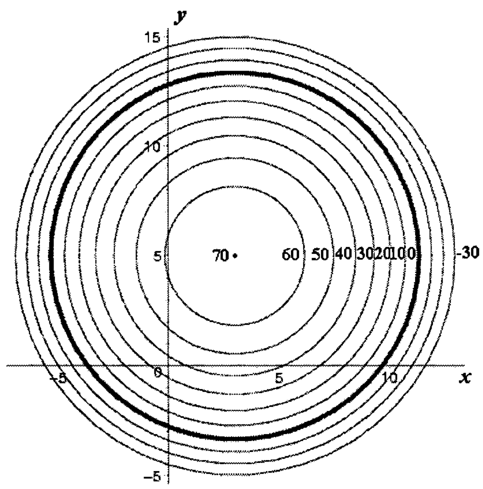
f) Funktionsgebirge

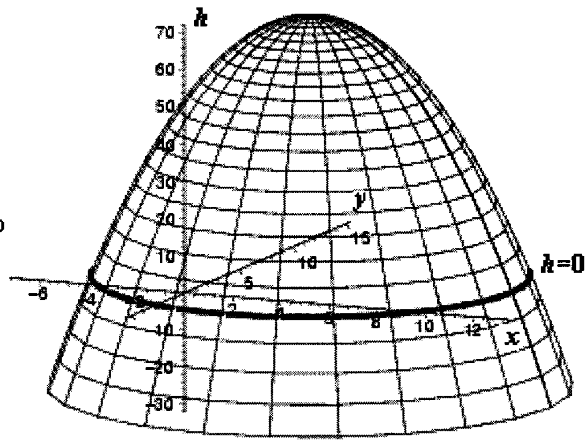




Aufgabe 12.22

$$h(x,y) = 36 + 6x - x^2 + 10y - y^2$$





Aufgabe 12.23

a) $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x - 6y = (x-1)^2 - 1 - (y+3)^2 + 9 = C, \quad (x-1)^2 - (y+3)^2 = C - 8,$

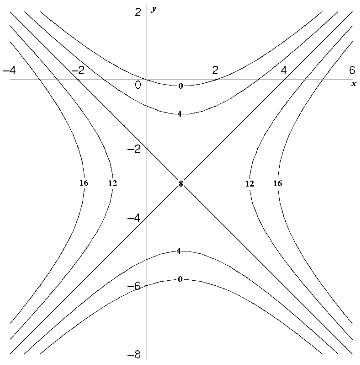
$$C > 8: \quad \frac{(x-1)^2}{\sqrt{C-8}^2} - \frac{(y+3)^2}{\sqrt{C-8}^2} = 1 \qquad \text{Hyperbel, Mittelpunkt } (1,-3)$$

$$C = 8: \quad (x-1)^2 = (y+3)^2, \; y+3 = \pm(x-1),$$

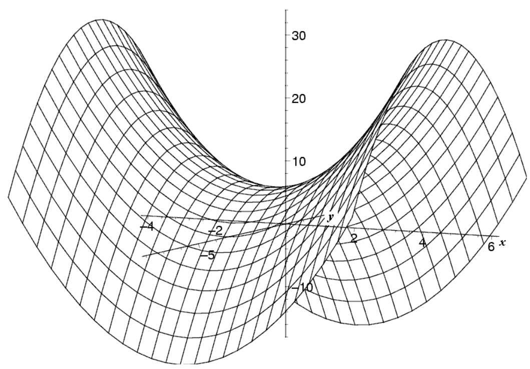
$$y = \begin{cases} x-4 \\ -x-2 \end{cases} \qquad \text{Paar sich schneidender Geraden}$$

$$C < 8: \quad \frac{(y+3)^2}{\sqrt{8-C}^2} - \frac{(x-1)^2}{\sqrt{8-C}^2} = 1 \qquad \text{Hyperbel, Mittelpunkt } (1,-3)$$

b)



Niveaulinienbild



Funktionsgebirge

c) Da sich für jedes jedes Niveau $C \in \mathbb{R}$ nichtleere Niveaulinien ergeben, ist $\mathbb{R}$ der Wertebereich der Funktion und die Funktion ist unbeschränkt.

Man kann sich davon auch dadurch überzeugen, dass man $f(x,0)$ und $f(0,y)$ betrachtet. Offensichtlich gilt nämlich $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,0) = \infty$ und $\lim\limits_{y\to\infty} f(0,y) = -\infty$, so dass $f(x,y)$ weder nach oben noch nach unten beschränkt ist.

Aufgabe 12.24

a) Die Funktion f ist definiert, wenn $x^2+y^2+z^2+10y = x^2+(y+5)^2-25+z^2 \neq 0$, also $x^2+(y+5)^2+z^2 \neq 5^2$ gilt. Also ist sie über dem $\mathbb{R}^3$ mit Ausnahme der Kugel mit Radius 5 um den Punkt $(0,-5,0)$ definiert:

$\mathrm{DB}(f) = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+(y+5)^2+z^2 = 5^2\}$.

Es gilt $x^2+y^2+z^2+10y = x^2+(y+5)^2-25+z^2 \geq -25$. Vom Nenner werden alle reellen Zahlen ≥ 25 mit Ausnahme der Zahl 0 angenommen. Daher ist eine Fallunterscheidung erforderlich:

$$x^2+y^2+z^2+10y > 0 \iff \frac{100}{x^2+y^2+z^2+10y} > 0$$

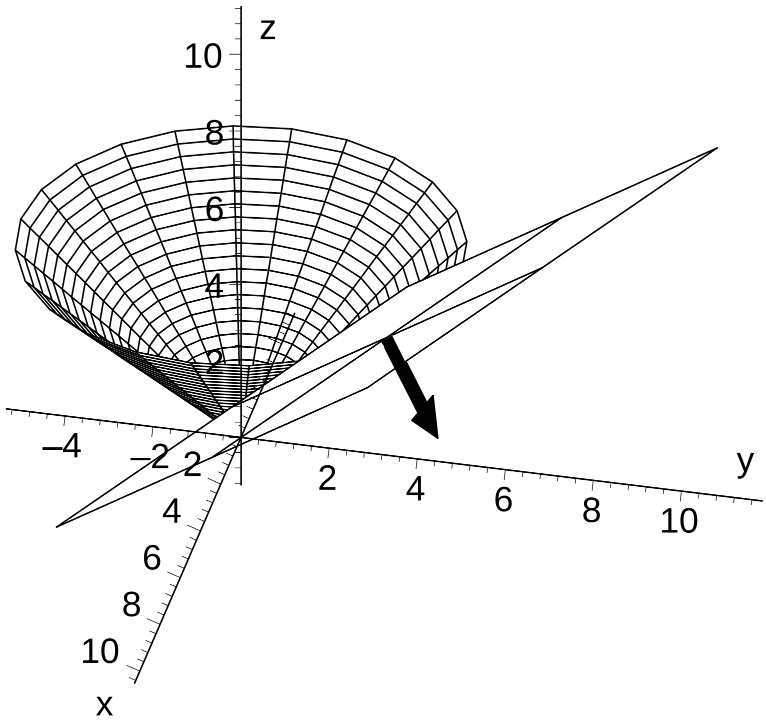
$$0 > x^2+y^2+z^2+10y > -25 \iff -\infty < \frac{100}{x^2+y^2+z^2+10y} < -4$$

Somit gilt $\mathrm{WB}(f) = (-\infty, -4] \cup (0, \infty)$.

b) $f(x,y,z) = \dfrac{100}{x^2+y^2+z^2+10y}, \quad x^2+y^2+z^2+10y = \dfrac{100}{C},$

$$x^2+(y+5)^2+z^2 = \frac{100}{C}+25 : \quad \begin{cases} -\infty < C < -4 : & \text{Kugel mit Radius } \sqrt{\frac{100}{C}+25} \text{ um } (0,-5,0) \\ C=-4 : & \text{Punkt } (0,-5,0) \\ -4 < C \leq 0 : & \text{leer} \\ 0 < C : & \text{Kugel mit Radius } \sqrt{\frac{100}{C}+25} \text{ um } (0,-5,0) \end{cases}$$

Aufgabe 12.26



Aufgabe 12.27

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{x^2y-4} + x\mathrm{e}^{x^2y-4}\,2xy + 2\dfrac{y^2}{xy^2} = (1+2x^2y)\mathrm{e}^{x^2y-4} + \dfrac{2}{x},$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3\mathrm{e}^{x^2y-4} + 2\dfrac{2xy}{xy^2} = x^3\mathrm{e}^{x^2y-4} + \dfrac{4}{y},$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = (1+8) + \dfrac{2}{2} = \underline{\underline{10}}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 8 + \dfrac{4}{1} = \underline{\underline{12}},$

$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}\cdot\nabla f = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\12\end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,2 = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

b) Der stärkste Anstieg erfolgt in Richtung des Gradienten, d.h. in Richtung $\begin{pmatrix}10\\12\end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$.
Da beide Komponenten positiv sind, liegt der Winkel im I. Quadranten und beträgt $\arctan\frac{6}{5} \approx \underline{\underline{50.19°}}$.

c) $\dfrac{\partial h}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial h}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$

$\dfrac{\partial x}{\partial u} = \mathrm{e}^u, \qquad \dfrac{\partial x}{\partial v} = 2\mathrm{e}^{2v}, \qquad \dfrac{\partial y}{\partial u} = \mathrm{e}^u\mathrm{e}^{2v}, \qquad \dfrac{\partial y}{\partial v} = 2\mathrm{e}^u\mathrm{e}^{2v},$

$\dfrac{\partial x}{\partial u}(0,0) = 1, \qquad \dfrac{\partial x}{\partial v}(0,0) = 2, \qquad \dfrac{\partial y}{\partial u}(0,0) = 1, \qquad \dfrac{\partial y}{\partial v}(0,0) = 2,$

$(x(0,0), y(0,0)) = (2,1), \; \dfrac{\partial h}{\partial u}(0,0) = 10\cdot 1 + 12\cdot 1 = \underline{\underline{22}}, \; \dfrac{\partial h}{\partial v}(0,0) = 10\cdot 2 + 12\cdot 2 = \underline{\underline{44}}$

19.13 Bestimmung lokaler Extremstellen

Aufgabe 13.1

siehe Folie Abbildung 20.10

Aufgabe 13.4

siehe Folie Abbildung 20.10

Aufgabe 13.5

$$\begin{array}{lcll} f_x = 4x^3 - 4x + 4y = 0 & \Longrightarrow & x^3 - x + y = 0 & \text{Durch Addition folgt} \\ f_y = 4y^3 + 4x - 4y = 0 & & y^3 + x - y = 0 & x^3 + y^3 = 0 \;\Rightarrow\; y^3 = -x^3 \;\Rightarrow\; y = -x \end{array}$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $x^3 - 2x = x(x^2-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pm\sqrt{2}$.
Stationäre Punkte: $(x_1,y_1) = (0,0)$, $(x_2,y_2) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(x_3,y_3) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

$H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$,

für (x_2,y_2): $\det H_f = 20\cdot 20 - 4\cdot 4 = 384 > 0 \Rightarrow$ Extremum, $f_{xx} = 20 > 0$
$\Rightarrow$ lok. Min. $f = -8$,

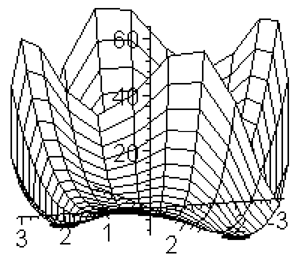
für (x_3,y_3): $\det H_f = 20\cdot 20 - 4\cdot 4 = 384 > 0 \Rightarrow$ Extremum, $f_{xx} = 20 > 0$
$\Rightarrow$ lok. Min. $f = -8$,

für (x_1,y_1): $\det H_f = (-4)\cdot(-4) - 4\cdot 4 = 0$, d.h. so nicht entscheidbar.

Nähert man sich dem Punkt $(x_1,y_1) = (0,0)$ mit $f(0,0) = 0$ längs der x–Achse $(y=0)$, so gilt $f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2-2) < 0$,
nähert man sich diesem Punkt hingegen längs der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten $(y = x)$, so gilt $f(x,x) = 2x^4 > 0$,
also liegen in der Umgebung von $(x_1,y_1) = (0,0)$ sowohl Punkte mit negativem als

auch Punkte mit positivem Funktionswert. Somit liegt an dieser Stelle kein lokales Extremum vor.

Für große x und/oder y dominieren die vierten Potenzen, so dass f positiv, aber nicht negativ beliebig groß werden kann. Da f damit nach unten beschränkt ist, sind die Punkte mit $f=-8$ globale Minima, denn sonst würde es ein weiteres lokales Minimum geben. Globales Maximum gibt es keines.



Aufgabe 13.6

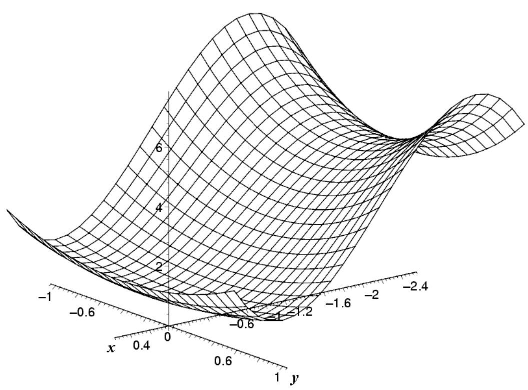
a) Hält man $y = 0$ fest, so gilt wegen $\cosh 0 = 1 \quad f(x,0) = x^3 + 3x^2 + 1$ mit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$, so dass $f(x,y)$ keine globalen Extrema haben kann.

b) $f_x = (3x^2 + 6x)\cosh y = x(3x + 6)\cosh y = 0, \quad f_y = (x^3 + 3x^2 + 1)\sinh y = 0$
Wegen $\cosh y \geq 1$ ist $f_x = 0$ äquivalent zu $x = 0$ oder $x = -2$. Da für diese beiden $x \quad x^3 + 3x^2 + 1 \neq 0$ gilt, muss wegen $f_y = 0 \quad \sinh y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ gelten. Also sind $(0,0)$ und $(-2,0)$ die einzigen stationären Punkte.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} (6x+6)\cosh y & (3x^2+6x)\sinh y \\ (3x^2+6x)\sinh y & (x^3+3x^2+1)\cosh y \end{pmatrix},$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \det H_f = 6 > 0 \Rightarrow \text{ Extr., } f_{xx} = 6 > 0 \Rightarrow f(0,0) = 1 \text{ lok. Min.,}$$

$$H_f(-2,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \ \det H_f = -30 < 0 \Rightarrow f(-2,0) = 5 \text{ ist Sattelpunkt}$$



c) $f(x,y) = f(0,0) + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \nabla f(0,0) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} H_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R_2(x,y) =$

$1 + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R_2(x,y) = 1 + 3x^2 + \frac{1}{2}y^2 + R_2(x,y)$

Aufgabe 13.7

a) Es gilt $f(x,y) = x - y + \ln y - \ln x$. Hält man z.B. y mit 1 fest, so gilt $f(x,1) = x - 1 - \ln x$ und $\lim\limits_{x\to 0} f(x,1) = +\infty$, hält man x mit 1 fest, so gilt $f(1,y) = 1 - y + \ln y$ und $\lim\limits_{y\to 0} f(1,y) = -\infty$. $f(x,y)$ ist also beidseitig unbeschränkt, so dass keine globalen Extrema existieren.

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{x} \\ -1 + \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt offensichtlich nur für $(x,y) = (1,1)$. Es gibt also nur diesen einzigen stationären Punkt.

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$, $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Wegen $\det H_f(1,1) = -1$ ist $f(1,1) = 0$ ein Sattelpunkt, lokale Extrema existieren nicht.

b) $f(\mathrm{e},1) = \mathrm{e} - 1 + \ln \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - 2, \ \nabla f(\mathrm{e},1) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \\ 0 \end{pmatrix}$

$z = \mathrm{e} - 2 + \begin{pmatrix} x - \mathrm{e} & y - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e} - 2 + (x - \mathrm{e})(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}) = (1 - \frac{1}{\mathrm{e}})x - 1$

Die Gleichung der Tangentialebene lautet also $(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}})x - z = 1$.

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \ \|\vec{a}\| = 1,$

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\mathrm{e},1) = \nabla f(\mathrm{e},1) \cdot \vec{a} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}) \approx 0.316$

d) Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ein beliebiger normierter Richtungsvektor, d.h. $\|\vec{a}\| = 1, \ {a_1}^2 + {a_2}^2 = 1$.
Dann gilt $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\mathrm{e},1) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}})$. Wegen ${a_1}^2 + {a_2}^2 = 1$ ist $-1 \le a_1 \le 1$. Da außerdem $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} > 0$ gilt, ist die Richtungsableitung und damit das Wachstum von $f(x,y)$ für $a_1 = 1$ am größten. Wegen ${a_1}^2 + {a_2}^2 = 1$ ist dann $a_2 = 0$, also $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Funktion wächst also ausgehend von $(x,y) = (\mathrm{e},1)$ in Richtung der positiven x–Achse am stärksten.

Aufgabe 13.8

a) $\nabla f = e^x \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2+\frac{3}{4}+2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$. Wegen $e^x \neq 0$ folgt $y=z=0$ und damit $x^2+2x+\dfrac{3}{4}=0$,

$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-\dfrac{3}{4}} = -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}$. Stationäre Punkte sind also $\left(-\dfrac{3}{2}, 0, 0\right)$ und $\left(-\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$.

$H_f = e^x \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2+4x+\frac{11}{4} & 2y & 2z \\ 2y & 2 & 0 \\ 2z & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$H_f(-\dfrac{3}{2}, 0, 0) = e^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$\det H_1 = -e^{-\frac{3}{2}} < 0$, $\det H_2 = e^{-\frac{3}{2}} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2e^{-\frac{3}{2}} < 0 \Rightarrow$ kein Extremum,

$H_f(-\dfrac{1}{2}, 0, 0) = e^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H_1 = e^{-\frac{1}{2}} > 0$, $\det H_2 = e^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2e^{-\frac{3}{2}} > 0$,

$\det H_3 = e^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4e^{-\frac{1}{2}} > 0 \Rightarrow$ positiv definit, Minimum.

Also gibt es nur ein lokales Extremum: das Minimum $f(-\dfrac{1}{2}, 0, 0) = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.60653$.

b) Offensichtlich kann $f(x,y,z)$ beliebig groß werden, so dass es kein globales Maximum gibt. Ferner gilt $f(x,y,z) > 0$. Hält man z.B. $y = z = 0$ fest und lässt $x \to -\infty$ gehen, so erhält man nach der l'Hospitalschen Regel

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0,0) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x(x^2+\dfrac{3}{4}) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x^2+\frac{3}{4})}{e^{-x}} = -\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^{-x}} = 0.$
Da der Grenzwert 0 nirgends erreicht wird, gibt es auch kein globales Minimum.

c) Über dem Würfel gilt offensichtlich $f(x,y,z) \leq e^1(1+1+1+\dfrac{3}{4}) = \dfrac{15}{4}e \approx 10.19356$, dieser Wert wird für die 4 Punkte $(1, \pm 1, \pm 1)$ angenommen. Weiterhin gilt $f(x,y,z) = e^x(x^2+y^2+z^2+\dfrac{3}{4}) \geq e^x(x^2+\dfrac{3}{4}) = f(x,0,0)$. Aus dem Ergebnis von a) folgt, dass $f(-\dfrac{1}{2}, 0, 0) \approx 0.60653$ einziges lokales Minimum von $f(x,0,0)$ für $-1 < x < 1$ ist. Für die Funktionswerte an den Rändern gilt $f(1,0,0) > f(-1,0,0) = \dfrac{7}{4}e^{-1} \approx 0.64378 > 0.60653$.

Also ist $f(1, \pm 1, \pm 1) = \dfrac{15}{4}e \approx 10.19356$ der größte und $f(-\dfrac{1}{2}, 0, 0) = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.60653$ der kleinste Funktionswert über dem Würfel $\{(x,y,z) : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$.

Aufgabe 13.9

Die Extremwertuntersuchung soll unter der zusätzlichen Voraussetzung $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ erfolgen.

a) $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{1}{y+z} - \frac{y}{(x+z)^2} - \frac{z}{(x+y)^2} \\ \frac{1}{x+z} - \frac{x}{(y+z)^2} - \frac{z}{(x+y)^2} \\ \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(y+z)^2} - \frac{y}{(x+z)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\dfrac{z}{(x+y)^2} = \dfrac{1}{y+z} - \dfrac{y}{(x+z)^2} = \dfrac{1}{x+z} - \dfrac{x}{(y+z)^2},$

$\dfrac{1}{y+z} + \dfrac{x}{(y+z)^2} = \dfrac{1}{x+z} + \dfrac{y}{(x+z)^2},\ \dfrac{x+y+z}{(y+z)^2} = \dfrac{x+y+z}{(x+z)^2}.$

Wegen $x, y, z > 0$ folgt $y + z = x + z$, analog ergibt sich $x + z = x + y$ und $x + y = x + z$. Somit sind alle Punkte mit $x = y = z$ stationäre Punkte.

Für $x, y, z \geq a > 0$ (a beliebig) ist $f(x, y, z)$ durch 0 nach unten beschränkt, es muss also ein Minimum geben, dieses kann nur für $x = y = z$ angenommen werden. Da $f(x, x, x) = \frac{3}{2}$ unabhängig von x gilt, wird das Minimum in allen diesen Punkten angenommen.

b) Da diese Überlegung für alle $a > 0$ gilt, handelt es sich über $x, y, z > 0$ bei $x = y = z,\ f = \frac{3}{2}$ um globale Extrema.

Fällt die Einschränkung $x, y, z > 0$ weg, so gibt es keine globalen Extrema. Davon kann man sich z.B. durch die Grenzwertbetrachtungen

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x, 1, 0) = \lim\limits_{x\to\infty} (x + \frac{1}{x}) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x, 1, 0) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x + \frac{1}{x}) = -\infty$

überzeugen.

Aufgabe 13.11

a) $y(x_i) = mx_i + n \approx y_i,$

Methode der kleinsten Quadrate: $\sum\limits_{i=1}^{4} (mx_i + n - y_i)^2 \longrightarrow \min$

führt auf Normalgleichungssystem
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} x_i^2\, m + \sum_{i=1}^{4} x_i\, n &= \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{4} x_i\, m + \quad 4\, n &= \sum_{i=1}^{4} y_i \end{aligned}$$

i	1	2	3	4	Σ
x_i	0	1	2	3	6
y_i	10	28	51	69	158
x_i^2	0	1	4	9	14
$x_i y_i$	0	28	102	207	337

$$\begin{array}{rrcrrl} 14\,m+6\,n= & 337 & \quad & 42\,m+18\,n=1011 & & - \\ 6\,m+4\,n= & 158 & & 42\,m+28\,n=1106 & & + \\ \hline & & & 10\,n= & 95 & \\ & & & n= & 9.5 & \\ 6m=158-4\cdot 9.5, & & & m=20, & \underline{\underline{y(x)=20x+9.5}} & \end{array}$$

b)

i	1	2	3		4	
x	0	1	2	2.5	3	4
y_i	10	28	51		69	
$y(x)$	9.5	29.5	49.5	59.5	69.5	89.5

Schätzwerte $\underline{\underline{y(2.5)=59.5}}$, $\underline{\underline{y(4)=89.5}}$

Aufgabe 13.14

$K(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2+2x_2+1000 \longrightarrow \min$
NB: $x_1+x_2=80$

a) $x_2=80-x_1$,
$\tilde{K}(x_1)=\frac{1}{2}x_1^2+6400-160x_1+x_1^2+160-2x_1+1000=\frac{3}{2}x_1^2-162x_1+7560 \longrightarrow \min$,
$\tilde{K}'(x_1)=3x_1-162=0 \quad \text{für} \quad x_1=54$,
$\tilde{K}''(x_1)=3>0 \quad \Longrightarrow \quad$ Minimum bei $x_1=54,\ x_2=26$

b) $F(x_1,x_2,\lambda)=\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2+2x_2+1000+\lambda(x_1+x_2-80)$

$$\begin{array}{lll} F_{x_1}= x_1+\lambda & =0 & x_1=-\lambda \\ F_{x_2}=2x_2+2+\lambda & =0 & x_2=-\dfrac{\lambda+2}{2} \\ F_\lambda= x_1+x_2-80 & =0 & -\lambda-\dfrac{\lambda+2}{2}-80=0 \end{array}$$

$3\lambda+162=0,\quad \lambda=-54 \ \Rightarrow\ x_1=54,\ x_2=26$

K ist nach unten beschränkt, daher muss es ein Minimum geben. Da nur ein stationärer Punkt existiert, liegt dort das Minimum.

Es sind 54 Stück in der Produktionsstätte P_1 und 26 Stück in der Produktionsstätte P_2 herzustellen.

Aufgabe 13.15

Nebenbedingung $x_1+x_2+x_3=7050$

$K(x_1,x_2,x_3,\lambda)=3x_1^2+60x_1+4x_2^2+60x_2+5x_3^2+60x_3+\lambda(x_1+x_2+x_3-7050)$

$$\begin{array}{llll} K_{x_1}= 6x_1+60+\lambda & =0 & \Longrightarrow & x_1=-\frac{\lambda+60}{6} \\ K_{x_2}= 8x_2+60+\lambda & =0 & \Longrightarrow & x_2=-\frac{\lambda+60}{8} \\ K_{x_3}=10x_3+60+\lambda & =0 & \Longrightarrow & x_3=-\frac{\lambda+60}{10} \\ K_\lambda=x_1+x_2+x_3-7050 & =0 & \Longrightarrow & -\frac{\lambda+60}{6}-\frac{\lambda+60}{8}-\frac{\lambda+60}{10}=7050 \end{array}$$

$\frac{20+15+12}{120}(\lambda+60)=-7050,\quad \lambda=-18060,\quad \Longrightarrow \quad x_1=3000,\ x_2=2250,\ x_3=1800$

Da es ein Minimum geben muss und nur einen stationären Punkt gibt, wird das Minimum dort angenommen. Also sind 3000 Stück auf der Produktionslinie P_1, 2250 Stück auf der Produktionslinie P_2 und 1800 Stück auf der Produktionslinie P_3 zu produzieren.

Aufgabe 13.17

Abstand von $(0,2)$: $\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

Das Minimum des Abstands wird im gleichen Punkt angenommen wie das Minimum des Abstandsquadrats. Deshalb lösen wir der Einfachheit halber die Aufgabe

$f(x,y) = x^2+(y-2)^2 \longrightarrow \min$
NB: $x^2-y^2-4=0$

$F(x,y,\lambda) = x^2+(y-2)^2+\lambda(x^2-y^2-4)$

$$\begin{array}{llll} F_x = 2x+2\lambda x & = 0 \;\Rightarrow & x(1+\lambda)=0 & \text{(I)} \\ F_y = 2(y-2)-2\lambda y & = 0 \;\Rightarrow & y(1-\lambda)=2 & \text{(II)} \\ F_\lambda = x^2-y^2-4 & = 0 & & \text{(III)} \end{array}$$

(I) $\Longrightarrow$ $x=0$, dann würde aus (III) $-y^2-4=0$ folgen, was nicht sein kann,
oder $\lambda=-1$, dann folgt aus (II) $y=1$ und aus (III) schließlich $x=\pm\sqrt{5}$.

Da der Abstand nach unten beschränkt ist (nicht kleiner als 0 werden kann), muss es ein Minmum geben. Es kann nur in den Punkten $(\sqrt{5},1)$ und $(-\sqrt{5},1)$ angenommen werden. Wegen $f(\sqrt{5},1)=f(-\sqrt{5},1)=6$ haben diese beiden Punkte mit $\sqrt{6}$ den geringsten Abstand zu der Hyperbel.

oder:

$\tilde{f}(y)=y^2+4+(y-2)^2$, $\tilde{f}'(y)=2y+2(y-2)=4y-4=0$ für $y=1$, $\tilde{f}''(y)=4>0$.
Somit wird das Minimum für $y=1$ angenommen. $x=\pm\sqrt{y^2+4}=\pm\sqrt{5}$. Also haben die Punkte $(\sqrt{5},1)$ und $(-\sqrt{5},1)$ den geringsten Absand zu der Hyperbel.

Aufgabe 13.18

$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+y^2-2)$,
$F_x=y+2\lambda x=0 \;\Rightarrow\; y=-2\lambda x$, $F_y=x+2\lambda y=0 \;\Rightarrow\; x=-2\lambda y=4\lambda^2 x$
$\Rightarrow\; x=y=0$ oder $\lambda=\pm\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; y=\pm x$,
$F_\lambda=x^2+y^2-2=0 \;\Rightarrow\;$ $x=y=0$ scheidet aus, aus $y=\pm x$ folgt $2x^2=2, x=\pm1, y=\pm1$ (Vorzeichen unabhängig voneinander). Da $f(x,y)=xy$ über dem Kreis $x^2+y^2=2$ beschränkt ist, muss es ein Maximum und ein Minimum geben, die Extrema können nur in den Punkten $(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$ angenommen werden. Also ist das Maximum 1 und wird bei $(x,y)=(1,1)$ und $(-1,-1)$ angenommen, das Minimum ist -1 und wird bei $(x,y)=(1,-1)$ und $(-1,1)$ angenommen.

Aufgabe 13.19

a) $F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + \lambda(x + 3y - 30) + \mu(y + 2z - 20)$

$$\begin{array}{lll} F_x = 2x + \lambda = 0 & \Longrightarrow & \lambda = -2x \\ F_y = 6y + 3\lambda + \mu = 0 & \Longrightarrow & \mu = -6y - 3\lambda = 6x - 6y \\ F_z = 4z + 2\mu = 0 & \Longrightarrow & z = -\frac{\mu}{2} = -3x + 3y \\ F_\lambda = x + 3y - 30 = 0 & \Longrightarrow & x + 3y = 30 \\ F_\mu = y + 2z - 20 = 0 & \Longrightarrow & -6x + 18y = 20 \\ & & 6x + 18y = 180 \\ & & 25y = 200, \quad y = 8, \; x = 6, \; z = 6 \end{array}$$

$(6,8,6)$ ist der einzige stationäre Punkt. Da $f(x,y,z)$ nach unten beschränkt ist, muss es ein Minimum geben. Also liegt $x = 6$, $y = 8$, $z = 6$ das Minimum $f(6,8,6) = 300$.

b) $x = 30 - 3y$, $z = 10 - \frac{y}{2}$,

$$\tilde{f}(y) = (30 - 3y)^2 + 3y^2 + 2(10 - \tfrac{y}{2})^2 = 900 - 180y + 9y^2 + 3y^2 + 200 - 20y + \tfrac{y^2}{2}$$
$$= \tfrac{25}{2}y^2 - 200y + 1100,$$

$\tilde{f}'(y) = 25y - 200 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 8, \quad \tilde{f}''(y) = 25 > 0$

$\Longrightarrow$ Minimum $\tilde{f}(8) = 300$ bei $y = 8$, $x = 6$, $z = 6$

Aufgabe 13.20

$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x + y + z + \lambda(x + z - 1) + \mu(x^2 + y^2 - 4)$

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & F_x = 1 + \lambda + 2\mu x & = 0 \\ \text{(II)} & F_y = 1 + 2\mu y & = 0 \\ \text{(III)} & F_z = 1 + \lambda & = 0 \\ \text{(IV)} & F_\lambda = x + z - 1 & = 0 \\ \text{(V)} & F_\mu = x^2 + y^2 - 4 & = 0 \end{array}$$

(III) $\Rightarrow$ $\lambda = -1$, (I) $\Rightarrow$ $2\mu x = 0$, $\mu = 0$ ist wegen (II) nicht möglich $\Rightarrow$ $x = 0$,
(IV) $\Rightarrow$ $z = 1$, (V) $\Rightarrow$ $y = \pm 2$, (II) $\Rightarrow$ $\mu = -\frac{1}{2y} = \mp\frac{1}{4}$

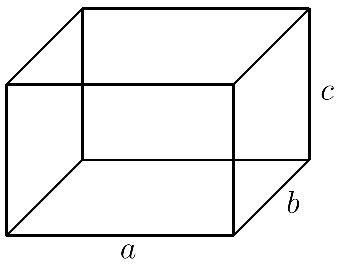
Stationäre Punkte $(x,y,z,\lambda,\mu) = (0,2,1,-1,-\frac{1}{4})$ und $(0,-2,1,-1,\frac{1}{4})$

$f(0,2,1) = 3$, $f(0,-2,-1) = -1$

Längs der geschlossenen Kurve muss es mindestens ein Maximum und ein Minimum von $f(x,y,z)$ geben. Da es nur 2 stationäre Punkte gibt, wird in diesen das Extremum angenommen:

Maximum $f(0,2,1) = 3$, Minimum $f(0,-2,1) = -1$

Aufgabe 13.21



$A = ab + 2ac + 2bc \longrightarrow \min$
NB: $V = abc = 1$

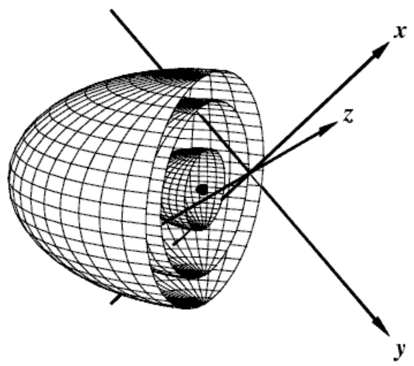
$$L(a,b,c,\lambda) = ab + 2ac + 2bc + \lambda(abc-1)$$
$$\begin{aligned} L_a &= \phantom{2a+{}} b + 2c + \lambda bc = 0 \\ L_b &= a + 2c + \lambda ac = 0 \\ L_c &= 2a + 2b + \lambda ab = 0 \\ L_\lambda &= \quad abc - 1 \quad = 0 \end{aligned}$$

Wegen $abc = 1$ ist $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Aus $L_a = 0$ folgt $\lambda = -\frac{b+2c}{bc}$,
Einsetzen in $L_b = 0$ ergibt $a+2c-\frac{b+2c}{bc}ac = a+2c-a-2\frac{ac}{b} = 0 \Rightarrow 2c = 2\frac{a}{b}c \Rightarrow a = b$,
Einsetzen in $L_c = 0$ ergibt $2a + 2b - \frac{b+2c}{bc}ab = 2a + 2b - \frac{ab}{c} - 2a = 0 \Rightarrow 2b = \frac{a}{c}b \Rightarrow$ $a = 2c$, also $a = b = 2c$, $abc = 4c^3 = 1 \implies c = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, $a = b = 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

Es gibt nur einen extremwertverdächtigen Punkt. Da A nach unten beschränkt ist, muss es ein Minimum geben, deshalb liegt dort das Minimum vor.

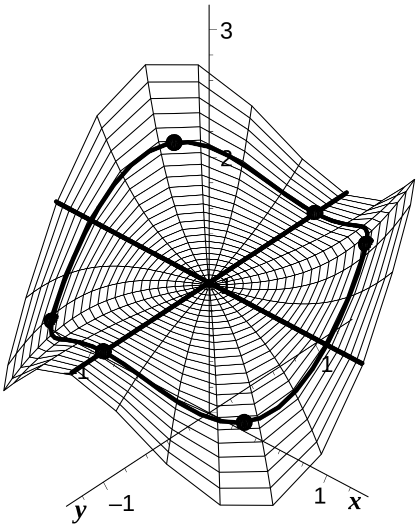
Die Seitenlängen des Quaders sind daher $c = \sqrt[3]{\frac{1l}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}\mathrm{dm}^3} \approx 0.63\,\mathrm{dm} = \underline{\underline{6.3\,\mathrm{cm}}}$,
$a = b = 2c \approx \underline{\underline{12.6\,\mathrm{cm}}}$.

Aufgabe 13.2



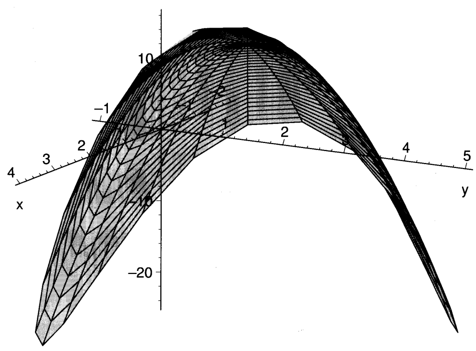
Schnitt durch das Niveauflächenbild von
$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$
$$= \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\eta+1)^2 + \frac{3}{2}\left(\zeta + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{4}{3}$$

Aufgabe 13.13

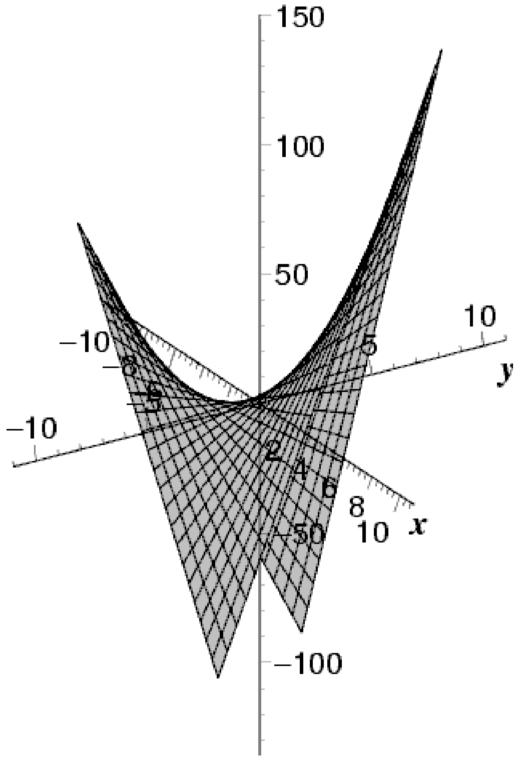


$f(x,y) = 1 + yx^2$
mit Niveaulinien $f = 1$
(längs der Koordinatenachsen)
und Extrema bezüglich der
Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$

Aufgabe 13.23



Aufgabe 13.24



Aufgabe 13.26

a) Wegen $y^2+1\neq 0\ \forall y\in\mathbb{R}$ ist $\mathrm{DB}(f)=\mathbb{R}^2$.

b) $\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{2x+6}{y^2+1} \\ \dfrac{(x^2+6x+19)(-2y)}{(y^2+1)^2} \end{pmatrix}$,

$$f_{yy} = (x^2+6x+19)\frac{-2(y^2+1)^2-(-2y)2(y^2+1)2y}{(y^2+1)^4} = (x^2+6x+19)\frac{-2y^2-2+8y^2}{(y^2+1)^3},$$

$$H_f = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{y^2+1} & \dfrac{(2x+6)(-2y)}{(y^2+1)^2} \\ \dfrac{(2x+6)(-2y)}{(y^2+1)^2} & \dfrac{(x^2+6x+19)(6y^2-2)}{(y^2+1)^3} \end{pmatrix},$$

$$f(0,1) = \frac{19}{2},\ \nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -\dfrac{19}{2} \end{pmatrix},\quad H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & \dfrac{19}{2} \end{pmatrix},$$

$$T_2(x,y) = \frac{19}{2} + \begin{pmatrix} 3 & -\dfrac{19}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\,(x-0 \quad y-1) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & \dfrac{19}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{19}{2} + 3x - \frac{19}{2}(y-1) + \frac{1}{2}x^2 - 3x(y-1) + \frac{19}{4}(y-1)^2 = \underline{\underline{\frac{95}{4} + 6x - 19y + \frac{x^2}{2} - 3xy + \frac{19}{4}y^2}}$$

Tangentialebene $z = \frac{19}{2} + 3x - \frac{19}{2}(y-1)$, d.h. $3x - \frac{19}{2}y - z = -19$, $\underline{\underline{-6x+19y+2z=38}}$

c) $f_x = \dfrac{2x+6}{y^2+1} = 0 \implies x = -3$,

$f_y = \dfrac{(x^2+6x+19)(-2y)}{(y^2+1)^2} = 0$ Wegen $x=-3$ ist $x^2+6x+19=10$ und daher $y=0$.

Einziger stationärer Punkt ist $(-3,0)$. $\det H_f(-3,0) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix} = -40 < 0$.

$H_f(-3,0)$ ist also indefinit, so dass in $(-3,0)$ ein Sattelpunkt vorliegt. Extrema gibt es nicht.

d) $f(-3,0) = 10$, $\nabla f(-3,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $H_f(-3,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}$,

$T_2(x,y) = 10 + (x+3)^2 - 10y^2$,
Tangentialebene $z = 10$ (Für Sattelpunkt ist Tangentialebene parallel zur x–y–Ebene.)

e) $x^2+6x+19 = (x+3)^2+10 \geq 10$, $y^2+1 \geq 1$, $\implies f(x,y) > 0 \;\; \forall x,y$,

$f(x,0) = (x+3)^2+10$ nimmt alle Werte aus $[10,\infty)$ an, $f(-3,y) = \dfrac{10}{y^2+1}$ nimmt alle Werte aus $(0,10]$ an. Also gilt $\mathrm{WB}(f) = (0,\infty)$.

Aufgabe 13.27

a) $f_x = 20x + 12y + 8 = 0 \;\; |\cdot 3 \qquad 60x + 36y + 24 = 0 \;\; |-$

$f_y = 12x + 20y + 24 = 0 \;\; |\cdot 5 \qquad 60x + 100y + 120 = 0 \;\; |+ \qquad 64y + 96 = 0,\; y = -\frac{3}{2}$,

stationär nur $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ $\qquad x = -\dfrac{12y+8}{20} = \dfrac{1}{2}$

$H_f = \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}$, $\det H_f = 400 - 144 > 0 \implies$ Extremum, $f_{xx} = 20 > 0 \implies$ Minimum

Einzige Extremstelle ist das Minimum $f(0.5,-1.5) = -16$.

b) $f(x,y) = (x \quad y) \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (8 \quad 24) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C$

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 6 \\ 6 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 100 - 20\lambda + \lambda^2 - 36 = \lambda^2 - 20\lambda + 64 = 0,\; \lambda_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100-64} = \begin{cases} 16 \\ 4 \end{cases}$$

EV zu $\lambda_1 = 16$

$\begin{array}{rr} -6 & 6 \\ 6 & -6 \\ \hline \end{array}$ norm. EV $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2 = 4$

$\begin{array}{rr} 6 & 6 \\ 6 & 6 \\ \hline \end{array}$ norm. EV $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Die Drehung kann also nach der Vorschrift $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$ erfolgen:

$\frac{1}{2}(\xi \quad \eta)\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 6\\6 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}(8 \quad 24)\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = C,$

$(\xi \quad \eta)\begin{pmatrix}16 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}(32 \quad 16)\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = 16\xi^2 + 4\eta^2 + 16\sqrt{2}\xi + 8\sqrt{2}\eta = C$

Aus dieser Darstellung ergibt sich übrigens

$f(x,y) = 16\left(\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{16}{2} + 4\left(\eta + \sqrt{2}\right)^2 - 4\cdot 2 = 16\left(\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\eta + \sqrt{2}\right)^2 - 16$, das einzige Minimum liegt mit dem Funktionswert -16 bei $\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix} \Longrightarrow$

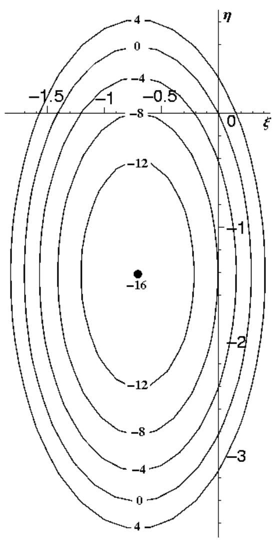
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\-3/2\end{pmatrix}$ wie bereits bekannt.

Für die Niveaulinien $f(x,y) = C$ ergibt sich $16\left(\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\eta + \sqrt{2}\right)^2 = C + 16$,

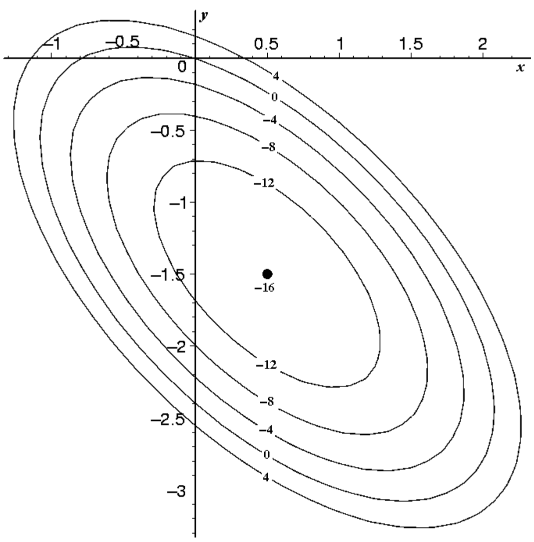
$\frac{\left(\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{C+16}}{4}\right)^2} + \frac{\left(\eta + \sqrt{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{C+16}}{2}\right)^2} = 1.$

Niveaulinien gibt es nur für $C \geq -16$, es handelt sich im transformierten Koordinatensystem um Ellipsen mit den Halbachsen $\frac{\sqrt{C+16}}{4}$ und $\frac{\sqrt{C+16}}{2}$ um den Mittelpunkt $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$.

c)



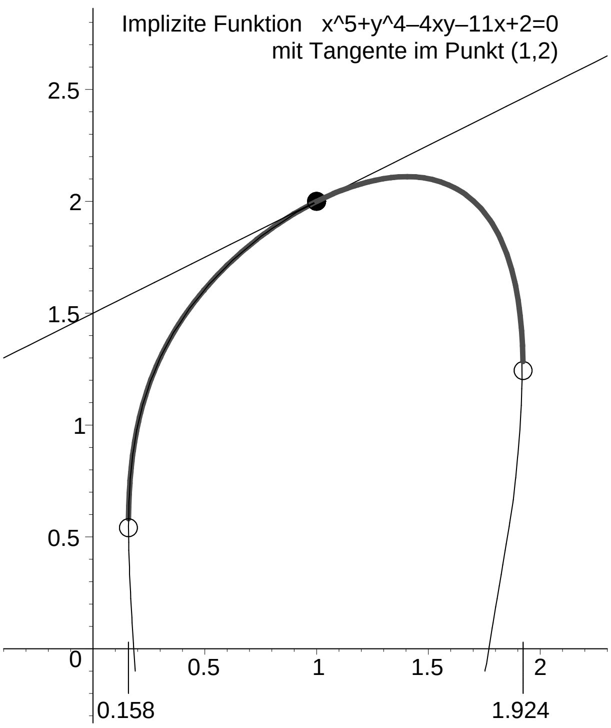
transformiertes System



Ausgangssystem

d) Nach b) gibt es Niveaulinien genau dann, wenn $C \geq -16$ gilt; also ist $\mathrm{WB}(f) = [-16, \infty)$.

Aufgabe 13.29



Aufgabe 13.30

a) $f = 10x^2 + 12xy + 10y^2 + 8x + 24y$, $f_x = 20x + 12y + 8$ und $f_y = 12x + 20y + 24$ sind offensichtlich stetig.

$f\left(0,-\frac{12}{5}\right)=10\frac{144}{25}+24\left(-\frac{12}{5}\right)=0,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}\left(0,-\frac{12}{5}\right)=20\left(-\frac{12}{5}\right)+24=-24\neq 0.$

Also sind alle Voraussetzungen des Satzes über die implizite Funktion erfüllt. Somit wird durch $f(x,y)=0$ in der Umgebung des Punktes $(0,-\frac{12}{5})$ eine Funktion $y=\varphi(x)$ definiert.

b) $\varphi'(x)=-\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=-\dfrac{20x+12y+8}{12x+20y+24},\ \ \varphi'(0)=-\dfrac{12\left(-\frac{12}{5}\right)+8}{20\left(-\frac{12}{5}\right)+24}=\underline{\underline{-\dfrac{13}{15}\approx-0.86667}}$

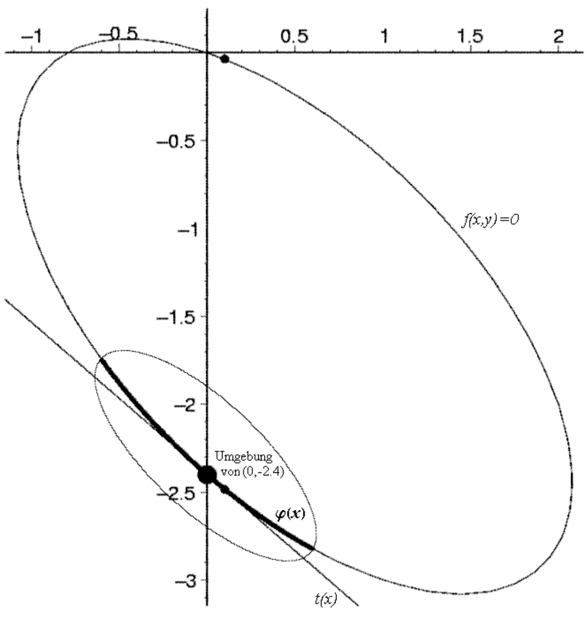
c) $t(x)=\varphi(0)+\varphi'(0)(x-0)=\underline{\underline{-\dfrac{12}{5}-\dfrac{13}{15}\,x}}$

d) $t(0.1)\approx\underline{\underline{-2.4866667}}$

$f(0.1,y)=0.1+1.2y+10y^2+0.8+24y=0,\ 10y^2+25.2y+0.9=0,\ y^2+2.52y+0.09=0,$

$y_{1/2}=-1.26\pm\sqrt{1.26^2-0.09}\approx\begin{cases}-0.0362353\\-2.4837647\end{cases}$

Die Lösung y_1 liegt zwar auf dem Nullniveau $f(x,y)=0$, nicht aber in der Umgebung des Punktes $(0,-2.4)$, in der durch $f(x,y)=0$ eine Funktion $y=\varphi(x)$ definiert ist. Also ist $\varphi(0.1)\approx\underline{\underline{-2.4837647}}$.



Niveaulinie $f(x,y)=0$, eine Umgebung von $(0,-2.4)$, $\varphi(x)$, $t(x)$ und Punkte $(0.1,\varphi(0.1))$ und $(0.1,y_1)$

Aufgabe 13.31

	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
	-2	-8	4	-8	16	16	-32
	-1	-1	1	-1	1	1	-1
	0	0	0	0	0	0	0
	1	2	1	1	1	2	2
	2	8	4	8	16	16	32
Σ	0	1	10	0	34	35	1

a) Approximation durch $y(x) = mx + n$

Normalgleichungssystem
$$\begin{aligned} \Sigma x_i^2\, m + \Sigma x_i\, n &= \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i\, m + \quad k\, n &= \Sigma y_i \qquad (k=5) \end{aligned}$$

$$10m = 35,\ 5n = 1, \qquad m = \frac{7}{2},\ n = \frac{1}{5}, \qquad \underline{\underline{y(x) = \frac{7}{2}x + \frac{1}{5}}}$$

b) Approximation durch $y(x) = ax^2 + bx + c$

Normalgleichungssystem
$$\begin{aligned} \Sigma x_i^4\, a + \Sigma x_i^3\, b + \Sigma x_i^2\, c &= \Sigma x_i^2 y_i \\ \Sigma x_i^3\, a + \Sigma x_i^2\, b + \Sigma x_i\, c &= \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2\, a + \Sigma x_i\, b + \quad k\, c &= \Sigma y_i \qquad (k=5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 34a \qquad + 10c &= 1 \\ 10b \qquad &= 35 \qquad b = \frac{7}{2} \\ 10a \qquad + 5c &= 1 \qquad 20a + 10c = 2, \quad 14a = -1, \quad a = -\frac{1}{14}, \quad c = \frac{12}{35} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{y(x) = -\frac{1}{14}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{12}{35}}}$$

c)

x_i	y_i	$mx_i + n$	$ax_i^2 + bx_i + c$
-2	-8	-6.80	-6.94
-1	-1	-3.30	-3.23
0	0	0.20	0.34
1	2	3.70	3.77
1.5		$\underline{5.45}$	$\underline{5.43}$
2	8	7.20	7.06
2.5		$\underline{8.95}$	$\underline{8.65}$

Aufgabe 13.32

a) $y = \dfrac{23-11x}{5}$,

$$\widetilde{f}(x) = f(x, y(x)) = 10x^2 + 12x\frac{23-11x}{5} + 10\frac{(23-11x)^2}{25} + 8x + 24\frac{23-11x}{5}$$

$$= \frac{50x^2 + 276x - 132x^2 + 1058 - 1012x + 242x^2 + 40x + 552 - 264x}{5}$$
$$= \frac{160x^2 - 960x + 1610}{5} = 32x^2 - 192x + 322$$
$$\widetilde{f}'(x) = 64x - 192 = 0 \implies x = 3,$$
$$\widetilde{f}''(x) = 64 > 0 \implies \text{Minimum bei } x = 3,\ y = \frac{23-11x}{5} = -2,\ f(3,-2) = 34$$

Über der Gerade ist die Funktion eine Parabel, deren kleinster Funktionswert 34 ist, während sie nach oben unbeschränkt ist.

b) $F(x, y, \lambda) = 10x^2 + 12xy + 10y^2 + 8x + 24y + \lambda(11x + 5y - 23)$

$$\begin{array}{lrrrrll}
F_x = & 20x + & 12y + & 8 + 11\lambda & = 0 & | \cdot 5 & \\
F_y = & 12x + & 20y + & 24 + 5\lambda & = 0 & | \cdot 11 & \\
F_\lambda = & 11x + & 5y - & 23 & = 0 & & |+ \\
& 100x + & 60y + & 40 + 55\lambda & = 0 & |- & \\
& 132x + & 220y + & 264 + 55\lambda & = 0 & |+ & \\
& 32x + & 160y + & 224 & = 0 & | : 32 & \\
& x + & 5y + & 7 & = 0 & & |- \\
& 10x & - & 30 & = 0, & &
\end{array}$$
$$x=3,\ y=\frac{-7-x}{5} = -2,\ \lambda=\frac{12x+20y+24}{-5} = -4$$

Aus Aufgabe 13.27 ist bekannt, dass $f(x, y)$ über $\mathbb{R}^2$ nach unten beschränkt ist. Damit ist $f(x, y)$ erst recht über der Gerade $11x+5y=23$ nach unten beschränkt. Folglich muss es ein Minimum geben. Da es nur einen extremwertverdächtigen Punkt gibt, liegt dort das Minimum, dieses ist $f(3, -2) = 34$. Kleinster Funktionswert ist 34, nach oben ist $f(x, y)$ auch über der Gerade unbeschränkt.

Aufgabe 13.33

Umsatz $U(p_1, p_2, p_3, p_4) = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4$
$$= 1000p_1-20p_1^2+1500p_2-10p_2^2+1000p_3-10p_3^2+2000p_4-10p_4^2$$

Nebenbedingung
$a_1+2a_2+2a_3+2a_4 = 1000-20p_1+3000-20p_2+2000-20p_3+4000-20p_4 = 7800,$
d.h. $2200-20p_1-20p_2-20p_3-20p_4 = 0$

$$F(p_1, p_2, p_3, p_4, \lambda) = 1000p_1-20p_1^2+1500p_2-10p_2^2+1000p_3-10p_3^2+2000p_4-10p_4^2 + \lambda(2200-20p_1-20p_2-20p_3-20p_4)$$

$$\begin{array}{lll}
F_{p_1} = 1000 - 40p_1 - 20\lambda = 0 & & p_1 = \frac{1000-20\lambda}{40} = 25 - \frac{1}{2}\lambda \\
F_{p_2} = 1500 - 20p_2 - 20\lambda = 0 & & p_2 = \frac{1500-20\lambda}{20} = 75 - \lambda \\
F_{p_3} = 1000 - 20p_3 - 20\lambda = 0 & & p_3 = \frac{1000-20\lambda}{20} = 50 - \lambda \\
F_{p_2} = 2000 - 20p_4 - 20\lambda = 0 & & p_4 = \frac{2000-20\lambda}{20} = 100 - \lambda \\
F_\lambda = 2200 - 20p_1 - 20p_2 - 20p_3 - 20p_4 = 0 & & p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 110
\end{array}$$

$$25 - \frac{\lambda}{2} + 75 - \lambda + 50 - \lambda + 100 - \lambda = 110, \quad \frac{7}{2}\lambda = 140, \quad \lambda = 40$$

$$\begin{array}{llll} \Longrightarrow & p_1 = 5 & \longrightarrow & a_1 = 900 \\ & p_2 = 35 & \longrightarrow & a_2 = 1150 \\ & p_3 = 10 & \longrightarrow & a_3 = 900 \\ & p_4 = 60 & \longrightarrow & a_4 = 1400 \qquad \text{max. Umsatz } \underline{\underline{137\,750 \text{ Geldeinheiten}}} \end{array}$$

Auf Grund der Kapazitätsbeschränkung ist der Umsatz beschränkt, es muss ein Maximum geben. Da es nur einen extremwertverdächtigen Punkt gibt, muss dort das Maximum liegen.

19.14 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 14.7

a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2, \quad \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}x$ bzw. $y = 0$ (ist Lösung), $\quad -\frac{1}{y} = x + C$ bzw. $y \equiv 0$,

Lösung: $\underline{\underline{y = -\frac{1}{x+C}, \ C \in \mathbb{R}}}$ und $\underline{\underline{y \equiv 0}}$

b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y-3)\cos x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{y-3} = \cos x \mathrm{d}x$ bzw. $y = 3$ (ist Lösung),

$\ln|y-3| = \sin x + \ln C, \ C > 0,$

$y - 3 = C\mathrm{e}^{\sin x}, \ C \neq 0,$

$y - 3 = C\mathrm{e}^{\sin x}, \ C$ beliebig $\in \mathbb{R}$ $\quad (C = 0 \ \hat{=} \ y \equiv 3$, siehe oben),

$\underline{\underline{y = C\mathrm{e}^{\sin x} + 3, \ C \in \mathbb{R}}}$

c) $\frac{\mathrm{d}y}{2y+1} = \cot x \mathrm{d}x = \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x \qquad$ bzw. $\qquad y = -\frac{1}{2}$ (ist Lösung)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2y+1)}{2y+1} &= \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x} && \\ \frac{1}{2}\ln|2y+1| &= \ln|\sin x| + \ln C && C > 0 \\ \sqrt{|2y+1|} &= C|\sin x| && C > 0 \\ |2y+1| &= D\sin^2 x && D > 0 \\ 2y+1 &= E\sin^2 x && E \text{ beliebig reell } (E = 0 \ \hat{=} \ y = -\tfrac{1}{2}, \text{ s. oben}) \\ y &= -\frac{1}{2} + F\sin^2 x && F \text{ beliebig reell} \end{aligned}$$

d) $x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \qquad$ bzw. $\qquad y = 0$ (ist Lösung)

$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}, \qquad -\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + C,\ C$ beliebig reell

$y = -\dfrac{x}{Cx+1}$ bzw. $y = 0$ (extra aufzuführen, da durch keine Wahl von C erreichbar)

e) homogen: $y' = -2xy, \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -2x\mathrm{d}x, \quad \ln y = -x^2 + \ln C, \quad y = C\mathrm{e}^{-x^2},\ C \in \mathbb{R}$
(Sonderfall $y = 0$ und Betrag unter dem Logarithmus wie üblich behandelt, vgl. Aufg. 4b)

inhomogen: Ansatz Variation der Konstanten:
$y(x) = C(x)\mathrm{e}^{-x^2}, \quad y' = C'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - 2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2},$

$C'\mathrm{e}^{-x^2} - 2xC\mathrm{e}^{-x^2} + 2xC\mathrm{e}^{-x^2} = 2x^2\mathrm{e}^{-x^2}, \quad C' = 2x^2, \quad C(x) = \frac{2}{3}x^3 + D,$

$$y = \underbrace{\underbrace{\frac{2}{3}x^3\mathrm{e}^{-x^2}}_{\substack{\text{spez. Lösung}\\ \text{inhom. Dgl.}}} + \underbrace{D\mathrm{e}^{-x^2}}_{\substack{\text{allg. Lösung}\\ \text{homog. Dgl.}}}}_{\text{allg. Lösung inhomog. Dgl.}}, \qquad D \in \mathbb{R}$$

f) $t(x) = \dfrac{y(x)}{x}, \quad t > 0$, da sonst $\ln \frac{y}{x}$ nicht definiert ist

$y(x) = t(x)x,\ y' = t'x + t,\ t'x + t = t(1 + \ln t),\ t'x = t\ln t,\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}x = t\ln t,$

$\dfrac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ bzw. $t = 1$ (ist Lösung)

$\dfrac{\mathrm{d}\ln t}{\ln t} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x},\ \int \dfrac{\mathrm{d}\ln t}{\ln t} = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

$$\begin{aligned}
\ln|\ln t| &= \ln|x| + \ln C && C > 0\\
|\ln t| &= C|x| && C > 0\\
\ln t &= Cx && C \text{ beliebig reell } (C = 0 \mathrel{\hat{=}} t = 1, \text{ s. oben})\\
t &= e^{Cx} && C \text{ beliebig reell}\\
y &= xe^{Cx} && C \text{ beliebig reell}
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.8

homogene Differenzialgleichung: $y' - \tan x\, y = 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\sin x}{\cos x} y \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x} \quad \text{bzw. } \; y = 0 \text{ (ist Lösung)} \\
\ln|y| &= -\ln|\cos x| + \ln C, \quad C > 0 \\
|y| &= \frac{C}{|\cos x|}, \quad C > 0 \\
y &= \frac{C}{\cos x}, \quad C \neq 0 \\
y &= \frac{C}{\cos x}, \quad C \text{ beliebig reell } (C{=}0 \mathrel{\hat{=}} y{=}0, \text{s. oben})
\end{aligned}
$$

inhomogene Differenzialgleichung: Variation der Konstanten

Ansatz $\;y(x) = \dfrac{C(x)}{\cos x} \implies y'(x) = \dfrac{C'\cos x + C\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{C'}{\cos x} + C\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

$\dfrac{C'}{\cos x} + C\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} - \tan x \dfrac{C}{\cos x} = \cos x, \quad C' = \cos^2 x,$

$C = \int \cos^2 x\mathrm{d}x = \sin x\cos x + \int \sin^2 x\mathrm{d}x = \sin x\cos x + \int \mathrm{d}x - \int \cos^2 \mathrm{d}x$

$\implies \quad \int \cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + D, \qquad y = \frac{1}{2}\frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{D}{\cos x}$

Aufgabe 14.10

a) $y_1 = x,\; y_1' = 1,\; y_1'' = 0, \quad x^2y_1'' + xy_1 - y_1 = x - x = 0$, stimmt

b) $y = xu,\; y' = u + xu',\; y'' = 2u' + xu''$

$x^2y'' + xy' - y = 2x^2u' + x^3u'' + xu + x^2u' - xu = 0, \; x^3u'' + 3x^2u' = 0$

Substitution $t = u'$: $\quad x^3t' + 3x^2t = 0 \qquad x\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -3t$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}t}{t} &= -3\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \text{bzw. } \; y = 0 \text{ (ist Lsg.)} \\
\ln|t| &= -3\ln|x| + \ln C, \quad C > 0 \\
|t| &= \frac{C}{x^3}, \qquad C > 0 \\
t &= \frac{C}{x^3}, \; C \text{ bel. reell} (\,C{=}0 \mathrel{\hat{=}} t{=}0)
\end{aligned}
$$

$u = \int t\mathrm{d}x = \int \dfrac{C}{x^3}\mathrm{d}x = -\dfrac{C}{2x^2} + D = \dfrac{E}{x^2} + D, \qquad y = \dfrac{E}{x} + Dx$

Aufgabe 14.14

a) homogene Dgl.: char. Polynom $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0,$

$\lambda_{1/2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = -2; -3, \qquad y_{\text{hom}} = A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{-3x}$

inhomog. Dgl.: re. Seite $\mathrm{e}^{-x}, P_0(x){=}1,\; \lambda{=}{-1}$ keine Nullst. d. char. Pol.

$\Rightarrow$ keine Resonanz

Ansatz $y(x) = Q_0(x) = C\mathrm{e}^{-x},\; y' = -C\mathrm{e}^{-x},\; y'' = C\mathrm{e}^{-x}$

$y'' + 5y' + 6y = C\mathrm{e}^{-x} - 5C\mathrm{e}^{-x} + 6\mathrm{e}^{-x} = 2C\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \implies C = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{-3x}$

b) homogen: $\lambda^2 + \lambda - 182 = 0,\ \lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{728}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{27}{2} = 13,\ -14,$

$y_{\text{hom}}(x) = A\mathrm{e}^{13x} + B\mathrm{e}^{-14x}$

inhomogen: Ansatz: $y(x) = (Cx + D)\mathrm{e}^{2x},$

$$y'(x) = (2Cx + C + 2D)\mathrm{e}^{2x},$$

$$y''(x) = (4Cx + 4C + 4D)\mathrm{e}^{2x},$$

$$y''+y'-182y = (6Cx+5C+6D-182Cx-182D)\mathrm{e}^{2x} = (-176Cx+5C-176D)\mathrm{e}^{2x} = -1408x\mathrm{e}^{2x},$$

$$\begin{aligned} -176C &= -1408 &\Longrightarrow\quad& C = 8\\ 5C-176D &= 0 &\Longrightarrow\quad& D = -\tfrac{40}{176} = \tfrac{5}{22}\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{y(x) = (8x + \frac{5}{22})\mathrm{e}^{2x} + A\mathrm{e}^{13x} + B\mathrm{e}^{-14x}}}$$

c) homogene Dgl.: char. Polynom $\lambda^2 + 4 = 0,\ \lambda_{1/2} = \pm 2\mathrm{i},\ \ y_{\text{hom}} = A\cos 2x + B\sin 2x$

inhomog. Dgl.: re. Seite $\sin 2x,\ \alpha+\beta\mathrm{i} = 2\mathrm{i}$ einfache Nullst. d. char. Pol. $\Rightarrow$ Resonanz

Ansatz $y(x) = x(C\cos 2x + Dx\sin 2x) = Cx\cos 2x + Dx\sin 2x,$

$$y' = C\cos 2x - 2Cx\sin 2x + D\sin 2x + 2Dx\cos 2x,$$

$$y'' = -4C\sin 2x - 4Cx\cos 2x + 4D\cos 2x - 4Dx\sin 2x$$

$$y'' + 4y = -4C\sin 2x + 4D\cos 2x = \sin 2x \quad\Longrightarrow\quad C = -\tfrac{1}{4},\ D = 0$$

$$y = -\tfrac{1}{4}x\cos 2x + A\cos 2x + B\sin 2x$$

d) homogen: $\lambda^3 + 9\lambda = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2/3} = \pm\sqrt{-9} = \pm 3\mathrm{i},$

$y_{\text{hom}}(x) = A + B\cos 3x + C\sin 3x$

inhomogen: Ansatz: $y(x) = D\cos 4x + E\sin 4x,$

$$y'(x) = -4D\sin 4x + 4E\cos 4x,$$

$$y''(x) = -16D\cos 4x - 16E\sin 4x,$$

$$y'''(x) = 64D\sin 4x - 64E\cos 4x,$$

$$y'''+9y' = 64D\sin 4x - 64E\cos 4x - 36D\sin 4x + 36E\cos 4x = 28D\sin 4x - 28E\cos 4x = 7\cos 4x,$$

$$D = 0,\ E = -\frac{1}{4},\quad \underline{\underline{y(x) = -\frac{1}{4}\sin 4x + A + B\cos 3x + C\sin 3x}}$$

e) homogen: $\lambda^3+\lambda^2+15\lambda-17 = 0,\ \lambda_1 = 1,\quad (\lambda^3+\lambda^2+15\lambda-17) : (\lambda-1) = \lambda^2+2\lambda+17,$

$$\begin{array}{l} \underline{\lambda^3-\lambda^2}\\ \quad 2\lambda^2+15\lambda-17\\ \quad \underline{2\lambda^2\ -2\lambda}\\ \qquad\quad 17\lambda-17\\ \qquad\quad \underline{17\lambda-17}\\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$\lambda_{2/3} = -1 \pm 4\mathrm{i},\quad y_{\text{hom}}(x) = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-x}\cos 4x + C\mathrm{e}^{-x}\sin 4x$

inhomogen: $\lambda = 1$ ist 1–fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms („Resonanz“),

Ansatz: $y(x)=Dx\mathrm{e}^x,\ y'(x)=(D+Dx)\mathrm{e}^x,\ y''(x)=(2D+Dx)\mathrm{e}^x,\ y'''(x)=(3D+Dx)\mathrm{e}^x,$
$y'''+y''+15y'-17y = (3D+Dx+2D+Dx+15D+15Dx-17Dx)\mathrm{e}^x = 20D\mathrm{e}^x = 10\mathrm{e}^x,$
$D=\frac{1}{2},\quad \underline{\underline{y(x)=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^x + A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-x}\cos 4x + C\mathrm{e}^{-x}\sin 4x}}$

f) homogene Dgl.: char. Polynom $\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2=0,$
$\lambda_{1/2}=0,\ \lambda_{3/4}=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm 2\mathrm{i},\quad y_{\text{hom}}=A+Bx+C\mathrm{e}^x\cos 2x+D\mathrm{e}^x\sin 2x$

inhomog. Dgl.: re. Seite 5, $P_0(x)=5$, $\lambda=0$ doppelte Nullst. d. char Pol.
$\Rightarrow$ Resonanz
Ansatz $y(x)=x^2Q_0(x)=Ex^2,\ y'=2Ex,\ y''=2E,\ y'''=y^{(4)}=0$
$y^{(4)}-2y'''+5y''=10E=5 \implies E=\frac{1}{2},\quad y=\frac{x^2}{2}+A+Bx+C\mathrm{e}^x\cos 2x+D\mathrm{e}^x\sin 2x$

Aufgabe 14.16

a) $\ddot{x}(t)+16x(t)=F\sin 5t,\quad x(0)=\dot{x}(0)=0$

homogen: $\lambda^2+16=0,\quad \lambda_{1/2}=\pm 4\mathrm{i},\quad x_{\text{hom}}=A\cos 4t+B\sin 4t$

inhomogen: 5i ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms,

also keine Resonanz,
Ansatz:
$$\begin{aligned}
x(t)&=C\cos 5t+D\sin 5t,\\
\dot{x}(t)&=-5C\sin 5t+5D\cos 5t,\\
\ddot{x}(t)&=-25C\cos 5t-25D\sin 5t,\\
\ddot{x}(t)+16x(t)&=-25C\cos 5t-25D\sin 5t+16C\cos 5t+16D\sin 5t\\
&=-9C\cos 5t-9D\sin 5t=F\sin 5t,
\end{aligned}$$
$$C=0,\ D=-\frac{F}{9},\quad x(t)=-\frac{F}{9}\sin 5t+A\cos 4t+B\sin 4t,$$
$$\dot{x}(t)=-\frac{5F}{9}\cos 5t-4A\sin 4t+4B\cos 4t,$$
$$x(0)=A=0,\quad \dot{x}(0)=-\frac{5F}{9}+4B=0,\quad B=\frac{5F}{36},$$
$$\underline{\underline{x(t)=}}-\frac{5F}{9}\sin 5t+\frac{5F}{36}\sin 4t=\underline{\underline{F\frac{5\sin 4t-4\sin 5t}{36}}}$$

b) Der Resonanzfall würde vorliegen, wenn die rechte Seite die Form $\mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos\beta t+B\sin\beta t)$ hat, wobei $\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms der homogenen Gleichung sind, also $\alpha\pm\beta\mathrm{i}=\pm 4\mathrm{i}$, d.h. bei rechter Seite der Form $A\cos 4t+B\sin 4t$ (Erregung mit Frequenz der freien Schwingung).

Dann wäre der Ansatz mit t zu multiplizieren: $Ct\cos 4t+Dt\sin 4t$. Die Lösung würde also die Form Konstante $*\ t\ *$ Winkelfunktion haben, ihre Amplitude also mit wachsendem t beliebig groß werden, was zur Zerstörung des Systems führen würde.

Aufgabe 14.18

a) $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 6 & -11 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(6-\lambda)+6-11\lambda = -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0$

$\lambda_1 = 1, \quad (\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6):(\lambda-1) = \lambda^2-5\lambda+6\ , \ \lambda_{2/3} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}-\frac{24}{4}} = 2; 3$

$$\begin{array}{l} \underline{\lambda^3-\ \lambda^2} \\ \quad -5\lambda^2+11\lambda-6 \\ \quad \underline{-5\lambda^2+\ 5\lambda} \\ \qquad\qquad 6\lambda-6 \end{array}$$

Eigenvektoren

$$\text{zu } \lambda=1: \begin{array}{rrr} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \text{zu } \lambda=2: \begin{array}{rrr} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 4 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 4 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{array} \qquad \text{zu } \lambda=3: \begin{array}{rrr} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -9 & 3 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\text{EV } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{EV } B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{EV } C \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

b) Lösung des Differenzialgleichungssystems:

$$\vec{x}(t) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + C \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\vec{x}(0) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 9 & 15 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 11 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$A=2,\ B=1,\ C=1,\ \text{ d.h. }\quad \vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{t}+\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}+\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}\mathrm{e}^{3t}$$

Aufgabe 14.19

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & -1\\ 3 & -5-\lambda & -3\\ 2 & -4 & -1-\lambda\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(2-\lambda)(5+\lambda)(1+\lambda)+12+12-2(5+\lambda)-12(2-\lambda)-6(1+\lambda)\\&=(2-\lambda)(5+6\lambda+\lambda^2)+24-10-2\lambda-24+12\lambda-6-6\lambda\\&=10+12\lambda+2\lambda^2-5\lambda-6\lambda^2-\lambda^3-16+4\lambda=-\lambda^3-4\lambda^2+11\lambda-6\\&=0\end{aligned}$$

$\lambda^3+4\lambda^2-11\lambda+6=0$, $\lambda_1=1$ offensichtlich, $(\lambda^3+4\lambda^2-11\lambda+6):(\lambda-1)=\lambda^2+5\lambda-6$,

$$\begin{array}{r}\lambda^3\ -\lambda^2\qquad\qquad\\ \hline 5\lambda^2-11\lambda+6\\ 5\lambda^2\ -5\lambda\qquad\\ \hline -6\lambda+6\\ -6\lambda+6\\ \hline 0\end{array}$$

$$\lambda_{2/3}=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{24}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{7}{2}=1,-6$$

zu $\lambda_{1/2}=1$:

$$\begin{array}{rrr}1&-2&-1\\3&-6&-3\\2&-4&-2\\ \hline 1&-2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{array}$$

Eigenvektoren $A\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

zu $\lambda_3=-6$:

$$\begin{array}{rrr}8&-2&-1\\3&1&-3\\2&-4&5\\ \hline 1&-2&\frac{5}{2}\\3&1&-3\\8&-2&-1\\ \hline 1&-2&\frac{5}{2}\\0&7&-\frac{21}{2}\\0&14&-21\\ \hline 1&-2&\frac{5}{2}\\0&1&-\frac{3}{2}\\0&0&0\\ \hline 1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{3}{2}\\0&0&0\end{array}$$

Eigenvektor $\widetilde{C}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$

$$\vec{x}(t)=A\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{t}+B\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{t}+C\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-6t},\quad \vec{x}(0)=A\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\underline{\underline{\vec{x}(t)}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-6t} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-6t}}}$$

Aufgabe 14.21

homogen: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$, $\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$, $\lambda_{1/2} = 2, -2$,

EV zu $\lambda_1 = 2$: $\begin{array}{cc} -2 & -2 \\ -2 & -2 \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$ EV $C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2 = -2$: $\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{array}$ EV $D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}_{\text{hom}}(t) = C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}$$

inhomogen: rechte Seite $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}$, $\lambda = 3 \neq \pm 2$, keine Resonanz,

Ansatz: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}$, $\dot{\vec{x}}(t) = 3 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}$

$$3 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}, \quad \begin{array}{l} 3a_1 = -2a_2 \\ 3a_2 = -2a_1 + 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3a_1 + 2a_2 = 0 \\ 2a_1 + 3a_2 = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6a_1 + 4a_2 = 0 \\ 6a_1 + 9a_2 = 6 \end{array} \quad 5a_2 = 6, \ a_2 = \frac{6}{5}, \ a_1 = -\frac{2}{3} a_2 = -\frac{4}{5},$$

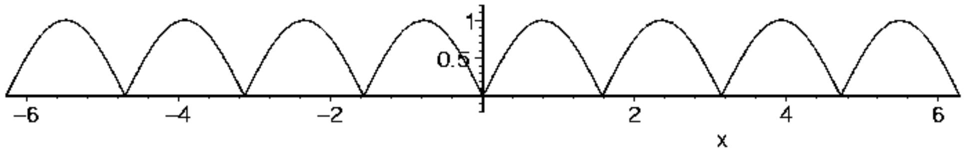
$$\underline{\underline{\vec{x}(t) = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}}}$$

19.15 Fourierreihen

Aufgabe 15.1

siehe Folien Abbildungen 20.11 und 20.12

Aufgabe 15.3

a) 

b) $T = \frac{\pi}{2}$

c) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos 4kx + b_k \sin 4kx)$ mit

$a_k = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x| \cos 4kx \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 4kx \mathrm{d}x,$

$b_k = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x| \sin 4kx \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin 4kx \mathrm{d}x$

Funktion gerade $\implies$ $b_k = 0$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)) \implies$

$\sin 2x \cos 4kx = \frac{1}{2}(\sin(2-4k)x + \sin(2+4k)x) = \frac{1}{2}(\sin(4k+2)x - \sin(4k-2)x)$

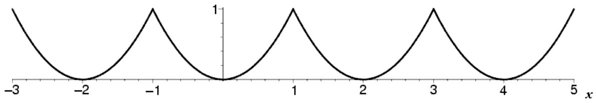
$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4k+2)x\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4k-2)x\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{\cos(4k+2)x}{4k+2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi}\frac{\cos(4k-2)x}{4k-2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{\cos(2k+1)\pi - 1}{4k+2} + \frac{2}{\pi}\frac{\cos(2k-1)\pi - 1}{4k-2} = -\frac{2}{\pi}\frac{-2}{4k+2} + \frac{2}{\pi}\frac{-2}{4k-2} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}
\end{aligned}$$

$a_0 = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{-1} = \frac{4}{\pi}$, also $|\sin 2x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\cos 4kx$

d) Da $f(x)$ stetig ist, konvergiert die Fourierreihe überall. Für $x = 0$ ergibt sich

$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, also $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 15.4

a) 

b) Periodenlänge 2, $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x)$,

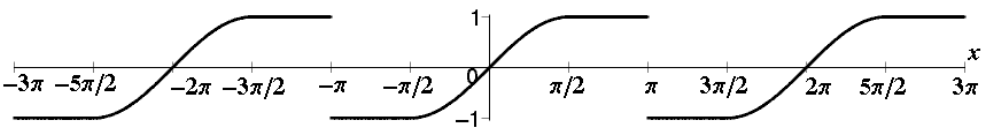
$a_k = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\cos k\pi x\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \cos k\pi x \mathrm{d}x,\quad b_k = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\sin k\pi x\mathrm{d}x = 0$, da gerade

$k \geq 1: \quad \int x^2 \cos k\pi x\mathrm{d}x = x^2\frac{\sin k\pi x}{k\pi} - 2\int x\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\mathrm{d}x$

$$= x^2\frac{\sin k\pi x}{k\pi} - 2\left(-x\frac{\cos k\pi x}{(k\pi)^2} + \int \frac{\cos k\pi x}{(k\pi)^2}\mathrm{d}x\right)$$
$$= x^2\frac{\sin k\pi x}{k\pi} + 2x\frac{\cos k\pi x}{(k\pi)^2} - 2\frac{\sin k\pi x}{(k\pi)^3}$$
$$a_k = \left[x^2\frac{\sin k\pi x}{k\pi} + 2x\frac{\cos k\pi x}{(k\pi)^2} - 2\frac{\sin k\pi x}{(k\pi)^3}\right]_{-1}^{1} = 4\frac{\cos k\pi}{(k\pi)^2} = 4\frac{(-1)^k}{(k\pi)^2}$$
$$k=0: \quad a_0 = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$
$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos k\pi x$$
c) $f(0) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \underline{\underline{-\frac{\pi^2}{12}}}$

Aufgabe 15.5

a)



b) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2} a_k\cos kx + b_k\sin kx, \quad f(x)$ ungerade $\Longrightarrow \; a_k = 0,$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x \text{ (da ungerade)}$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin kx\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(k-1)x - \cos(k+1)x)\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x$$
$$k=1: \quad b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}(-1) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}$$

$$k=2: \quad b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x - \cos 3x)\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\sin x - \frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}(1-\frac{-1}{3}) - \frac{1}{\pi}(1-(-1)) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4}{3} - \frac{1}{\pi}2 = -\frac{2}{3\pi}$$
$$f(x) \approx (\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi})\sin x - \frac{2}{3\pi}\sin 2x$$

Aufgabe 15.6

Wir definieren eine Funktion $g(t)$ durch $g(t) = f(\frac{\pi}{2}+t)$, dann gilt
$g(-t) = f(\frac{\pi}{2}-t), \quad g(t+2\pi) = f(\frac{\pi}{2}+t+2\pi) = f(\frac{\pi}{2}+t) = g(t).$

$g(t)$ ist also eine 2π-periodische Funktion. Ihre Fourierentwicklung lautet
$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt$. Folglich ist

$$f(x) = g(x-\tfrac{\pi}{2})$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k(x-\tfrac{\pi}{2}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\tfrac{k\pi}{2}\cos kx + a_k \sin\tfrac{k\pi}{2}\sin kx).$$

In der Fourierentwicklung von $f(x)$ verschwinden folglich die Glieder, für die $\cos\frac{k\pi}{2}$ bzw. $\sin\frac{k\pi}{2}$ verschwinden. Somit sind die **ungeraden Kosinuskoeffizienten** und die **geraden Sinuskoeffizienten** mit Sicherheit gleich 0.

Tatsächlich sind ja $\cos(2n+1)x$ und $\sin 2nx$ bezüglich $x=\frac{\pi}{2}$ ungerade, während $\cos 2nx$ und $\sin(2n+1)x$ bezüglich $x=\frac{\pi}{2}$ gerade sind.

19.16 Methoden der numerischen Mathematik

Aufgabe 16.1

Lösung der nichtlinearen Gleichung $f(x)=0$
$\Longleftrightarrow \quad x = x - f(x)$ (iterierfähige Gestalt: x aus sich selbst zu berechnen)

Wir setzen $F(x)=x-f(x)$ und suchen die Lösung von $x^*=F(x^*) \Leftrightarrow f(x^*)=0$.

Gilt $x^*=F(x^*)$, so heißt x^* „Fixpunkt" der Abbildung F.

„Picarditeration"	x_{n+1}	$=$	$F(x_n)$
Idee (Hoffnung)	$\downarrow$		$\downarrow$
	x^*	$=$	$F(x^*)$

Die gegebene Gleichung $x = \arccos x$ ist schon in iterierfähiger Gestalt, $x = \cos x$ ist äquivalent dazu.

$F_1(x) = \arccos x, \quad F_2(x) = \cos x$

	$x_{n+1}=F_1(x_n)$	$x_{n+1}=F_2(x_n)$
n	x_n	x_n
0	0.7	0.7
1	0.795399	0.764842
2	0.651131	0.721492
3	0.861723	0.750821
4	0.532141	0.731129
5	1.009669	0.744421
6	nicht def.	0.735480

a) **Banachscher Fixpunktsatz:** Ist F eine Selbstabbildung $F : D \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^n$, die für alle $x, y \in D$ der Kontraktionsbedingung $\|F(x)-F(y)\| \leq L\|x-y\|,\ L < 1$ genügt, so konvergiert die Iterationsfolge $x_{n+1} = F(x_n)$ für alle Startwerte $x_0 \in D$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* \in D$.

Bezüglich $F_2(x)$ betrachten wir z.B. das Intervall $D = [0.5, 1]$. Es gilt $F_2(0.5) = \cos 0.5 \approx 0.878,\ F_2(1) = \cos 1 \approx 0.540$. Ferner ist $F_2(x) = \cos x$ über $[0, \pi]$ und damit erst recht über D monoton fallend, also gilt für $x \in D \quad F_2(x) \in [\cos 1, \cos 0.5] \subset D$. $F_2(x)$ ist also über dem Intervall $D = [0.5, 1]$ eine Selbstabbildung.

Mittelwertsatz der Differenzialrechnung: Ist $F(x)$ über $[a, b]$ differenzierbar, so gilt für $x, y \in [a, b]$ mit $x < y \quad \dfrac{F(x) - F(y)}{x - y} = F'(\xi)$ für ein $\xi \in (x, y)$, d.h. der Anstieg der Sekante ist gleich dem Anstieg der Tangente an einem Zwischenpunkt.

Über $D = [0.5, 1]$ gilt also $\left|\dfrac{F_2(x) - F_2(y)}{x - y}\right| = |F_2'(\xi)| = |-\sin \xi| < \sin 1 < 1,$ so dass auch Kontraktivität und damit nach dem Banachschen Fixpunktsatz Konvergenz der Iteration $x_{n+1} = F_2(x_n) = \cos x_n,\ x_0 = 0.7$ gesichert ist.

Für $F_1(x) = \arccos x$ ist das nicht der Fall. $F_1(x)$ ist z.B. wegen $F_1(0.5) \approx 1.047$ über $[0.5, 1]$ keine Selbstabbildung, $F_1(0.5)$ liegt sogar außerhalb des Definitionsbereiches von $F_1(x)$. Das gilt analog auch für andere Gebiete D. Das braucht aber nicht im Einzelnen untersucht werden, da Kontraktivität in keinem Falle zu sichern ist. Es gilt nämlich immer $\left|\dfrac{F_1(x) - F_1(y)}{x - y}\right| = |F_1'(\xi)| = \left|-\dfrac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right| \geq 1.$

b) Iteration mit $F_2(x) = \cos x$:

n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n
0	0.7	5	0.744421	10	0.738436	15	0.739188
1	0.764842	6	0.735480	11	0.739584	16	0.739016
2	0.721492	7	0.741509	12	0.738749	17	0.739132
3	0.750821	8	0.737450	13	0.739312	18	0.739054
4	0.731129	9	0.740185	14	0.738932	19	0.739106

Nach dem 18. Iterationsschritt sind die Stellen 0.7391 sicher.

c) Newtonverfahren (Tangentenverfahren) zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(x)$:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}, \qquad x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Mit $f(x) = x - \cos x$ ergibt sich als Iterationsvorschrift $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$:

n	x_n
0	0.7
1	0.739436
2	0.739085
3	0.739085

Beim Newtonverfahren sind nur 3 Schritte erforderlich.

(quadratische Konvergenz des Newtonverfahrens bei guter Startnäherung)

Aufgabe 16.3

a) $F(0.5) = \dfrac{e^{0.5}}{3} \approx 0.54957$, $F(0.7) = \dfrac{e^{0.7}}{3} \approx 0.67125$, $F(x)$ monoton wachsend

$\Longrightarrow$ für $x \in [0.5, 0.7]$ gilt $F(x) \in [\dfrac{e^{0.5}}{3}, \dfrac{e^{0.7}}{3}] \subset [0.5, 0.7]$, also ist $F(x)$ Selbstabbildung

Nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung gibt es für $x, y \in [0.5, 0.7]$ mit $x < y$ ein ξ mit $x < \xi < y$ (also auch $\xi \in (0.5, 0.7)$), für das $\left|\dfrac{F(x) - F(y)}{x - y}\right| = |F'(\xi)| = \dfrac{e^{\xi}}{3} \leq \dfrac{e^{0.7}}{3} \approx 0.67125 < 1$ gilt. Damit gilt $|F(x) - F(y)| \leq \dfrac{e^{0.7}}{3}|x - y|$, also Kontraktivität.

b) $x_{n+1} = F(x_n) = \dfrac{e^{x_n}}{3}$

n	x_n	gerundet	n	x_n	gerundet	n	x_n	gerundet
0	.6	.6000	12	.61900237	.6190	24	.61906110	.6191
1	.60737293	.6074	13	.61902482	.6190	25	.61906117	.6191
2	.61186760	.6119	14	.61903871	.6190	26	.61906122	.6191
3	.61462394	.6146	15	.61904731	.6190	27	.61906124	.6191
4	.61632038	.6163	16	.61905263	.6191	28	.61906126	.6191
5	.61736682	.6174	17	.61905593	.6191	29	.61906127	.6191
6	.61801320	.6180	18	.61905797	.6191	30	.61906128	.6191
7	.61841279	.6184	19	.61905923	.6191	31	.61906128	.6191
8	.61865996	.6187	20	.61906002	.6191	32	.61906128	.6191
9	.61881289	.6188	21	.61906050	.6191	33	.61906128	.6191
10	.61890753	.6189	22	.61906080	.6191	34	.61906129	.6191
11	.61896611	.6190	23	.61906099	.6191	35	.61906129	.6191

Der Wert $\underline{\underline{0.6191}}$ wird nach 16 Iterationsschritten erreicht. Um sicher zu sein, muss man allerdings mehr Iterationsschritte ausführen oder z.B. $F(0.61905)$ und $F(0.61915)$ gegenüber stellen:

Es gilt $F(0.61905) = 0.61905430 > 0.61905$ und $F(0.61915) = 0.61911621 < 0.61915$. x und $F(x)$ schneiden sich also zwischen 0.61905 und 0.61915, also in dem Bereich, der auf 0.6191 gerundet wird.

c) Newtonverfahren für $f(x) = x - \frac{e^x}{3} = 0$: $\quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - \frac{e^{x_n}}{3}}{1 - \frac{e^{x_n}}{3}}$

n	x_n	gerundet
0	.6	.6000
1	.61877846	.6188
2	.61906122	.6191
3	.61906129	.6191
4	.61906129	.6191

Hier besteht schon nach 3 Schritten Sicherheit.

d) Für $F(x) = \ln 3x$ gilt $F'(\xi) = \frac{3}{3\xi} = \frac{1}{\xi}$. Da für die Lösung $x = 0.61906129$ $\;F'(x) \approx 1.62 > 1$ gilt, ist Kontraktivität nicht zu erreichen. Tatsächlich passiert Folgendes:

n	x_n
0	.6
1	.58778666
2	.56722108
3	.53160614
4	.46675989
5	.33667199
6	.00996614
7	−3.50994948
8	nicht definiert

Aufgabe 16.4

siehe Folie Abbildung 20.14

Aufgabe 16.6

q sei der effektive Aufzinsungsfaktor. Durch den Erwerb der Anleihe zum Nennwert 100 entsteht für den Käufer folgender Zahlungsfluss:

Zeitpunkt	aktuelle Zahlung		aufgezinst auf Zeitpunkt der Endfälligkeit	
	Ausgabe	Einnahme	Ausgabe	Einnahme
Kauf	91		$91q^9$	
nach 1 Jahr		4		$4q^8$
nach 2 Jahren		4		$4q^7$
...		...		...
nach 8 Jahren		4		$4q$
Endfälligkeit		104		104

Gleichsetzen von Ausgaben und Einnahmen führt auf

$$91q^9 = 4\sum_{n=0}^{8} q^n + 100 = 4\frac{q^9-1}{q-1} + 100.$$

$$91q^9(q-1) = 4(q^9-1) + 100(q-1), \quad 91q^{10} - 95q^9 - 100q + 104 = 0.$$

Newtonverfahren zur Nullstellenbestimmung dieses Polynoms:

$$q_{n+1} = q_n - \frac{91q_n^{10} - 95q_n^9 - 100q_n + 104}{910q_n^9 - 855q_n^8 - 100}$$

Da die Rendite auf Grund des niedrigen Verkaufskurses mit Sicherheit deutlich größer als 4 % ist, verwenden wir als Startnäherung z.B. $q_0 = 1.05$.

n	x_n
0	1.05
1	1.053027
2	1.052823
3	1.052822

Die wie üblich mit zwei Stellen nach dem Komma angegebene Rendite ist also 5.28 %.

Aufgabe 16.8

Skizze für die Bestimmung einer Startnäherung siehe Folie Abbildung 20.13

Aufgabe 16.9

Newtonverfahren (quadratisch konvergent) für $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^5 + y^5 - 3 \\ x^8 + 2y^8 - 3.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 10x^4 & 5y^4 \\ 8x^7 & 16y^7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10x_n^4 & 5y_n^4 \\ 8x_n^7 & 16y_n^7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x_n^5 + y_n^5 - 3 \\ x_n^8 + 2y_n^8 - 3.05 \end{pmatrix}$$

Zur Ermittlung einer Startnäherung wird die Zahl 3.05 auf der rechten Seite überschlagsweise durch 3 ersetzt, dann ist $x = y = 1$ offensichtlich Lösung des Gleichungssystems. Deshalb wird als Startnäherung $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verwendet.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -0.05 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rr|rr} 10 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & 16 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & \frac{1}{8} \\ 10 & 5 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & -15 & 1 & -\frac{10}{8} \\ \hline 1 & 2 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{15} & \frac{10}{120} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{5}{120} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{15} & \frac{10}{120} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{5\cdot 0.05}{120} \\ 1 + \frac{10\cdot 0.05}{120} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99791667 \\ 1.00416667 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

Allgemein gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ und damit

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{40x_n^4 y_n^4 (4y_n^3 - x_n^3)} \begin{pmatrix} 16y_n^7 & -5y_n^4 \\ -8x_n^7 & 10x_n^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_n^5 + y_n^5 - 3 \\ x_n^8 + 2y_n^8 - 3.05 \end{pmatrix}.$$

Das Durchrechnen dieses Algorithmus ergibt

n	x_n	y_n
0	1	1
1	0.99791667	1.00416667
2	0.99792722	1.00409476
3	0.99792722	1.00409473
4	0.99792722	1.00409473

.

Also hat das nichtlineare Gleichungssystem die Lösung $\underline{\underline{x = 0.99792722,\ y = 1.00409473}}$.

Aufgabe 16.10

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{x} + 3y^2 - 0.23 \\ 4x\sqrt{x} - 5y - 0.824 \\ z^3 + 6z^2 + 5z - 14.091 \end{pmatrix}, \quad f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{x}} & 6y & 0 \\ 6\sqrt{x} & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2 + 12z + 5 \end{pmatrix}$$

Ermittlung der Inversen der Jacobimatrix $f'(x,y,z)$:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
-\frac{1}{\sqrt{x}} & 6y & 0 & 1 & 0 & 0 \\
6\sqrt{x} & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 3z^2+12z+5 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -6\sqrt{x}y & 0 & -\sqrt{x} & 0 & 0 \\
0 & 36xy-5 & 0 & 6x & 1 & 0 \\
0 & 0 & 3z^2+12z+5 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -6\sqrt{x}y & 0 & -\sqrt{x} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \frac{6x}{36xy-5} & \frac{1}{36xy-5} & 0 \\
0 & 0 & 3z^2+12z+5 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{5\sqrt{x}}{36xy-5} & \frac{6\sqrt{x}y}{36xy-5} & 0 \\
0 & 1 & 0 & \frac{6x}{36xy-5} & \frac{1}{36xy-5} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3z^2+12z+5}
\end{array}
$$

Newtonschritt:

$$
\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{x_n}}{36x_ny_n-5} & \frac{6\sqrt{x_n}y_n}{36x_ny_n-5} & 0 \\ \frac{6x_n}{36x_ny_n-5} & \frac{1}{36x_ny_n-5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3z_n^2+12z_n+5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sqrt{x_n}+3y_n^2-0.23 \\ 4x_n\sqrt{x_n}-5y_n-0.824 \\ z_n^3+6z_n^2+5z_n-14.091 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{31} & \frac{6}{31} & 0 \\ \frac{6}{31} & \frac{1}{31} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.77 \\ -1.824 \\ -2.091 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2288387 \\ 0.9098065 \\ 1.1045500 \end{pmatrix}
$$

n	x_n	y_n	z_n
0	1	1	1
1	1.228838710	0.9098064516	1.104550000
2	1.210138342	0.9000877355	1.100008794
3	1.210000009	0.9000000064	1.100000000
4	1.210000000	0.8999999999	1.100000000
exakt	1.21	0.9	1.1

Aufgabe 16.14

a) Gesamtschrittverfahren

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \tfrac{1}{10}(18 - y_n - z_n) \\
y_{n+1} &= \tfrac{1}{10}(24 - 2x_n - z_n) \\
z_{n+1} &= \tfrac{1}{10}(17 - 2x_n - 2y_n)
\end{aligned}
$$

Einzelschrittverfahren

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \tfrac{1}{10}(18 - y_n - z_n) \\
y_{n+1} &= \tfrac{1}{10}(24 - 2x_{n+1} - z_n) \\
z_{n+1} &= \tfrac{1}{10}(17 - 2x_{n+1} - 2y_{n+1})
\end{aligned}
$$

b) 1. Zeile: $|10| > |1| + |1|$, 2. Zeile: $|10| > |2| + |1|$, 3. Zeile: $|10| > |2| + |2|$
Das starke Zeilensummenkriterium ist erfüllt, so dass beide Verfahren konvergieren.

c) Gaußalgorithmus:

$$
\begin{array}{ccc|c}
2 & 2 & 10 & 17 \\
2 & 10 & 1 & 24 \\
10 & 1 & 1 & 18 \\
\hline
1 & 1 & 5 & \frac{17}{2} \\
0 & 8 & -9 & 7 \\
0 & -9 & -49 & -67 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 5 & \frac{17}{2} \\
0 & 1 & -\frac{9}{8} & \frac{7}{8} \\
0 & 0 & -\frac{473}{8} & -\frac{473}{8} \\
\hline
1 & 1 & 5 & \frac{17}{2} \\
0 & 1 & -\frac{9}{8} & \frac{7}{8} \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\
0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\
0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

exakte Lösung: $x = 1.5,\ y = 2,\ z = 1$

Gesamtschrittverfahren

n	x_n	y_n	z_n
0	1	1	1
1	1.6	2.1	1.3
2	1.46	1.95	0.96

Einzelschrittverfahren

n	x_n	y_n	z_n
0	1	1	1
1	1.6	1.98	0.984
2	1.5036	2.00088	0.999104

Aufgabe 16.15

a) Gesamtschrittverfahren

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \tfrac{1}{8}(11 \qquad\quad -z_n) \\
y_{n+1} &= \tfrac{1}{8}(15 - 2x_n + z_n) \\
z_{n+1} &= \tfrac{1}{8}(27 - x_n - y_n)
\end{aligned}
$$

Einzelschrittverfahren

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \tfrac{1}{8}(11 \qquad\qquad -z_n \quad) \\
y_{n+1} &= \tfrac{1}{8}(15 - 2x_{n+1} + z_n \quad) \\
z_{n+1} &= \tfrac{1}{8}(27 - x_{n+1} - y_{n+1})
\end{aligned}
$$

b) 1. Zeile: $|8| > |0| + |1|$, 2. Zeile: $|8| > |2| + |-1|$, 3. Zeile: $|8| > |1| + |1|$
Das starke Zeilensummenkriterium ist erfüllt, so dass beide Verfahren konvergieren.

c) Vernachlässigung der Diagonalelemente führt auf $8x_0 = 11,\ 8y_0 = 15,\ 8z_0 = 27$, so dass sich die Startnäherung $\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.375 \\ 1.875 \\ 3.375 \end{pmatrix}$ ergibt.

d) Gesamtschrittverfahren

n	x_n	y_n	z_n
0	1.37500000	1.87500000	3.37500000
1	0.95312500	1.95312500	2.96875000
2	1.00390625	2.00781250	3.01171875

Einzelschrittverfahren

n	x_n	y_n	z_n
0	1.375000000	1.875000000	3.375000000
1	0.953125000	2.058593750	2.998535156
2	1.000183106	1.999771119	3.000005722

Gaußalgorithmus:

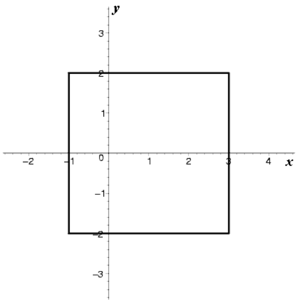
$$
\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 8 & 27 \\
2 & 8 & -1 & 15 \\
8 & 0 & 1 & 11 \\
\hline
1 & 1 & 8 & 27 \\
0 & 6 & -17 & -39 \\
0 & -8 & -63 & -205 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 8 & 27 \\
0 & 1 & -\frac{17}{6} & -\frac{39}{6} \\
0 & 0 & -\frac{514}{6} & -\frac{1542}{6} \\
\hline
1 & 1 & 8 & 27 \\
0 & 1 & -\frac{17}{6} & -\frac{39}{6} \\
0 & 0 & 1 & 3 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 3 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 3
\end{array}
$$

exakte Lösung: $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

19.17 Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

Aufgabe 17.6

a)

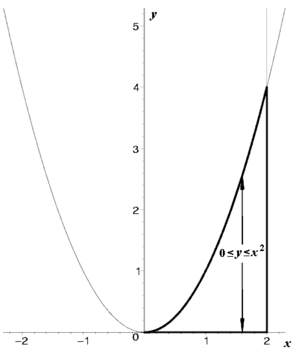


$$G = \{(x,y) :\ -1 \le x \le 3,\ -2 \le y \le 2\},$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{3} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2}\left[\tfrac{x^2}{2}y^2\right]_{-1}^{3}\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2}(\tfrac{9}{2}-\tfrac{1}{2})y^2\mathrm{d}y$$

$$= 4\int_{-2}^{2} y^2\mathrm{d}y = \tfrac{4}{3}y^3\Big|_{-2}^{3} = \tfrac{4}{3}16 = \underline{\underline{\tfrac{64}{3}}}$$

b)

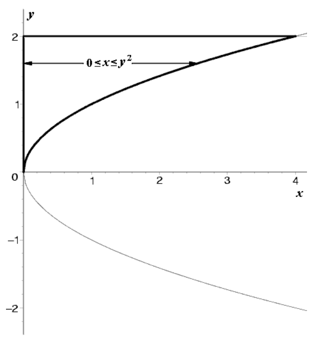


$$G = \{(x,y) :\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\},$$

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{x^2} xy^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{0}^{2}\left[x\tfrac{y^3}{3}\right]_{0}^{x^2}\mathrm{d}x = \int_{0}^{2}\tfrac{x^7}{3}\mathrm{d}x$$

$$= \tfrac{x^8}{24}\Big|_0^2 = \tfrac{256}{24} = \underline{\underline{\tfrac{32}{3}}}$$

c)



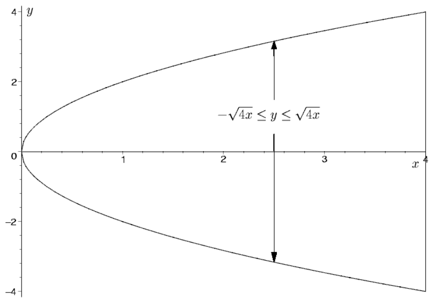
$$G = \{(x,y) :\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le y^2\},$$

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{y^2} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{2}\left[\tfrac{x^2}{2}y^2\right]_{0}^{y^2}\mathrm{d}y = \int_{0}^{2}\tfrac{y^6}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \tfrac{y^7}{14}\Big|_0^2 = \tfrac{128}{14} = \underline{\underline{\tfrac{64}{7}}}$$

Aufgabe 17.7

a)



$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{4x}}^{\sqrt{4x}} (x+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^4 xy + \frac{y^3}{3}\Big|_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^4 (2x\sqrt{x}+\tfrac{8}{3}x\sqrt{x}+2x\sqrt{x}+\tfrac{8}{3}x\sqrt{x})\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^4 \frac{28}{3}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{56}{15}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 =$$

$$\frac{56}{15}2^5 = \frac{1792}{15} \approx 119.46$$

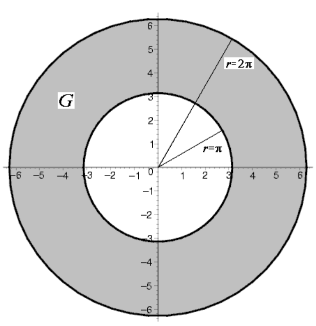
b) Die Parabel und die Gerade schneiden sich für $x = \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{y+12}{2}$, d.h. für $(x,y) = (4,-4)$ und $(9,6)$.

$$\int_{-4}^{6} \int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y+12}{2}} (x+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-4}^{6} \left[\frac{x^2}{2}+xy^2\right]_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y+12}{2}} \mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{32}\int_{-4}^{6} (-9y^4+16y^3+196y^2+96y+576)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{32}\left[(-\frac{9}{5}y^5+4y^4+\frac{196}{3}y^3+48y^2+576y)\right]_{-4}^{6} =$$

$$\frac{1}{32}\left(\frac{52416}{5}-(-\frac{42752}{15})\right) = \frac{200000}{15\cdot 32} = \frac{1250}{3}$$

Aufgabe 17.9



$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad x^2+y^2 = r^2,$$

$$G = \{(r,\varphi) : \pi \le r \le 2\pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi\},$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$= (r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$\iint_G \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_G \sin r\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_\pi^{2\pi} r\sin r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-r\cos r + \int\cos r\mathrm{d}r\right]_\pi^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-r\cos r + \sin r\right]_\pi^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}(-2\pi - (-\pi(-1)))\mathrm{d}\varphi$$

$$= -3\pi\,\varphi\big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{-6\pi^2}}$$

Aufgabe 17.10

b) siehe Abbildung bei Aufgabe K3/4–4 Seite 229

Aufgabe 17.11

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 \sin(x+y+z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^2 [-\cos(x+y+z)]_{z=0}^{z=3}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \int_0^2 (\cos(x+y) - cos(x+y+3))\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 [\sin(x+y) - \sin(x+y+3)]_{y=0}^{y=2}\, \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 (\sin(x+3) - \sin(x+5) - \sin x + \sin(x+3))\mathrm{d}x =$$

$$[-\cos(x+2) + \cos(x+5) + \cos x - \cos(x+3)]_{x=0}^{x=1} =$$

$$-\cos 3 + \cos 6 + \cos 1 - \cos 4 + \cos 2 - \cos 5 - \cos 0 + \cos 3 =$$

$$\cos 6 - \cos 5 - \cos 4 + \cos 2 + \cos 1 - \cos 0 \approx 0.4543$$

Klausur Mathematik I vom 14. Februar 1997 von Prof. Schneider

K1/1-1

Fallunterscheidung:

$x < \frac{2}{3}$: $3(2-x) > -2(3x-2),\ 6-3x > -6x+4,\ 3x > -2,\ x > -\frac{2}{3}$

$x = \frac{2}{3}$: nicht definiert

$\frac{2}{3} < x < 2$: $3(2-x) < -2(3x-2),\ 6-3x < -6x+4,\ 3x < -2,\ x < -\frac{2}{3}$: Widerspr.

$2 \le x$: $3(x-2) < -2(3x-2),\ 3x-6 < -6x+4,\ 9x < 10,\ x < \frac{10}{9}$: Widerspr.

Lösung: $\{x \in \mathbb{R} : -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}\}$

K1/1-2

a) Gaußscher Algorithmus:

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\
3 & 1 & 0 & 2 & 10 \\
2 & 3 & 5 & 1 & 17 \\
2 & 4 & 6 & 10 & 10 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\
0 & -5 & -9 & -10 & -8 \\
0 & -1 & -1 & -7 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\
0 & 1 & 1 & 7 & -5 \\
0 & -5 & -9 & -10 & -8 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\
0 & 1 & 1 & 7 & -5 \\
0 & 0 & -4 & 25 & -33 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\
0 & 1 & 1 & 7 & -5 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{25}{4} & \frac{33}{4} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 0 & 10 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}$$

Lösung: $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = -1$

b) Mit λ und μ ergibt sich für die letzte Zeile in obigem Schema

$0\ \ 0\ \ 0\ \ \lambda - 8 \mid \mu - 12$, dies entspricht $(\lambda-8)x_4 = \mu-12$, ansonsten bliebt das Schema bei der Erzeugung der oberen Dreiecksmatrix unverändert. Also ist das Gleichungssystem für $\lambda \neq 8$ eindeutig lösbar, für $\lambda = 8,\ \mu = 12$ mehrdeutig lösbar (4. Zeile $= 2 \times 1$. Zeile) und für $\lambda = 8,\ \mu \neq 12$ unlösbar.

K1/1-3

a) Da die Geraden nicht parallel sind, liegen sie genau dann in einer Ebene, wenn sie sich schneiden. Sie schneiden sich genau dann, wenn es Parameter s und t gibt, für die gilt:

$$\begin{array}{rcll} 2s &=& -4 & \Longrightarrow\ s=-2 \\ -1+\ s &=& -1+\ t & \Longrightarrow\ t=-2 \\ s &=& 10+6t & \text{ist für } s=t=-2 \text{ auch erfüllt} \end{array}$$

Also gibt es einen Schnittpunkt (nämlich $(-4,-3,-2)$), so daß die Geraden in einer Ebene liegen.

b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rcll} x &=& 2s & \Longrightarrow\ s=\frac{x}{2} \\ y &=& -1+\ s+\ t & \Longrightarrow\ t=y+1-s=y+1-\frac{x}{2} \\ z &=& s+6t & \Longrightarrow\ z=\frac{x}{2}+6y+6-3x,\quad 2z=12-5x+12y \end{array}$$

Also lautet die Ebenengleichung in parameterfreier Form: $5x-12y+2z=12$.

oder:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = 0, \text{ d.h. } 5x-12y+2z=12$$

c) Die Gerade, auf der das Lot liegt, hat die Gleichung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sie schneidet die Ebene für t mit $5(\frac{9}{2}+5t) - 12(-5-12t) + 2(8+2t) = 12$, d.h. $173t = -\frac{173}{2}$, $t = -\frac{1}{2}$. Den Lotfußpunkt erhält man durch $\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$, d.h., es handelt sich um den Punkt $(2,1,7)$. Der Abstand des Punktes P vom Lotfußpunkt beträgt $\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{173} \approx 6.576$.

K1/1-4

Die Eigenwerte ergeben sich aus $\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = 0$,
d.h. $\lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}: \quad \begin{array}{rr|} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \text{normierter Eigenvektor } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}: \quad \begin{array}{rr|} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \text{normierter Eigenvektor } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Hauptachsentransformation erfolgt demzufolge durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}(x' \;\; y')\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}(x' \;\; y')\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x' \;\; y')\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 6.$$

Es handelt sich also um die Ellipse $\frac{x'^2}{2^2} + \frac{y'^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1$ mit den Halbachsen 2 und $2\sqrt{3}$.

Aus $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$ erhält man durch Addition bzw. durch Subtraktion $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$, so daß die Koordinatenachsen des transformierten Systems wegen $y' = 0 \Leftrightarrow y = x$, $x' = 0 \Leftrightarrow y = -x$ aus denen des Ausgangssystems durch Drehung um 45° entstehen.

Zeichnung der Ellipse mit beiden Koordinatenkreuzen

K1/1-5

Durch die Einführung von Schlupfvariablen für die beiden Ungleichungen erhält man als

Normalform:
$$\begin{array}{rrrrrcr} 3x_1 & +3x_2 & -\; x_3 & & & \to & \max \\ x_1 & +2x_2 & -\; x_3 & & & = & 3 \\ & -\; x_2 & +2x_3 & +u_1 & & = & 15 \\ & -5x_2 & +3x_3 & & +u_2 & = & 12 \\ x_1, & x_2, & x_3, & u_1, & u_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Simplexschema:

BV	c_B	x_1 3	x_2 3	x_3 −1	u_1 0	u_2 0	x_B	θ
x_1	3	1	2	−1	0	0	3	–
u_1	0	0	−1	2	1	0	15	$\frac{15}{2}$
u_2	0	0	−5	3	0	1	12	$\boxed{4}$
		0	3	$\boxed{-2}$	0	0	9	
x_1	3	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	7	21
u_1	0	0	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	7	$\boxed{3}$
x_3	−1	0	$-\frac{5}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	4	–
		0	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	0	0	$\frac{2}{3}$	17	
x_1	3	1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	6	
x_2	3	0	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	3	
x_3	−1	0	0	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	9	
		0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	18	

Da alle Optimalitätsindikatoren nichtnegativ sind, handelt es sich um das Optimum: $x_1^* = 6,\ x_2^* = 3,\ x_3^* = 9$, optimaler Zielfunktionswert: $z^* = 18$.

oder: Elimination von x_1 durch $x_1 = 3 - 2x_2 + x_3$ führt zu der graphisch lösbaren Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rrcr} -3x_2 & +2x_3+9 & \to & \max \\ -\ x_2 & +2x_3 & \leq & 15 \\ -5x_2 & +3x_3 & \leq & 12 \\ x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Der zulässige Bereich ist begrenzt durch die positive x_2–Achse, durch die Punkte $(0,0)$, $(0,4)$ und $(3,9)$ sowie von dem letzten Punkt aus durch die Gerade $-x_2 + 2x_3 = 15$. Die Parallelverschiebung der Niveaulinie (z.B.) $-3x_2 + 2x_3 = 6$ führt auf die optimale Lösung $x_2^* = 3,\ x_3^* = 9 \implies x_1^* = 6,\ z^* = 18$.

oder: Elimination von x_3 durch $x_3 = x_1 + 2x_2 - 3$ führt zu der graphisch lösbaren Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rrcrl} 2x_1 & +\ x_2+3 & \to & \max & \\ 2x_1 & +3x_2 & \leq & 21 & \\ 3x_1 & +\ x_2 & \leq & 21 & \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 & \text{(vgl. Aufgabe 6!)} \end{array}$$

Der zulässige Bereich ist begrenzt durch die Punkte $(0,0)$, $(0,7)$, $(6,3)$ und $(7,0)$. Die Parallelverschiebung der Niveaulinie (z.B.) $2x_1 + x_2 = 2$ führt auf die optimale Lösung $x_1^* = 6,\ x_2^* = 3 \implies x_3^* = 9,\ z^* = 18$.

K1/1-6

Sei x_1 : Anzahl der herzustellenden Erzeugnisse E_1,
x_2 : Anzahl der herzustellenden Erzeugnisse E_2.

Dann lautet das Modell:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{Gewinn:} & 2x_1 & + & x_2 & \rightarrow & \max \\
\text{Rohstoff } R_1: & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \\
\text{Rohstoff } R_2: & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 21 \\
\text{Rohstoff } R_3: & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 21 \\
\text{Nichtnegativität:} & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Zusatzaufgabe:

Durch die Einführung von Schlupfvariablen für die drei Ungleichungen erhält man als Normalform:

$$\begin{array}{rcrcccccr}
2x_1 & + & x_2 & & & & & \rightarrow & \max \\
x_1 & + & 3x_2 & +u_1 & & & & = & 18 \\
2x_1 & + & 3x_2 & & +u_2 & & & = & 21 \\
3x_1 & - & x_2 & & & +u_3 & & = & 21 \\
x_1, & & x_2, & u_1, & u_2, & u_3 & & \geq & 0
\end{array}$$

Simplexschema:

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3		
BV	c_B	2	1	0	0	0	x_B	θ
u_1	0	1	3	1	0	0	18	18
u_2	0	2	3	0	1	0	21	$\frac{21}{2}$
u_3	0	3	1	0	0	1	21	$\boxed{7}$
		$\boxed{-2}$	-1	0	0	0	0	
u_1	0	0	$\frac{8}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	11	$\frac{33}{8}$
u_2	0	0	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	7	$\boxed{3}$
x_1	2	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	7	21
		0	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	0	0	$\frac{2}{3}$	14	
u_1	0	0	0	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{3}{7}$	3	
x_2	1	0	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	3	
x_1	2	1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	6	
		0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	15	

Da alle Optimalitätsindikatoren nichtnegativ sind, handelt es sich um das Optimum: $x_1^* = 6,\ x_2^* = 3$, optimaler Zielfunktionswert: $z^* = 15$.

oder: graphische Lösung:

Der zulässige Bereich ist begrenzt durch die Punkte $(0,0)$, $(0,6)$, $(3,5)$, $(6,3)$ und $(7,0)$. Die Parallelverschiebung der Niveaulinie (z.B.) $2x_1 + x_2 = 2$ führt auf die optimale Lösung $x_1^* = 6,\ x_2^* = 3 \implies z^* = 15$.

Kapitel 20
Folien

Kapitel 21

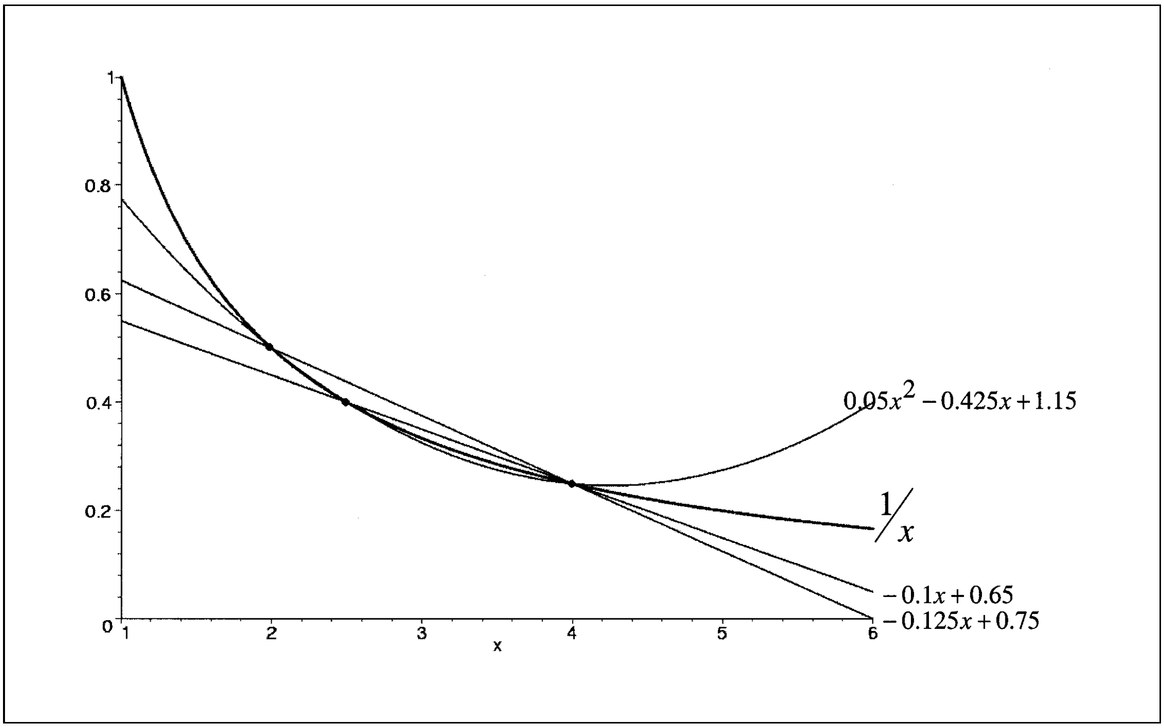


Abbildung 20.1: zu Aufgabe 9.2: Interpolation (vgl. auch Abb. 20.15)

Lehrveranstaltungsablauf

21.1 Mathematik I – Wintersemester 1999/2000

Vorlesung

Grundlagen, Logik, Mengenlehre, reelle und komplexe Zahlen, Vektoren und Matrizen, lineare Gleichungssysteme, Gauß-Algorithmus, Eigenwerte und Hauptachsentransformation, Geraden und Ebenen, lineare Optimierungsaufgaben, Simplexalgorithmus, Folgen und Reihen

Übungen

1. Grundlagen: 6, 8, 9 a-d), 12, 14, 18, 20
2. Komplexe Zahlen, Vektoren und Matrizen: $21, 22, 23, 27, 28, 1, 1, 2, 3$
3. Lineare Unabhängigkeit, Gleichungssysteme: 10, 3, 20, 16, 11
4. Gaußalgorithmus, Inverse Matrix: 12, 15, 28, 26 c,d), 13

5. Determinanten, Eigenwerte, Orthogonalität: 1, 3, 4, 5, 6
6. Hauptachsentransformation: 1, 3, 8, 5
7. Lineare Optimierung: 2, 4 (I), 5

Hausübungen

1. Grundlagen, Komplexe Zahlen, Matrizen: 15, 29, 7, 9
2. Lineare Algebra: 18 a-c,f,g), 14, 21, 29
3. Orthogonalität, Eigenwerte, Hauptachsentransformation: 8, 7, 2, 6
4. Lineare Optimierung: 1, 4 (II)-(IV), 7

21.2 Mathematik II – Sommersemester 2000

Vorlesung

Differenzial- und Integralrechnung einer Variablen, Kurven im Raum, Funktionen mehrerer Veränderlicher, Differenziation, Taylorscher Satz, Extremalprobleme mehrerer Veränderlicher ohne und mit Nebenbedingungen

Übungen

1. Zinsrechnung, Reihen, Rentenrechnung: 1, 2; Bsp. 8.5; 5, 2; End- und Barwert vorschüssiger Renten; 8
2. Funktionen, Differenziation, Extremwerte: 10, 11, 4, 5 a-e,g,h), 7, 8, 9
3. Kurvendiskussion, l'Hospitalsche Regel, Taylorreihen: 13 a), 14, 24, 25 a,h,k), 18, 19, 21
4. Integration, Partialbruchzerlegung: 1, 4, 3, 7, 12, 6
5. Kurven im Raum, Kurvenintegrale: 1, 3, 7, 5, 4
6. Differenzialrechnung für mehrere Variable: 2, 5, 9, 10, 15, 14
7. Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen: 1, 2, 1, 4

Hausübungen

1. Folgen und Reihen, Finanzmathematik: 1, 4; Bsp. 8.2 mit Aufg. 3; Bsp. 8.12
2. Differenzialrechnung für eine Variable: 16, 10, 25 c,d,g,e,i), 23
3. Integralrechnung: 5 a,f,g), 14 b), 13 a), 15 c), 16, 10, 8
4. Differenzialrechnung für mehrere Variable: 3, 8, 18, 5

21.3 Mathematik III – Wintersemester 2000/01

Vorlesung

Gewöhnliche Differenzialgleichungen, Systeme linearer Differenzialgleichungen, Fourierreihen, Grundaufgaben der Numerik, Integration im $\mathbb{R}^n$, Integralsätze

Übungen

1. Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen; einfache Differenzialgleichungen: 12, 13, 22, 1, 2
2. Differenzialgleichungen: 3, 6, 5, 7 e), 9, 11 a-c)
3. Differenzialgleichungen und -gleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten: 13 c-d), 15, 17 a-b), 24, 20
4. Differenzialgleichungssysteme (Fortsetzung); Fourierreihen: 23, 2, 1
5. Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen und Gleichungssysteme: 2, 5 c), 7, 8, 4
6. Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme, Interpolation und Approximation: 12, 13, 2, 10
7. Mehrdimensionale Integration: 1, 2, 9, 13, 14, 15, 4

Hausübungen

1. Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen; Trennung der Veränderlichen: 14, 20, 17, 7 c,d,f)
2. Differenzialgleichungen und -gleichungssysteme: 8, 10, 14 a,f,c), 18
3. Fourierreihen; Iterationsverfahren: 3, 6, 1, 6
4. Numerische Lösung von Gleichungssystemen; Mehrdimensionale Integration: 10, 14, 11, 7

Literaturverzeichnis

[1] *Luderer, B.; Würker, U.*: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. B.G. Teubner, Stuttgart. 4. Aufl. 2001, ISBN 3-519-32098-3

[2] *Luderer, B.; Paape, C.; Würker, U.*: Arbeits- und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik – Beispiele – Aufgaben – Formeln. Teubner Studienbücher Mathematik. B.G. Teubner, Stuttgart. 2. Aufl. 2001, ISBN 3-519-12573-0

[3] *Meyberg, K.; Vachenauer, P.*: Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung. Springer, 2001, ISBN 3-540-41850-4

[4] *Meyberg, K.; Vachenauer, P.*: Höhere Mathematik 2. Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Fourier-Analyse, Variationsrechnung. Springer, 1999, ISBN 3-540-41851-2

[5] *Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.; Musiol, G.; Mühlig, H.*: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch. 5. Aufl. 2000, ISBN 3-8171-2015-X, 3-8171-2005-2

[6] *Luderer, B.; Nollau, V.; Vetters, K.*: Mathematische Formeln für Wirtschaftswissenschaftler. B.G. Teubner. 3. Aufl. 2000, ISBN 3-519-10247-1

[7] *Råde, L.; Westergren, B.*: Springers Mathematische Formeln. Taschenbuch für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Wirtschaftswissenschaftler. Springer, 2000, ISBN 3-540-67505-1

[8] Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Begründet von I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew. Herausgegeben von E. Zeidler. B.G. Teubner, Stuttgart, Leipzig 1996, ISBN 3-8154-2001-6

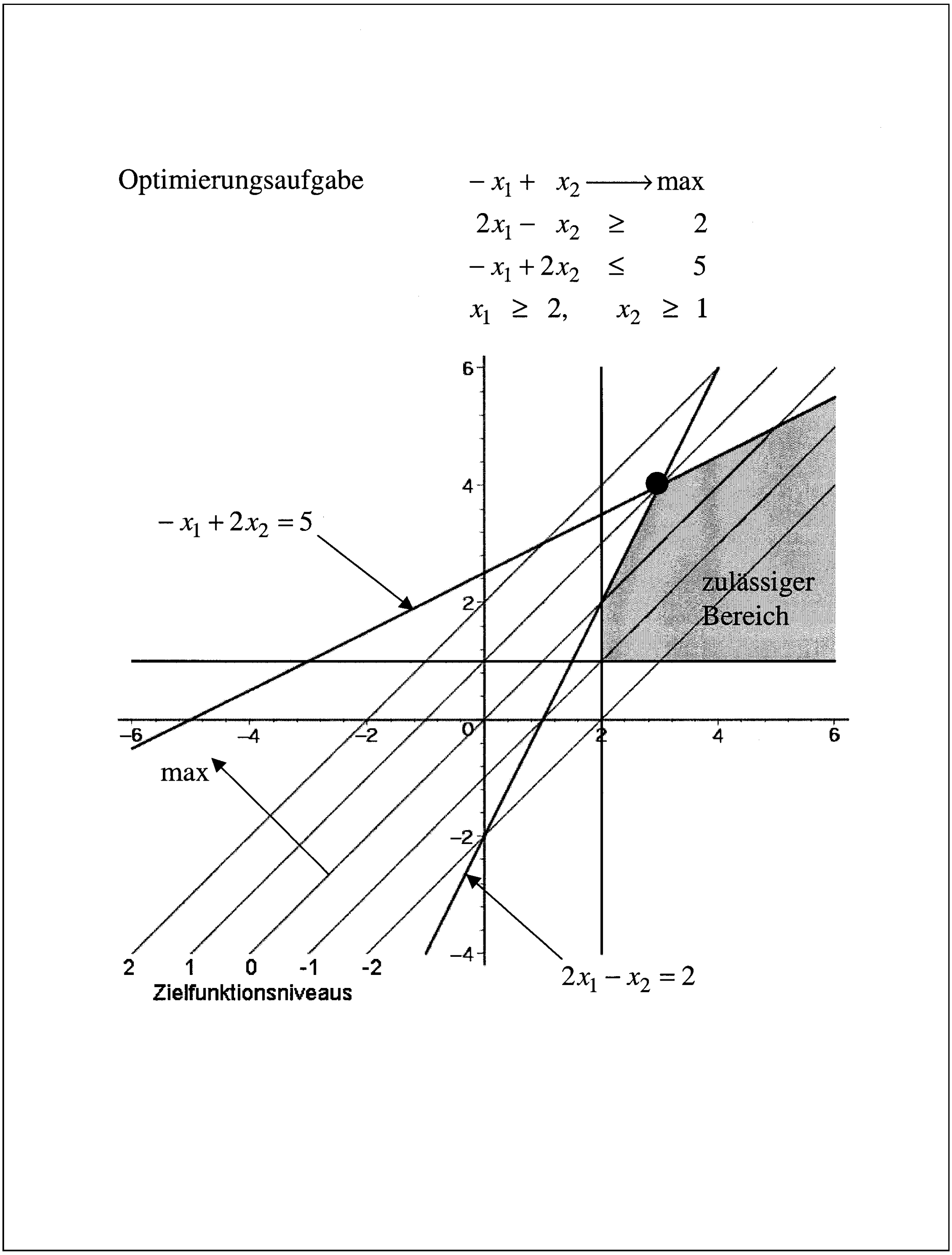
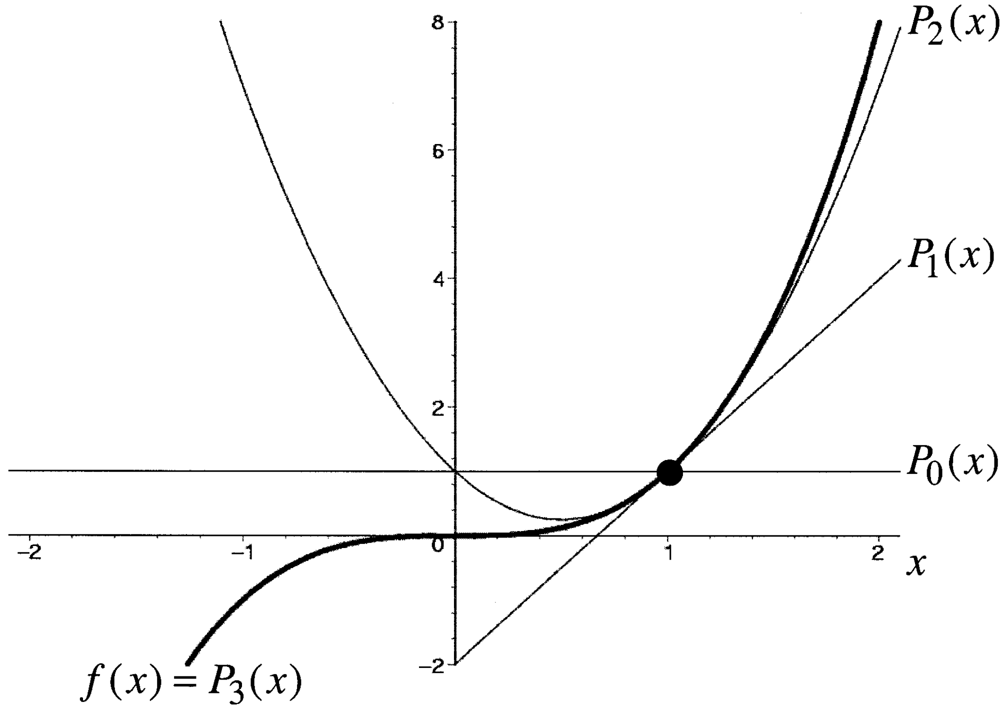


Abbildung 20.2: zu Aufgabe 6.4 (I): Grafische Lösung linearer Optimierungsaufgaben

Taylorentwicklung von $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 1$



$P_0(x) = 1$: Konstante

$P_1(x) = 3x - 2$: Gerade (Tangente)

$P_2(x) = 3x^2 - 3x + 1$: Parabel

$P_3(x) = x^3$: kubische Funktion

Abbildung 20.3: zu Aufgabe 9.18: Taylorentwicklung

Taylorentwicklung von $\sinh x$
an der Stelle $x_0 = 0$:

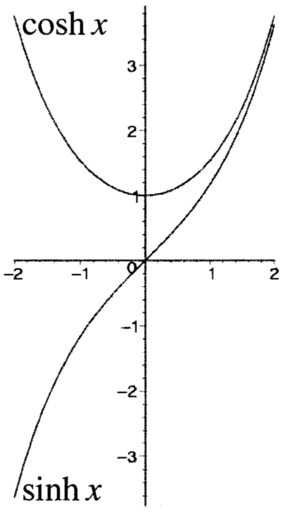
$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$P_0(x) = 0,$

$P_1(x) = P_2(x) = x,$

$$P_3(x) = P_4(x) = x + \frac{x^3}{3!},$$

$$P_5(x) = P_6(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$



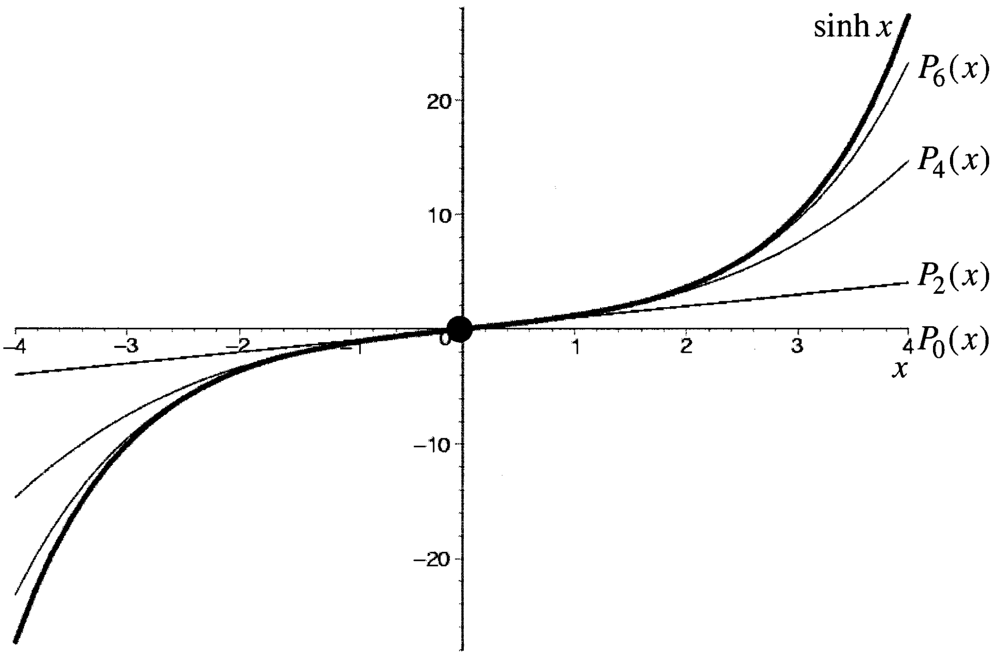


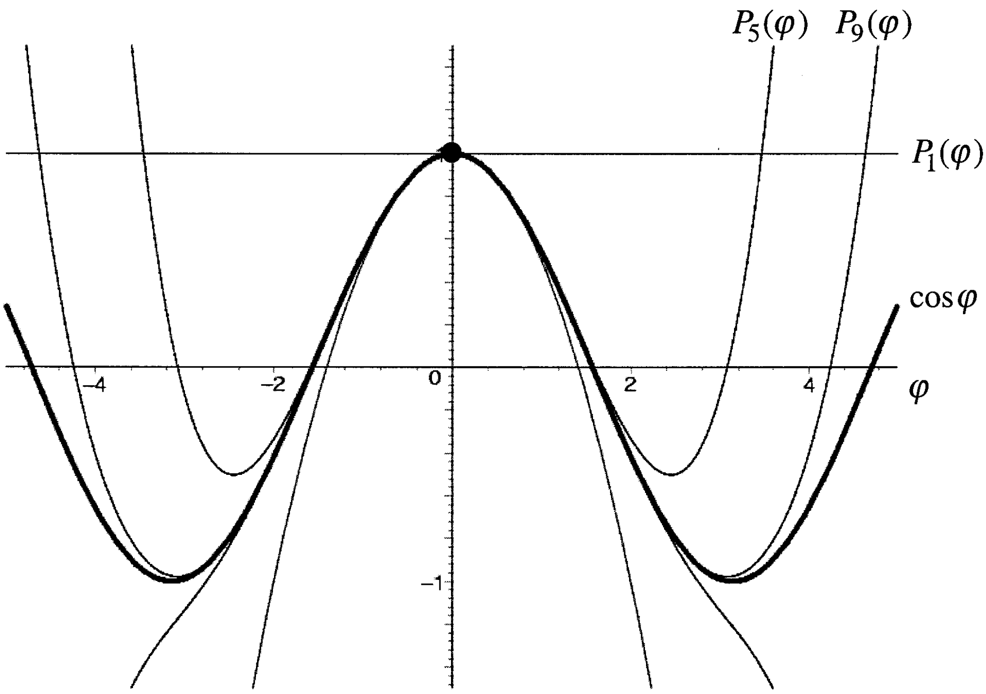
Abbildung 20.4: zu Aufgabe 9.19: Taylorentwicklung

Taylorentwicklung von $\cos\varphi$ an der Stelle $\varphi_0 = 0$:

$$\cos\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}$$

$$P_1(\varphi) = 1,\quad P_3(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2},\quad P_5(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24},$$

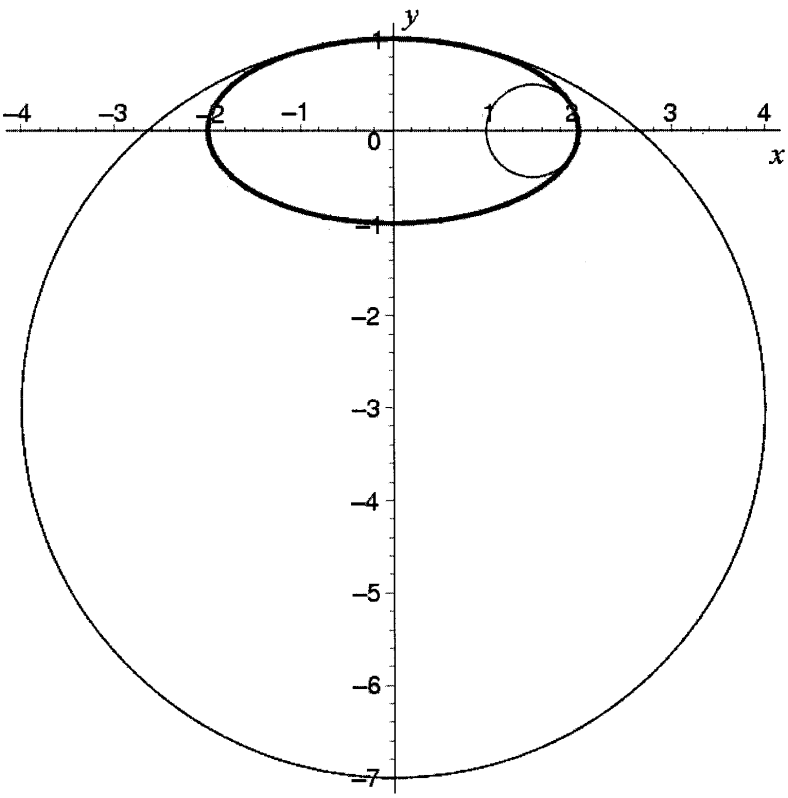
$$P_7(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} - \frac{\varphi^6}{720},\quad P_9(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} - \frac{\varphi^6}{720} + \frac{\varphi^8}{40320}$$



$$|R_3(\varphi)| = \left|\frac{f^{(4)}(\overline{\varphi})}{4!}\varphi^4\right| = \left|\frac{\cos\overline{\varphi}}{4!}\varphi^4\right| \le \left|\frac{\varphi^4}{24}\right| \le 0.0001 \text{ für } |\varphi| \le 0.22134 \approx 12.68^{\circ},$$

($\overline{\varphi}$ zwischen $\varphi_0 = 0$ und φ) $\qquad \cos 0.2213 = 0.97561,\ P_3(0.2213) = 0.97551$

Abbildung 20.5: zu Aufgabe 9.20 und Aufgabe 21: Taylorentwicklung



Ellipse $\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1 \quad (x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi)$

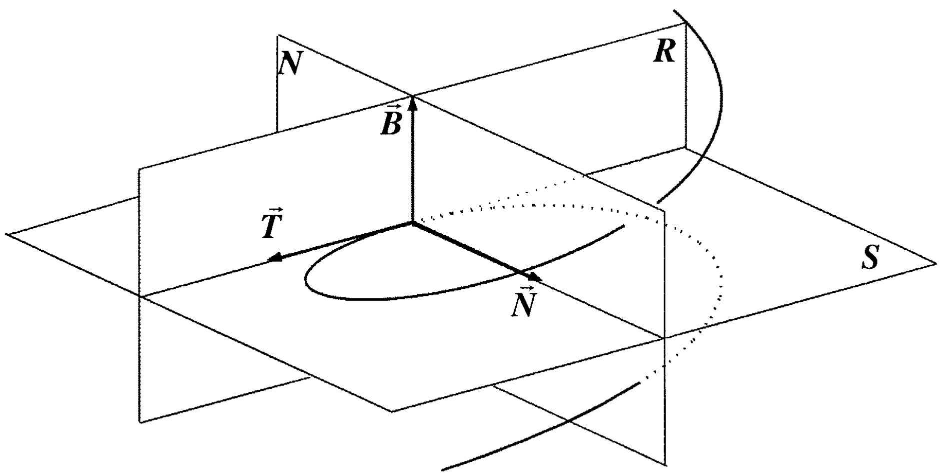
mit Krümmungskreisen

im Scheitelpunkt (2,0) (Krümmungsradius $\frac{1}{2}$) und

im Scheitelpunkt (0,1) (Krümmungsradius 4)

Abbildung 20.6: zu Aufgabe 11.5: Krümmungskreis

Begleitendes Dreibein



$\vec{T}$ Tangentenvektor, $\vec{N}$ Hauptnormalenvektor, $\vec{B}$ Binormalenvektor

S : Schmiegebene : Grenzlage der Ebene, die durch den Punkt P und zwei benachbarte Punkte P_1 und P_2 geht, bei $P_1 \to P$ und $P_2 \to P$, enthält $\vec{T}$ und $\vec{N}$, Stellungsvektor ist $\vec{B}$

N : Normalebene : enthält $\vec{N}$ und $\vec{B}$, Stellungsvektor ist $\vec{T}$

R : rektifizierende Ebene : enthält $\vec{T}$ und $\vec{B}$, Stellungsvektor ist $\vec{N}$

Abbildung 20.7: zu Abschnitt 11.2: Begleitendes Dreibein

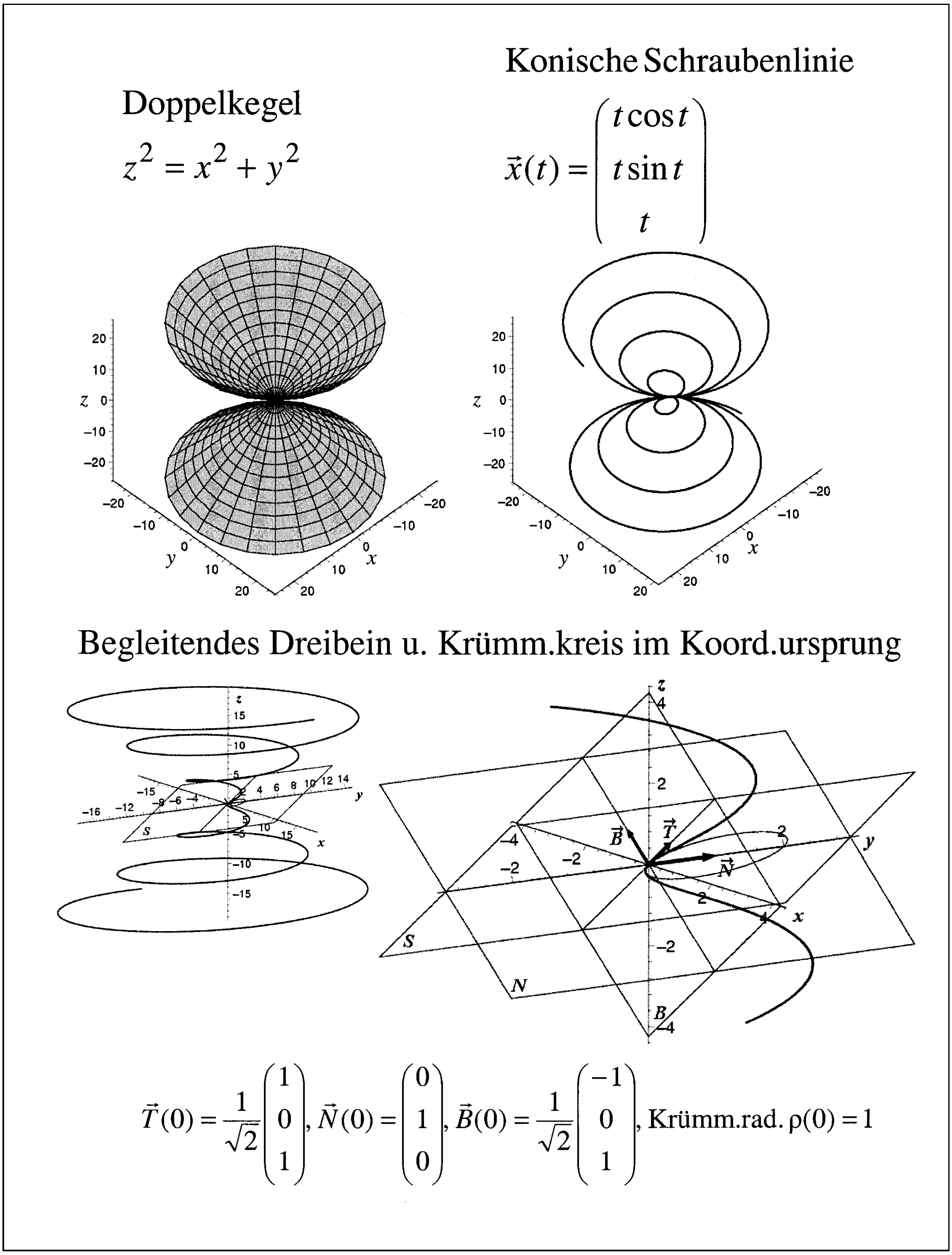
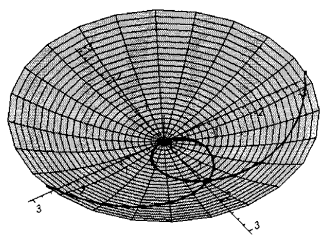


Abbildung 20.8: zu Aufgabe 11.8: Kurven und Flächen, begleitendes Dreibein

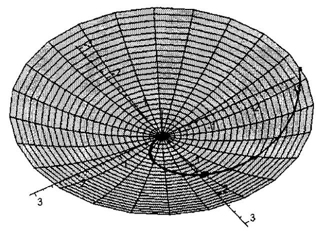
Elliptisches Paraboloid $z = x^2 + y^2$ mit Kurve $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$,

Punkt $\boldsymbol{x}(\frac{\pi}{2}) = \boldsymbol{x}(-\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/2 \\ \pi^2/4 \end{pmatrix}$, Tangentialebene $\pi y - z = \pi^2/4$ und

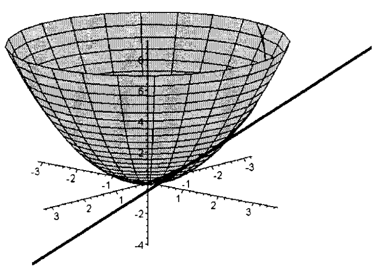
Tangente (für $t = \frac{\pi}{2}$) $\quad \boldsymbol{X}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/2 \\ \pi^2/4 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -\pi/2 \\ 1 \\ \pi \end{pmatrix}$



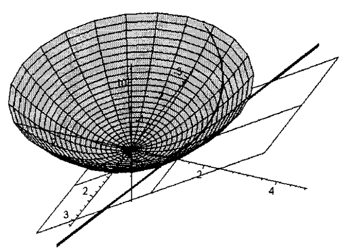
ϑ=57°, φ=7°, t=–3...3



ϑ=57°, φ=7°, t=0...3



ϑ=41°, φ=71°, t=0...3



ϑ=23°, φ=39°, t=0...3

Maple V Release 5.1
theta and phi: angles of the point in 3-dimensions from which the plot is to be viewed. The point is described in spherical coordinates where theta and phi are angles in degree.

Abbildung 20.9: zu Aufgabe 12.15: Kurven und Flächen im Raum, Tangentialebene

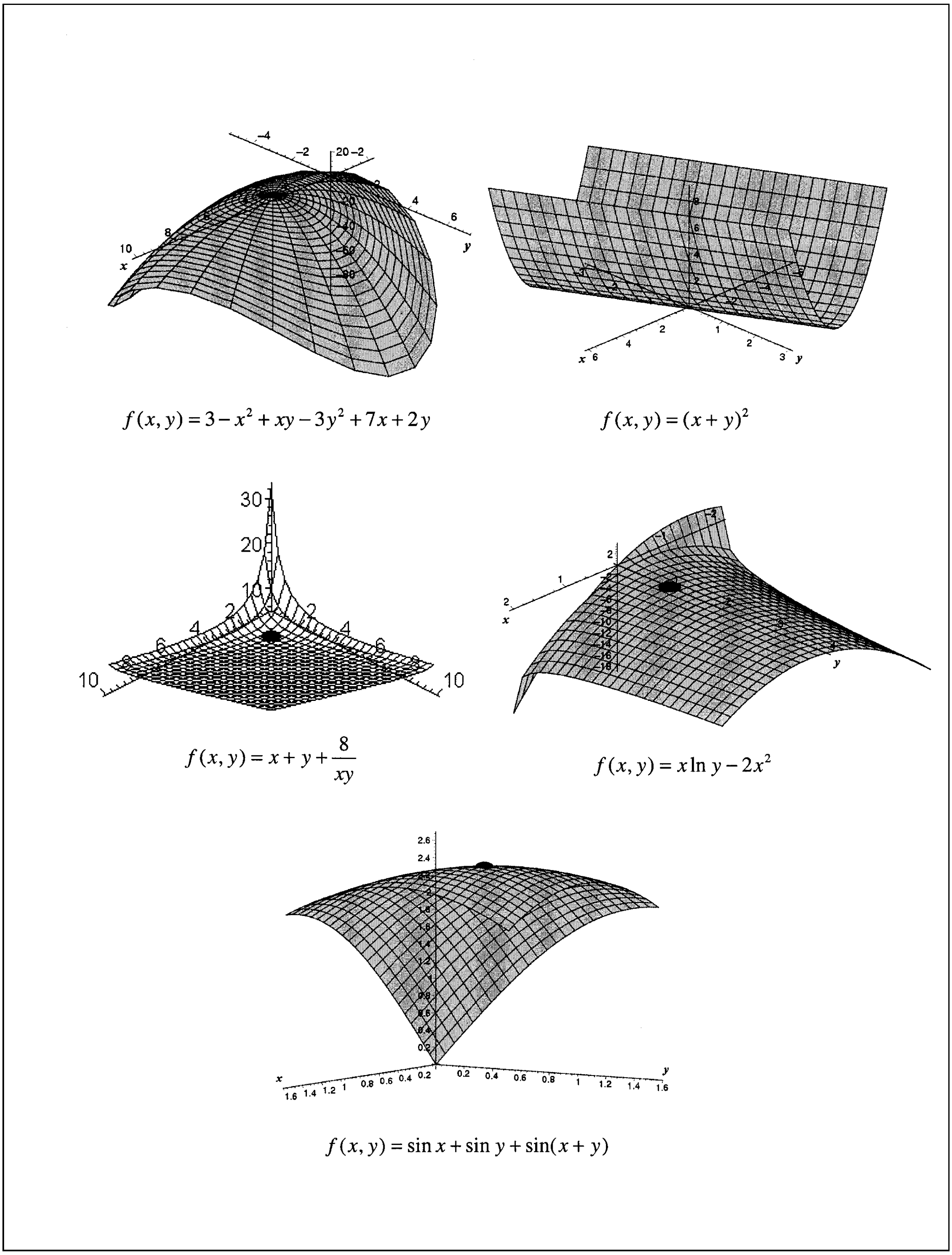


Abbildung 20.10: zu Aufgabe 13.1 und Aufgabe 13.4: Extremwertaufgaben

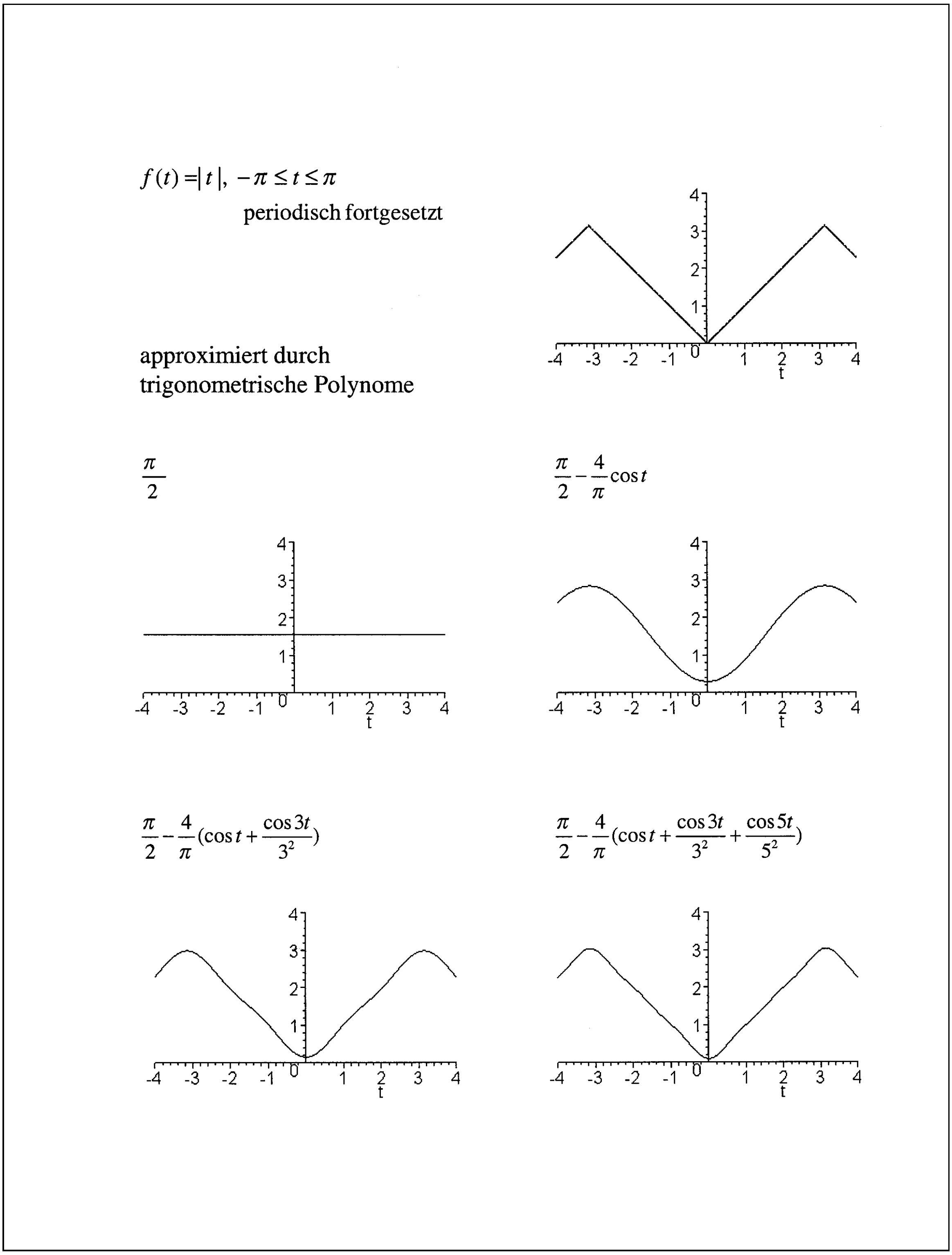


Abbildung 20.11: zu Aufgabe 15.1: Fourierentwicklung

$f(t) = |t|, \quad -\pi \le t \le \pi$

period. fortgesetzt

approx. durch trigonometrische Polynome

$$\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos t,$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2}\right),$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2}\right)$$

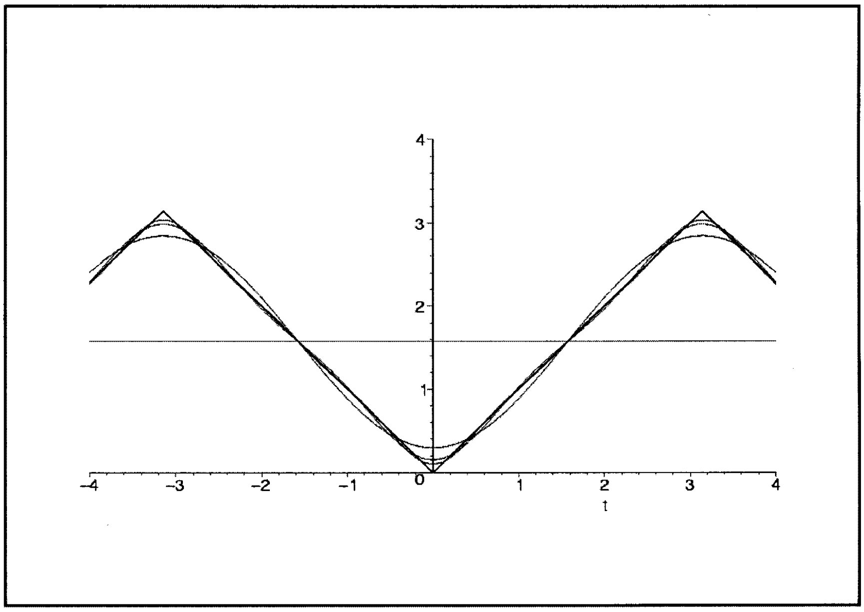


Abbildung 20.12: zu Aufgabe 15.1: Fourierentwicklung

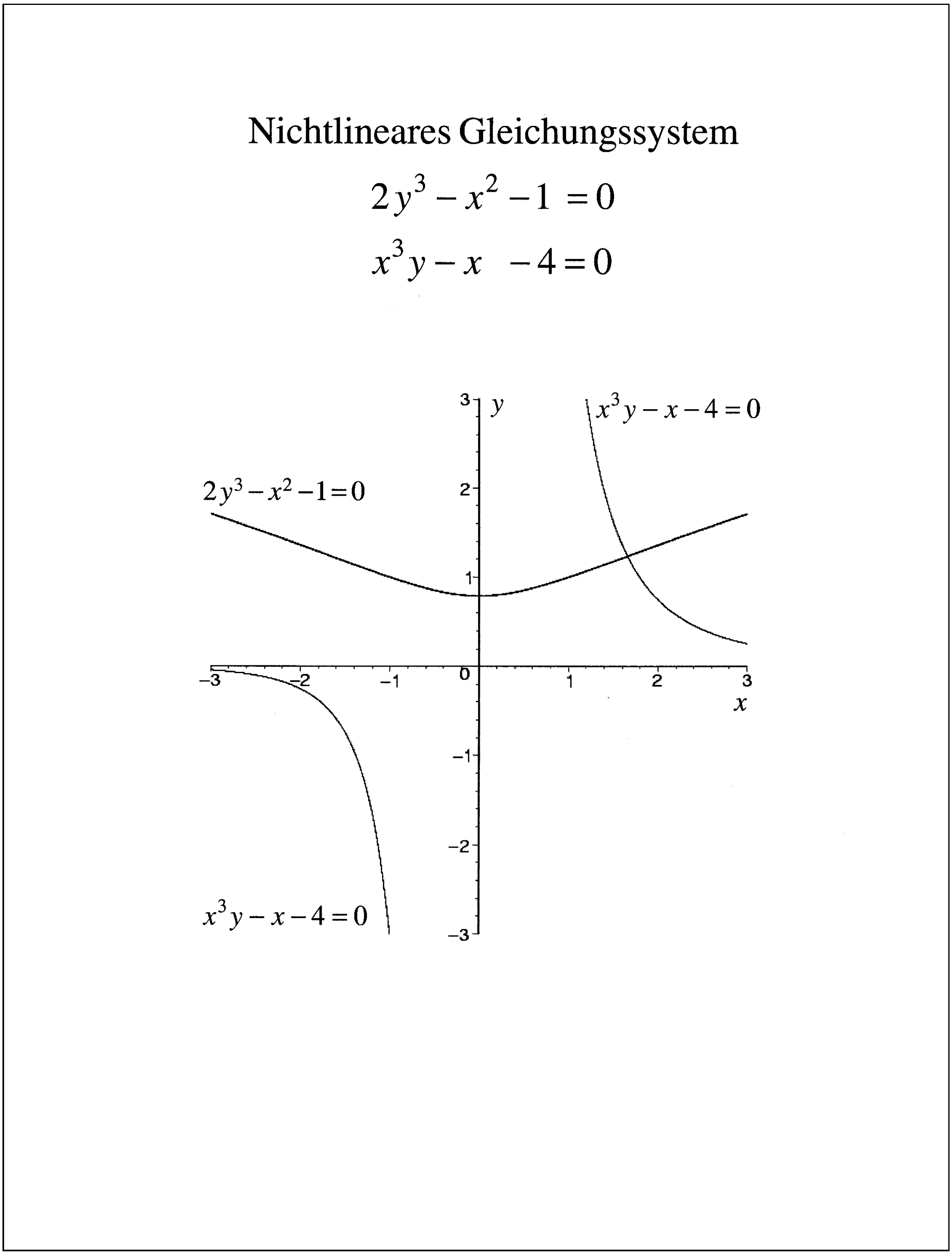
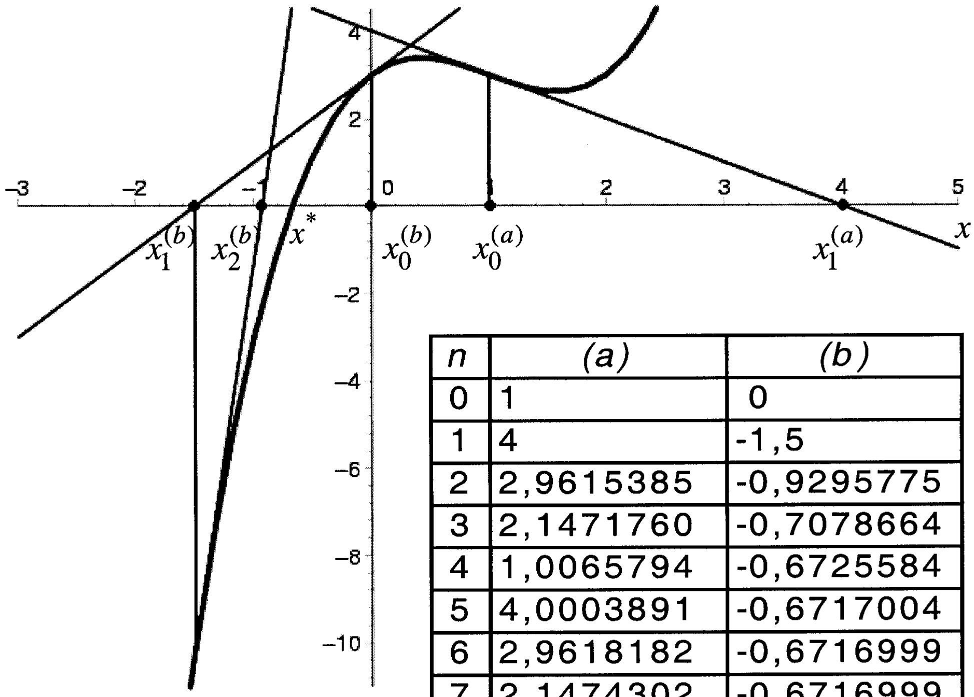


Abbildung 20.13: zu Aufgabe 16.8: Nichtlineares Gleichungssystem

Newtonverfahren zur Lösung von $x^3 - 3x^2 + 2x + 3 = 0$

mit Startwerten $x_0^{(a)} = 1$ und $x_0^{(b)} = 0$



n	(a)	(b)
0	1	0
1	4	-1,5
2	2,9615385	-0,9295775
3	2,1471760	-0,7078664
4	1,0065794	-0,6725584
5	4,0003891	-0,6717004
6	2,9618182	-0,6716999
7	2,1474302	-0,6716999
8	1,0072562	
9	4,0004732	

$x^* = -0.6716999$

Abbildung 20.14: zu Aufgabe 16.4: Newtonverfahren

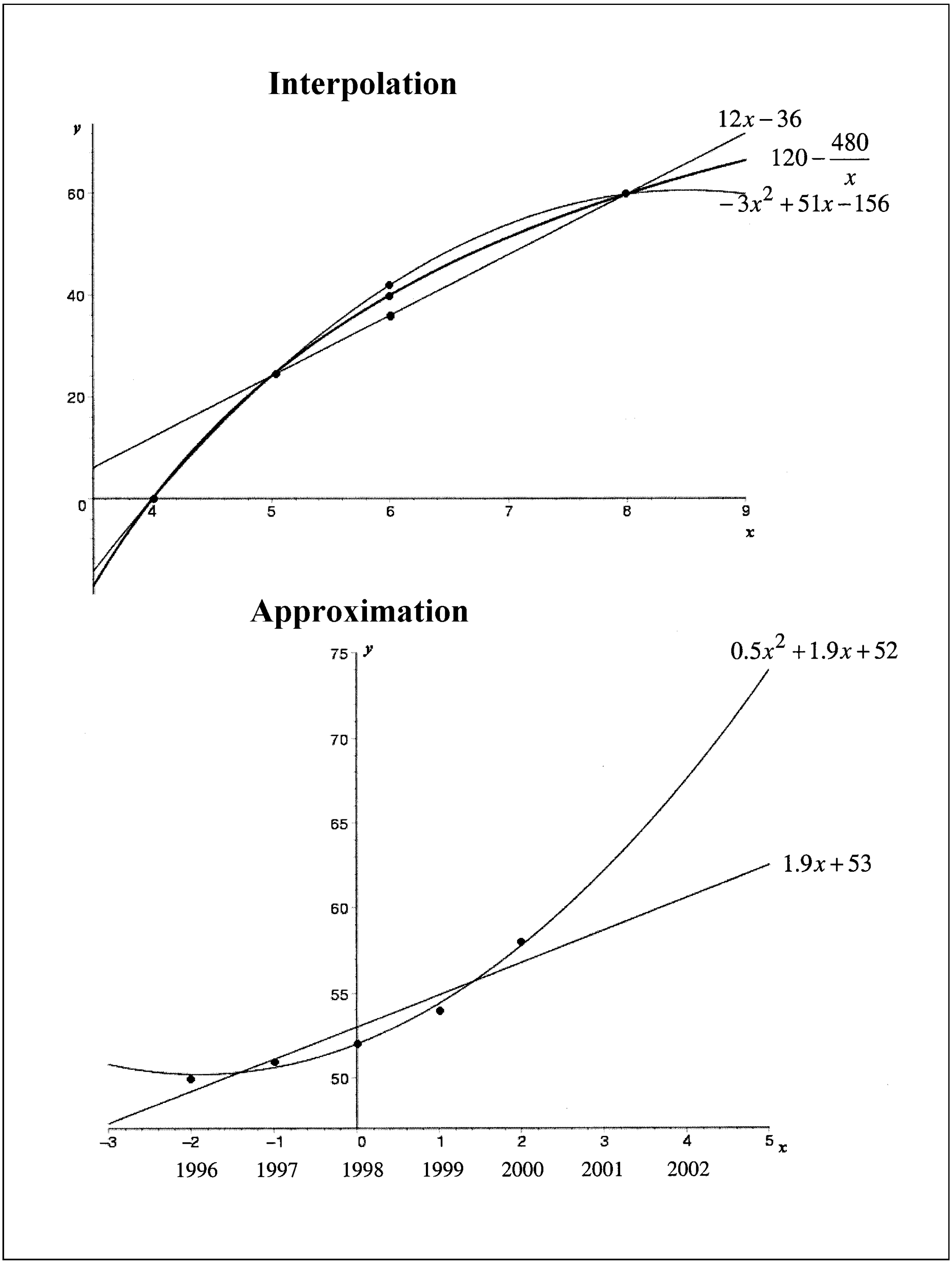


Abbildung 20.15: zu Aufgabe 9.3 und 13.10: Interpolation und Approximation