1982

Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt

Sektion: MATHEMATIK

WB: NUMERIK

AUFGABENSAMMLUNG

für Studenten des Maschineningenieurwesens

Höhere Mathematik

1. Elementarmathematik

1. Für welche x gilt:

a) $\frac{4x-1}{4x^2-1} + \frac{8}{10x-5} = \frac{9}{5x}$

b) $\ln x^2 + (\ln x)^2 = 15$

2. Vereinfachen Sie:

a) $\frac{a+1}{a^2-a} - \frac{a-1}{a^2+a} + \frac{1}{a} - \frac{4}{a^2-1}$

b) $\frac{125a^7b^{11}}{138x^{10}y^8} : \frac{175a^4b^{18}}{92x^9y^8}$ c) $\left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-2}x}{b^3y^2}\right)^{-3}$

3. Berechnen Sie x:

a) $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$ b) $32^{\frac{2x+1}{x+2}} = 4^{\frac{6x-1}{4x-1}}$

c) $\frac{x^2+1}{n^2x-2n} - \frac{1}{2-nx} = \frac{x}{n}$

d) $5\sqrt{3x+4} - 3\sqrt{2x-5} = 4\sqrt{3x-5}$.

4. Fassen Sie zusammen:

a) $\frac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n} \cdot \left(\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4} - \frac{3}{a^2-a}\right) =$

b) $\left(\sqrt{1+((a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}\,x^{-1/3})^2}\right)^{-6} - \frac{1}{a^2}\sqrt{(a^2-x^2)^2+4a^2x^2} =$

5. Dividieren Sie:

a) $(9a^4 - a^2b^4 + 16b^8) : (3a^2 - 5ab^2 + 4b^4)$

b) $(a^{n+3} + a^n) : (a^3 + a^2)$

6. Vereinfachen Sie die Gleichung:

$$w_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1+c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{c_1+c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1}\right)^2 - \frac{c_1c_2}{m_1m_2}}$$

wenn bekannt ist, daß $c_1 \ll c_2$, $\left(\frac{c_1}{c_2} \approx 0\right)$!

7. Für welche x gelten folgende Ungleichungen ?

a) $\frac{x-4}{3} > 2$ und $x-1 \geq \frac{x+8}{5}$

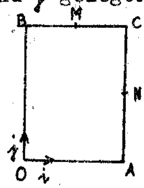
b) $x+2 \leq \frac{5}{x-2}$

2. Vektoralgebra

1. Geben Sie für die Vektoren $\mathfrak{a} = 3i-4j$, $\mathfrak{b} = 8i - 4j + k$, $\mathfrak{c} = 2i - 3j + k$ die zugehörigen Einheitsvektoren an !

2. Kontrollieren Sie rechnerisch und zeichnerisch die Beziehungen
$$\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{b}-\mathfrak{a}}{2} = \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2} \;;\quad \mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2} = \frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{2} .$$

3. In Richtung der Seiten OA und OB eines Rechteckes OACB werden die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ gelegt:
   a) Drücken Sie die Vektoren $\overline{OA}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BO}$, $\overline{OC}$, $\overline{BA}$ durch $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ aus, wenn die Seitenlängen $\overline{OA} = 3$ und $\overline{OB} = 4$ sind !
   b) Bestimmen Sie die Vektoren $\overline{OM}$, $\overline{MN}$, $\overline{ON}$! (M, N – Seitenmitten)



4. Gesucht ist der Winkel φ zwischen den Vektoren
$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

5. In einem kartesischen Koordinatensystem sind drei aufeinanderfolgende Eckpunkte A, B, C eines Parallelogramms gegeben: A(1;-2;3), B(3;2;1), C(6;4;4). Bestimmen Sie den vierten Eckpunkt!

6. Von einem Parallelogramm seien die Diagonalen durch zwei Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ gegeben. Geben Sie die Vektoren an, die das Parallelogramm aufspannen!

7. Gesucht ist ein Vektor in Richtung der Winkelhalbierenden des von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildeten Winkels.

8. Bestimmen Sie die Diagonalvektoren und die Länge der Diagonalen des durch die Vektoren
$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
aufgespannten Parallelogramms.
Bestimmen Sie die Einheitsvektoren in Richtung der Diagonalen!

9. Gesucht sind die Beträge von
$$\mathfrak{v} = -\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$$
$$\mathfrak{w} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c}$$
$$\mathfrak{z} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b} + \mathfrak{c},$$
wobei $\mathfrak{a} = (4;5;-3)^T$, $\mathfrak{b}$: $b_x = -1$, $b_y = 8$, $b_z < 0$, $|\mathfrak{b}| = 9$
$\mathfrak{c}$: $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{v}$.

10. Es seien: $\overline{AB} = \mathfrak{b}$, A(2;1;-1), $|\mathfrak{b}| = 7$, $b_x = 2$, $b_y = -3$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B ! (Skizze!)

11. Gegeben seien die Vektoren $\mathfrak{a} = (2;-1;-2)^T$ und
$\mathfrak{b} = (3;0;4)^T$.
Berechnen Sie die Projektionen von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{b}$ und von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{a}$!

12. Es seien $|\mathfrak{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathfrak{n}| = 4$ und $\sphericalangle(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) = 135°$.
Berechnen Sie $(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})^2$!

13. Beweisen Sie den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie mit Hilfe der Vektorrechnung!

14. Gegeben seien die Vektorsysteme:
a) $\mathfrak{a}^T = (1;1)$, $\mathfrak{b}^T = (1;0)$
b) $\mathfrak{a}^T = (-2;1;3)$, $\mathfrak{b}^T = (1;2;1)$, $\mathfrak{c}^T = (-1;-1;-1)$
c) $\mathfrak{a}^T = (1;0;1;0)$, $\mathfrak{b}^T = (1;1;1;1)$, $\mathfrak{c}^T = (0;2;0;2)$
Welches ist linear unabhängig?
(Geben Sie eine einfache Basis an!)

15. Im Punkt $P_0(1;3;-1;)$ ist ein Haken befestigt, von dem 3 Seile S_1, S_2, S_3 nach den Punkten $P_1(2;1;1)$ bzw. $P_2(-7;4;3)$ bzw. $P_3(-1;9;2)$ gespannt sind. In den Seilen treten Zugkräfte mit folgenden Beträgen auf:
Seil S_1: $21 \cdot 10^4$ N, Seil S_2: $9 \cdot 10^4$ N, Seil S_3: $14 \cdot 10^4$ N.
Wie groß ist die in P_0 angreifende Gesamtkraft (Betrag und Richtung)?

16. Man berechne für die Vektoren $\mathfrak{a} = \mathfrak{i}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{k}$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{i}$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{j}$ folgende Produkte:
16.1. $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d})$
16.2. $[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}] \cdot \mathfrak{d}$
16.3. $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d})$
16.4. $[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}] \times \mathfrak{d}$

17. Gesucht ist der Flächeninhalt des von den Vektoren $\mathfrak{a} = (2;-1;3)^T$ und $\mathfrak{b} = (6;4;2)^T$ aufgespannten Parallelogramms

18. Gesucht ist das Volumen des Parallelepipeds, das von

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

19. Vom Eckpunkt eines Quadrates ziehe man die Verbindungsgeraden zu den Mittelpunkten der Gegenseiten. Gesucht ist der Winkel zwischen diesen Geraden. (vektoriell!)

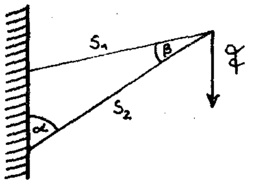
20. Zerlegen Sie den Vektor $\mathfrak{b} = (1;-2;2)^T$ bezüglich $\mathfrak{a} = -i+j$ in eine Parallelkomponente $\mathfrak{b}'$ und eine Normalkomponente $\mathfrak{b}''$!

21. Vereinfachen Sie:
$\mathfrak{r} = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\times\mathfrak{c} + (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\times\mathfrak{b} + (\mathfrak{b}-\mathfrak{c})\times\mathfrak{a}$.

22. Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide mit den Eckpunkten O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0), C(1;2;4) !

23. Zeigen Sie, daß die Punkte A(2;-1;-2), B(1;2;1), C(2;3;0) und D(5;0;-6) in einer Ebene liegen !

24. Wie groß sind die Kräfte in den Stäben eines Stabauslegers (s. Skizze) unter der Last F = 1800 N?
(Lösung grafisch und rechnerisch !)



$\alpha = 45°$
$\beta = 30°$

25. Gesucht ist der Flächeninhalt A des Parallelogramms, das von den Vektoren $\mathfrak{a} = \mathfrak{m} + 2\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b} = 2\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ aufgespannt wird, wobei $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ Einheitsvektoren sind, die einen Winkel von $30°$ miteinander bilden.

26. Wie groß ist die Arbeit W, die von der Kraft $\mathfrak{F} = 4i-2j+3k$ längs der geradlinigen Wegstrecke von $P_1(1;1;0)$ nach $P_2(3;1;1)$ geleistet wird? (Einheit der Kraft: N, Längeneinheit: m)

27. Ein starrer Körper rotiere mit n = 250 U/min um eine Achse, deren Richtung durch den Vektor $\mathfrak{r} = i-3j+2k$ angegeben wird. Man gebe den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ der augenblicklichen Bewegung des Punktes P(-1;4;-3) an und bestimme den Betrag der Geschwindigkeit (Längeneinheit: 1m).
Hinweis: $\omega = 2\pi n$, $\mathfrak{v} = \vec{\omega} \times \vec{OP}$, $\vec{\omega} = \omega \cdot \mathfrak{r}^0$

1. Hausaufgabe

1. Der Vektor $\mathfrak{a}$ hat den Betrag 9 und die Komponenten $a_1 = 7$, $a_3 = 4$. Berechnen Sie a_2 und die Richtungswinkel zwischen $\mathfrak{a}$ und den Koordinatenachsen!
2. Gegeben sind die Vektoren $\mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$, $\mathfrak{b}_1 = (-2;-4;-8)^T$ und $\mathfrak{b}_2 = (-4;6;-2)^T$. Bestimmen Sie die Winkel zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ bzw. $\mathfrak{b}_2$ und die Projektionen von $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ auf $\mathfrak{a}$!
3. Berechnen Sie den Winkel zwischen
   a) zwei von derselben Ecke eines Würfels ausgehenden Flächendiagonalen (Skizze!),
   b) zwei Raumdiagonalen eines Würfels!
4. Gesucht ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit A(7;3;4), B(1;0;6), C(4;5;-2).
5. Eine Kraft vom Betrag F = 60 N, die einen Körper vom Punkt $P_1(2;-2;1)$ geradlinig zum Punkt $P_2(3;4;5)$ bewegt , zeigt in Richtung des Vektors $\mathfrak{a} = (-1;3;2)^T$. Welche Arbeit wird dabei verrichtet? (Koordinatensystemeinheit: Meter)
6. Skizzieren Sie die Pyramide mit den Eckpunkten O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0) und C(1;2;4)! Berechnen Sie das Volumen, den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und die Höhe der Pyramide bezüglich des Dreiecks ABC als Grundfläche!
7. Gesucht ist der Vektor $\mathfrak{a}$, der folgenden Beziehungen genügt:
   a) $|\mathfrak{a}| = 3$
   b) $\mathfrak{a}$ steht senkrecht auf $\mathfrak{b} = (3;-4;1)^T$
   c) $\mathfrak{a}$ steht senkrecht auf $\mathfrak{c} = 6\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 5\mathfrak{k}$. (alle Lösungen!)
8. Im Punkt P(-0,2;0,2;0,4) eines Stabes greift die Kraft
   $$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} \text{ N}$$
   an. Der Stab ist im Kugelgelenk A(0,2;-0,1;0,3) befestigt. Wie groß ist das in A erzeugte Moment ?
   (Längeneinheit: m , $\mathfrak{M} = \overrightarrow{AP} \times \mathfrak{F}$)

3. Analytische Geometrie

1. Gesucht ist die Gleichung der Ebene in allgemeiner Form, die auf dem Vektor $\mathfrak{n} = (2;-1;3)^T$ senkrecht steht und durch den Punkt $P_0(5;3;-2)$ geht.
2. Es sei die Ebene E gegeben durch: $4x-2y+3z-11 = 0$. Gesucht ist die Gleichung der Parallelebene durch $P_0(1;2;1)$.
3. Gesucht ist die Gleichung der Ebene in allgemeiner Form, die durch die Punkte $P_0(1;-2;7)$, $P_1(5;3;6)$ und $P_2(-2;-8;1)$ geht.
4. Gegeben sind die Punkte $P_1(0;-1;3)$ und $P_2(1;3;5)$. Gesucht ist die Gleichung der Ebene, die durch P_1 geht und auf $\overrightarrow{P_1P_2}$ senkrecht steht.
5. Gesucht ist die Gleichung der Ebene in allgemeiner Form, die parallel zur x-Achse verläuft und durch $P_1(0;1;3)$ und $P_2(2;4;5)$ geht.
6. Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen E_1: $x-2y+2z-8 = 0$ und E_2: $x+z-6 = 0$.
7. Gesucht ist die Gleichung der Ebene, die auf den Ebenen E_1: $2x+y-3z-4 = 0$ und E_2: $5x+5y-7z+11 = 0$ senkrecht steht und durch den Punkt $P_0(2;4;-1)$ geht.
8. Gegeben sind die Ebene E_1: $2x+y-3z-11=0$ und die Punkte $P_1(2;1;1)$ und $P_2(4;-1;6)$. Stellen Sie die Gleichung der Ebene E_2 auf, die senkrecht auf E_1 steht und durch P_1 und P_2 geht.
9. Gesucht ist die Parameterform der Geraden durch $A(-1;2;3)$ und $B(2;6;-2)$.
10. Gesucht ist der Winkel zwischen den Geraden g_1 und g_2:
    g_1: $\mathfrak{x} = (-1;1;0)^T + t\,(2;-2;1)^T$,
    g_2: $\mathfrak{x} = \mu(1;-1;-1;)^T$.
11. Gesucht ist der Schnittpunkt S der Ebene E: $x - y + 3z = -2$ mit der Geraden g: $\mathfrak{x} = (2;-4;1)^T + \lambda(2;2;-1)^T$.
12. Gesucht ist der Winkel φ zwischen der Ebene E: $2x - y - 4z = 1$ und der Geraden g: $\mathfrak{x} = (1;-3;2)^T + \lambda\,(2;2;-1)^T$.
13. Liegen die Punkte $A(1;2;1)$, $B(-1;1;2)$ und $C(5;4;-2)$ auf einer Geraden?

14. Gesucht ist die Gerade g, die die z-Achse senkrecht schneidet und durch den Punkt $P_0(1;-1;1)$ geht.

15. Gesucht ist die Gerade g durch $P_0(1;0;-2)$, die parallel zur Schnittgeraden der Ebenen E_1: $-2x - y + 3z = -4$ und E_2: $3x + 2y - 5z = 7$ verläuft.

16. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 aus Aufgabe 10 !

17. Gesucht ist der Schnittpunkt S der Geraden g:
$\mathfrak{r} = (-1;2;1)^T + \tau(2;1;-1)^T$ mit der Ebene E: $3x - 2y + z = 3$.

18. Gegeben seien die Punkte $P(1;1;-1)$, $Q(0;1;1)$ und die Ebene $E : x - y + 2z = 1$. Bestimmen Sie
a) die Spurpunkte der Geraden g durch P und Q;
b) die Geradenh durch P, die parallel zur gegebenen Ebene sind;
c) die Ebene E_1, die die Gerade g enthält und parallel zur z-Achse ist.

19. Gegeben sind die beiden Ebenen E_1: $\mathfrak{r} = \mathfrak{j} + \lambda_1(\mathfrak{i}+\mathfrak{j}) + \mu_1(\mathfrak{j}+\mathfrak{k})$,
E_2: $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + \lambda_2\mathfrak{j} + \mu_2(\mathfrak{i}+\mathfrak{k})$.
Gesucht sind: a) die Schnittgerade von E_1 und E_2,
b) der Winkel φ zwischen E_1 und E_2,
c) $P_2(3;-2;2)$, $Q_2(1;0;0)$ seien Punkte in E_2,
$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Vektor in der Richtung eines Bündels paralleler Lichtstrahlen. Welchen Schatten P_1Q_1 wirft P_2Q_2 in E_1 ? Wie lang ist dieser Schatten ?

20. Gegeben: $P(5;-2;8)$, E: $3x-4y+5z+37 = 0$
Gesucht: a) Gleichung des Lotes von P auf E
b) Lotfußpunkt F

21. Gegeben: $A(3;14;-6)$, E: $4x-2y+3z = -5$
Gesucht: Abstand d des Punktes A von E

22. Gegeben: $B(0;2;0)$, g: $\mathfrak{r} = (1;2;3)^T + \lambda(0;1;2)^T$
Gesucht: Abstand d des Punktes B von der Geraden g

23. Gegeben: E_1: $2x+4y-4z=20$, E_2: $-x-2y+2z-4 = 0$
Gesucht: die Schnittgerade oder der Abstand der beiden Ebenen,(falls sie parallel sind).

24. Gegeben: g_1: $\mathfrak{r} = (2;-3;4)^T + \lambda(3;-4;12)^T$
g_2: $\mathfrak{r} = (1;5;-3)^T + t(4;0;3)^T$
Gesucht: Abstand beider Geraden, $d = \overline{g_1 g_2}$

25. A(3;-1;-2), B(4;2;9) und C(-2;5;6) seien Eckpunkte der Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S(5;8;1).
Die Höhe der Pyramide soll von S aus abgetragen werden.
Gesucht ist der Fußpunkt F der Höhe.

26. Gegeben: g_1: $\mathfrak{r} = (3;5;2)^T + \lambda(1;3;0)^T$
g_2: $\mathfrak{r} = (7;1;-4)^T + \mu(2;1;-1)^T$
P(2;0;3)
Gesucht: Gerade durch P, die g_1 und g_2 schneidet

27. Gegeben: E: $\mathfrak{r} = (-1;3;4)^T + \lambda(1;1;0)^T + \mu(8;7;1)^T$,
A(-3;5;6)
Gesucht: Gerade g, die parallel zu E verläuft, die z-Achse schneidet und durch den Spiegelpunkt A' von A an E geht.

28. Für welche reellen Werte von z hat das durch die Vektoren
$\mathfrak{a} = i + 2j - k$
$\mathfrak{b} = 2i + 3j + zk$
$\mathfrak{c} = -3i - j + 3k$ aufgespannte Spat das Volumen 40 ?

2. Hausaufgabe

1. Stellen Sie die Gleichung der Ebene auf, die die y-Achse enthält und durch $P(4;0;5)$ geht!
2. Gegeben sind die Ebenen E_1: $2x+y-z = 2$ und E_2: $x-y-z = 3$ und der Punkt $P(1;0;-2)$. Gesucht ist die Ebene E_3 mit $E_3 \perp E_1$, $E_3 \perp E_2$, die den Punkt P enthält (in Normalform).
3. Überprüfen Sie, ob sich die Geraden, die durch die Punkte $P_1(-1;3;7)$ und $P_2(6;-5;-4)$ bzw. $P_3(-5;4;3)$ und $P_4(17;-14;-11)$ gehen, schneiden! Berechnen Sie geg.falls den Schnittpunkt!
4. Stellen Sie die Gleichung der Ebene E auf, die senkrecht zur Geraden g: $\mathfrak{x} = (1;2;-1)^T + \lambda(3;-1;4)^T$ liegt und durch den Punkt $P_0(3;2;-1)$ geht!
5. Gesucht ist der Winkel φ zwischen g: $\mathfrak{x} = (2;0;5)^T + t\,(1;1;0)^T$ und E: $4x-y+z=16$.
6. Ermitteln Sie den Abstand des Punktes $P(3;2;-1)$ von der Geraden $\mathfrak{x} = (3;-2;1)^T + \mu(4;-1;1)^T$!
7. Gegeben seien: die Ebene E_1: $x+2y-2z = 1$ und die Ebene E_2: $3x-4y = -1$ und der Punkt $P(2;-2;3)$ und die Gerade g: $\mathfrak{x} = (1;2;3)^T + \lambda(0;1;2)^T$.

   Gesucht sind: a) der Winkel zwischen E_1 und E_2,
   b) der Abstand d_1 zwischen g und der Schnittgeraden von E_1 und E_2,
   c) der Abstand d_2 zwischen P und E_2.

4. Matrizen und Determinanten

1. Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$,

$F_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie: a) $A + B + C$, $A + B - C$,

b) $6D - 2F_1 + 4F_2$,

c) $\frac{2}{3}A + 5D$.

2. Gegeben: $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $I = (2,3,1)$, $K = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $G \cdot H$, IL, IK, KI, M^2, MN, N^3.

3. Berechnen Sie die Determinanten

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 8 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, l) $\begin{vmatrix} 7{,}355 & -1{,}065 \\ 81{,}08 & -10{,}783 \end{vmatrix}$, m) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix}$

n) $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$, o) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 4 \\ -4 & 5-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$, p) $\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix}$,

q) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a & -b \\ 0 & b & 1 & 0 \end{vmatrix}$, r) $\begin{vmatrix} 11 & 12 & 23 & 28 \\ 11 & 13 & 25 & 35 \\ 11 & 14 & 28 & 49 \\ 11 & 11 & 20 & -21 \end{vmatrix}$, s) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

t) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, u) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$ v) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \cdots & n \\ \cdots & & & & & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

w) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, x) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ y) $\begin{vmatrix} 1-x & & & O \\ & 2-x & & \\ & & \ddots & \\ O & & & n-x \end{vmatrix}$

4. Für welche x gilt $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} = 0$?

5. Bilden Sie die inverse Matrix zu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

6. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Gesetzes $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ am Beispiel der Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} .$$

7. Invertieren Sie:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

8. Berechnen Sie die Matrix X aus

$2\,X - (A + B)^2\, X = E - C^T X$, wobei

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Gegeben: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist eine Matrix X, so daß gilt: $A_1 X = B_1$.

10. Schreiben Sie den folgenden Ausdruck in der Form $\mathfrak{x}_0^T \mathfrak{A} \mathfrak{x}_0 = 0$, wobei

$\mathfrak{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathfrak{x}_0^T = (1, x, y)$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^T$ (d.h. $a_{ik} = a_{ki}$, mit $i,k = 1,2,3$):

a) $2x^2 + y^2 - 4xy + 6 = 0$

b) $x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 6xy - 8xz + 24yz + 2x - 12y - 16z + 1 = 0$
(mit $\mathfrak{x}_0^T = (1, x, y, z)$, $i,k = 1 \ldots 4$) .

3. Hausaufgabe

1. Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = (0,1,2)$$

Bilden Sie alle möglichen Produkte zweier Matrizen!

2. Beweisen Sie: Für jede Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt:

$$A^2 - (a+d)\,A + |A|\,E = 0 \,,$$

3. Berechnen Sie die Determinanten:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -3 & 12 \\ -3 & 1-\lambda & -4 \\ 12 & -4 & 16-\lambda \end{vmatrix}$$

4. Für welche reellen λ - Werte gilt: $|(A - \lambda E)| = 0$,

wobei $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ ist?

5. Berechnen Sie (mit möglichst geringem Rechenaufwand):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

6. Invertieren Sie die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Berechnen Sie X aus der Matrizengleichung: $AX + B = 2(X-C)$,

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \;!$$

8. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $\mathfrak{x}_0^T \mathfrak{A} \mathfrak{x}_0 = 0$,

vgl. ÜA 4.10

a) mit $f(x,y)$ aus ÜA 7.12

b) mit $f(x,y,z)$ aus ÜA 7.16 (s. S.2[illegible]).

5. Lineare Gleichungssysteme

1. Bestimmen Sie die Ränge der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \,. \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie den Rang der Matrix X :

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mu \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

4.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 8 \\ 15x_1 + 10x_2 &= 40 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

7.
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

8.
$$\begin{aligned} -2x + 4y + z &= 0 \\ 3x + y - z &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} u + v - 4w &= -11 \\ 2u - v + 7w &= 20 \\ 3u + v - 2w &= -10 \end{aligned}$$

10. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 &= -6 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 4x_2 - 5x_3 + x_4 &= -3 \end{aligned}$$

11. Ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 5y + 2z &= 3 \\ 2x - 2y + 4z &= 5 \\ x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

lösbar?

12. Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen
E_1: $2x - 5z = 0$ und E_2: $3x + 4y - 2 = 0$.

13. Bestimmen Sie das Schnittgebilde der folgenden Ebenen:

a)
$$\begin{aligned} E_1&: \quad x + y - z - 1 = 0 \\ E_2&: \quad x - y + z - 1 = 0 \\ E_3&: -x + y + z - 1 = 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 7 \\ 7y &= 7 \\ 4x + 5y + 4z &= 13 . \end{aligned}$$

14. Lösen Sie die Gleichungssysteme:

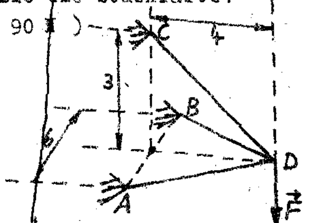
a)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ 6x - 4y - 3z &= 1 \\ 4x - 3y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + z &= 0 \\ 5x - y + 3z &= 1 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x - y + z - w &= 0 \\ x + y - u + v &= 0 \\ y + z + v - w &= 0 \end{aligned}$$
(mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v,w,x,y,z)^T$)

15. Lösen Sie die Gleichung
$$AX = B$$
für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

16. Die dargestellte Aufhängevorrichtung sei durch die Kraft $\vec{F}$ belastet. Berechnen Sie die Stabkräfte!
(Maße s. Skizze, F = 90 N)



17. Lösen Sie die Gleichung $A\mathfrak{x} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$
für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

18. Sind die Vektoren $\mathfrak{a}; \mathfrak{b}; \mathfrak{c}$ linear abhängig ?

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \mathfrak{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

19. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden

$$g: \begin{cases} 3x + y + 2z - 9 = 0 \\ 2x - 5y - 4z + 4 = 0 \end{cases}$$

und der Ebene $E: x - y + z - 7 = 0$.

20. Gegeben seien $\mathfrak{a} = 2\mathfrak{i}$, $\mathfrak{b} = 3\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{c} = 2\mathfrak{i} + 6\mathfrak{j}$.
Zerlegen Sie $\mathfrak{c}$ nach $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$

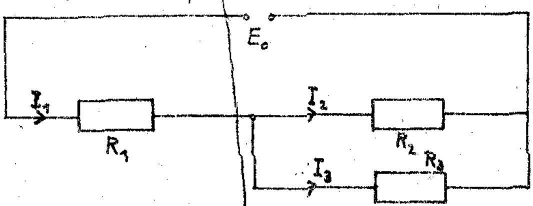
21. Für welche Zahl λ hat das Gleichungssystem $A\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ nichttriviale Lösungen? Geben Sie diese Lösungen an!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 6 & 13 & \lambda \end{pmatrix}$$

22. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + \lambda z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ \lambda x + y + z &= 1 . \end{aligned}$$

23.



Bei der angegebenen Schaltung folgt aus den KIRCHHOFFschen Gesetzen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 &= E_0 \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 &= 0. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Stromstärken I_1, I_2, I_3!

24. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem für alle reellen λ:

$$\begin{aligned} x + y + z &= \lambda \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda . \end{aligned}$$

25. Lösen Sie für beliebige reelle a und b die Gleichung

$A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2b & 1 \\ 1 & b & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

26. Lösen Sie für beliebige (reelle) λ die Gleichung $(A - \lambda E)\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$

mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Hausaufgabe

1. Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

2.1. $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + y - 5z &= 0 \\ x \quad - 3z &= 0 \end{aligned}$

2.2. $\begin{aligned} x + 2y + 5z &= 21 \\ -2x - 4y - 10z &= -42 \\ 3x + 6y + 15z &= 63 \end{aligned}$

2.3. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 \quad + 4x_3 \quad &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$

2.4. $\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \\ 3x - y + 3z &= 0 \\ x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$

3. Lösen Sie die Gleichung $A X = B$ für

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ nach X auf!

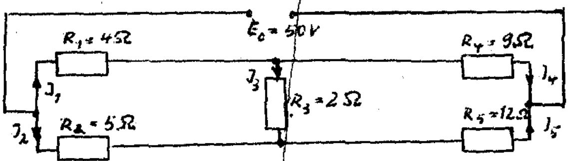
4. Bestimmen Sie das Schnittgebilde der folgenden Ebenen:
$E_1: x - y - z = 0$
$E_2: x + y + z = 2$
$E_3: 2x - y - z = 1$.

5. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme für alle gegebenen reellen Zahlen λ und μ!

5.1. $\begin{aligned} x + y + \lambda z &= 0 \\ x - \lambda y + z &= 0 \\ \lambda x - y + z &= 0 \end{aligned}$

5.2. $\begin{aligned} x + \lambda y + \mu z &= 1 \\ \mu x + \lambda y + z &= 1 \\ x + \lambda\mu y + z &= \lambda \end{aligned}$

6. Man berechne die Einzelströme $I_1 \ldots I_5$ in der "WHEATSTONE"-schen Brückenschaltung



Knotenbedingungen: $I_1 = I_3 + I_4$; $I_5 = I_2 + I_3$

Maschenbedingungen: $R_1 I_1 + R_3 I_3 = R_2 I_2$
$R_4 I_4 - R_3 I_3 = R_5 I_5$
$R_2 I_2 + R_5 I_5 = E_0$

6. Lineare Optimierung

1. Lösen Sie grafisch das Optimierungsproblem mit

   der Zielfunktion: $z = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

   den Nebenbedingungen:
   $$x_1 + 5x_2 \leqq 65$$
   $$2x_1 + x_2 \leqq 40$$
   $$x_2 \leqq 12$$

   und den Nichtnegativitätsbedingungen: $x_1 \geqq 0$; $x_2 \geqq 0$.

2. Ein Betrieb ist mit der Herstellung der Erzeugnisse P_1 und P_2 beauftragt. Der Reingewinn beträgt 20.– M je Einheit von P_1 und 10.– M je Einheit von P_2. Zur Fertigung jedes Erzeugnisses werden 3 Maschinen benötigt. Die Maschinenzeitfonds und die Durchlaufzeiten sind der Tabelle zu entnehmen. Es ist ein Produktionsprogramm aufzustellen, so daß ein maximaler Reingewinn erzielt wird.

Maschine	Durchlaufzeit P_1 [h]	Durchlaufzeit P_2 [h]	Zeitfond [h]
M_1	30	10	3000
M_2	40	30	6000
M_3	10	20	2000

   a) Erstellen Sie das mathematische Modell.
   b) Lösen Sie grafisch das Optimierungsproblem.
   c) Lösen Sie mit dem Simplexalgorithmus die Aufgabe.

3. Lösen Sie das Optimierungsproblem:
$$z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3 \rightarrow \max$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqq 20$$
$$x_2 + 2x_3 \leqq 8$$
$$x_1 + 4x_2 - x_3 \leqq 16$$
$$4x_1 + 2x_3 \leqq 10 \;; \qquad x_1 \;;\; x_2 \;;\; x_3 \geqq 0 .$$

5. Hausaufgabe

Lösen Sie das Optimierungsproblem:
$$z = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2 \rightarrow \max$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqq 210$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 \leqq 160$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leqq 210$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 \leqq 205 \;; \qquad x_1 \;;\; x_2 \;;\; x_3 \geqq 0 .$$

7. Analytische Geometrie der Kurven und Flächen 2.Ordnung

Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

1. Berechnen Sie die Eigenwerte folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 17/2 \\ 17/2 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Berechnen Sie die Eigenvektoren von A, untersuchen Sie, ob diese orthogonal sind, stellen Sie die Transformationsmatrix C auf, bilden Sie C^T und C^{-1} und vergleichen Sie beide und berechnen Sie $\Lambda = C^T A\, C$: $A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$.

3. Gesucht sind die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Gesucht sind die Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 12 \\ -3 & 1 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 9 & 12 \\ -4 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

5. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ -3 & \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$

Stehen die Eigenvektoren paarweise senkrecht aufeinander?

Kurven und Flächen 2. Ordnung

6. Bringen Sie die folgenden Gleichungen von Kurven 2. Ordnung ("C_2") auf Normalform und zeichnen Sie diese:

   a) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

   b) $4x^2 + y^2 + 16x + 2y + 13 = 0$

   c) $x^2 - 4y^2 + 8x - 4y + 15 = 0$

   d) $x^2 - 4y^2 + 8x - 4y + 11 = 0$

   e) $y^2 + 2x - 6y + 11 = 0$

   f) $x^2 - 4x - 3y + 1 = 0$.

7. Was für Flächen 2. Ordnung ("F_2") werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

   a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ b) $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$

   c) $x^2 + y^2 = R^2$ d) $x^2 - y^2 = 0$

   e) $x^2 + y^2 = z^2$ f) $y = x^2$

   g) $x^2 + 2y^2 - z = 0$ h) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 5$

   i) $x + 3 = 2(y-1)^2$ j) $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 72$

   k) $x^2 - 2x - 3 = 0$ l) $(x+a)^2 + (y-b)^2 = 16$

   m) $x^2 + 2y^2 + z = a$ n) $x^2 + z^2 - 2(y-1)^2 = 4x - 6z + 13$

   o) $x^2 - {}^3/_2\, y^2 + 2z^2 - 2x + 6y + 12z + 13 = 0$?

8. Schneiden Sie die F_2 von ÜA 7 mit den Koordinatenebenen und bestimmen Sie die entstehenden C_2 (Kurven 2. Ordnung)!

9. Schreiben Sie alle C_2 und F_2 der ÜA 6 - 8 in der Form:

$$\mathfrak{x}_0^T \mathfrak{A}\, \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}^T A\, \mathfrak{x} + 2\,\mathfrak{a}^T \mathfrak{x} + a_{00} = 0 \;!$$

10. Skizzieren Sie die F_2 von ÜA 7.c, e, f, g, j, m.

Hauptachsentransformation

11. Berechnen Sie die Eigenwerte von "A" von
   a) $-x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$
   b) $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 13/2\, x - 8y = 0$.

12. Gegeben sei die C_2: $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y = 6$
   Gesucht: a) Matrizenschreibweise
   b) $r = rg(A)$, $\varrho = rg(\mathfrak{a})$
   c) Eigenwerte, Eigenvektoren von A
   d) Transformationsmatrix C

13. Berechnen Sie das Produkt $\Lambda = C^T A C$ für die C_2 von
   a) ÜA 12 b) ÜA 15 .

14. Klassifizieren Sie die C_2 von ÜA 12 mit der "Rangtabelle".

15. Gegeben sei die C_2: $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 4x + 4y = 0$;
   Gesucht: a) Klassifikation mit Tabelle
   b) Transformation auf Normalform
   c) Skizze
   d) Berechnung des Mittelpunktes .

16. Gegeben sei die F_2: $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz + 10y = -1$
   Gesucht: Klassifikation.

17. Bringen Sie auf Normalform: $2x^2 + 4xy - y^2 + 2\sqrt{5}\,x + \sqrt{5}\,y = -1$!

18. Was für eine Fläche ist $x^2 + y^2 + z^2 + 4(xy + yz + zx) = 1$?

6. Hausaufgabe

1. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

   a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Ermitteln Sie durch Bilden der quadratischen Ergänzung, um welche Kurven es sich handelt, und skizzieren Sie diese (ohne Rangtabelle!) C_2:

   a) $25x^2 + 4y^2 - 150x + 16y + 141 = 0$

   b) $3x^2 - 2y^2 + 9x + 4y + 2{,}5 = 0$

   c) $x^2 - x - 3{,}75 = 0$.

3. Stellen Sie (ohne Rangtabelle) fest, um was für Flächen es sich handelt und skizzieren Sie diese F_2:

   a) $9x^2 + y^2 + 16z^2 - 12x + 4y - 16z + 4 = 0$

   b) $4x^2 + 9y^2 - z + 7 = 0$

   c) $x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 4x + 6y + 1 = 0$.

4. Transformieren Sie auf Normalform:

   $9x^2 + 24xy + 16y^2 + \frac{13}{2} x - 8y = 0.$

5. Bestimmen Sie den Typ der folgenden Fläche zweiter Ordnung:

   $9x^2 + y^2 + 16z^2 - 6xy + 24xz - 8yz - 12x + 4y - 16z + 4 = 0.$

   Wie lautet die orthogonale Transformationsmatrix C?

6. Gegeben ist die Fläche zweiter Ordnung mit der Gleichung

   $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 12x - 8y + 8z + 6 = 0.$

   a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Rangtabelle den Typ der Fläche!

   b) Transformieren Sie auf Normalform!

   c) Fertigen Sie eine Skizze an!

3. Mengenlehre / Beweistechnik

1. Man gebe die Elemente nachstehender Mengen an:

$M_1 = \{x:\ x=2g,\ g\in\Gamma\}$, ($\Gamma$: **Menge der ganzen Zahlen**)

$M_2 = \{x:\ x=1/n,\ n\in N\}$, (**N: Menge der natürlichen Zahlen**)

$M_3 = \{z:\ z \text{ ist Primzahl}\}$.

$M_4 = \{x:\ 2g_1=x \wedge x=3g_2,\ g_1,g_2\in\Gamma\}$,

$M_5 = \{y:\ y=2g_1 \vee y=3g_2,\ g_i\in\Gamma,\ i=1,2\}$.

2. Man gebe ein Bildungsgesetz für folgende Mengen an:

$M_6 = \{-1,0,1,2,3,\ldots,99,100\}$

$M_7 = \{2,4,8,16,32\ldots\}$,

$M_8 = \{\ldots-3,-1,1,3,\ldots\}$,

$M_9 = \{-1/2,1/3,-1/4,1/5,\ldots\}$, $M_{10} = \{10,100,1000,\ldots\}$.

3. Man bilde Durchschnitt, Vereinigung und Differenz von

a) $M_2,\ M_9$ b) $M_1,\ M_8$

c) $M_4,\ M_5$ d) $M_7,\ M_{10}$

4. Beweisen Sie (durch vollst. Induktion): $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)$

5. Beweisen Sie: $2^n > n^2$, für $n \geq 5$.

6. Gegeben: $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2,3\}$, $C=\{1\}$, $D=\{1,2,3\ldots\}$;
Bilden Sie: $A\times B$, $A\times C$, $B\times A$, $C\times D$.

7. wie 5.: a) $9/(4^n+15n-1)$ b) $1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, $(q\neq 1)$

9. Reelle und komplexe Zahlen

Ungleichungen und Beträge

1. Geben Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen an:

1.1. $3 - 2x > 4x + 7$,

1.2. $|2x - 1| < 1$.

2. Veranschaulichen Sie die Lösungsmenge im kartesischen Koordinatensystem:

$|x| - |y| = 0$.

3. Für welche x gilt $\frac{x^2 + 2x - 35}{x + 9} < 0$?

4. Für welche x gilt $|x + 3| \geqq |2x + 1|$?

5. Lösen Sie graphisch die Ungleichung

$|x - 1| < \frac{1}{2}(x + 5)$.

6. Veranschaulichen Sie die Lösungsmenge im kartesischen Koordinatensystem:

6.1. $|x + y| \leqq 1$,

6.2. $|x| + |y| \leqq 1$.

7. Veranschaulichen Sie die Lösungsmenge im kartesischen Koordinatensystem:

$|x| + |y| = |x + y|$.

8. Für welche x gilt

$\sqrt{x + 6} > \sqrt{x + 1} + \sqrt{2x - 5}$?

9. Lösen Sie graphisch die Ungleichung

$|x + 2| \leqq 3x - 5$.

Komplexe Zahlen

1. Gegeben: $z_1 = 2-2i$, $z_2 = 1+\sqrt{3}\,i$.
   Bestimmen Sie: a) z_1+z_2; b) z_1-z_2; c) $z_1 \cdot z_2$; d) $z_1 : z_2$; e) $\bar{z}_1, \bar{z}_2$
   f) $z_1 \cdot \bar{z}_1$; g) $z_1+\bar{z}_1$; h) $|z_1|$, $|z_2|$; i) $|z_1 \cdot z_2|$; j) $|z_1 : z_2|$; k) $\arg z_1$
   l) $\arg z_2$; m) $\arg(z_1 \cdot z_2)$; n) $z = z_1+\bar{z}_1-|z_1|$; o) $z=\bar{z}_2+|z_2 : z_1|$;

2. Veranschaulichen Sie folgende Punktmengen in der Gauß'schen Zahlenebene:
   a) $|z| \leq 4$; b) $|z| > 2$; c) $1 \leq |z| \leq 4$; d) $|z-z_0| \leq R$; e) $\operatorname{Re} z \geq 1$;
   f) $\operatorname{Re} z^2 = 1$; g) $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a}, a > 0$; h) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$; i) $0 \leq \operatorname{Re}(iz) \leq 2\pi$;

3. Bestimmen Sie die trigonometrische Form der folgenden komplexen Zahlen: $z_1 = 3$; $z_2 = -2$; $z_3 = 3i$; $z_4 = -5i$; $z_5 = -2-2i$;
   $z_6 = -1+i\sqrt{3}$; $z_7 = 1-\sqrt{3}\,i$; $z_8 = 4-4i$; $z_9 = -\sqrt{2}-i\sqrt{2}$;
   $z_{10} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$;

4. Vereinfachen Sie:
   a) $\dfrac{1+\frac{1}{i}}{1-\frac{1}{i}} = z$; b) $z = \dfrac{\frac{5}{2}+\frac{i}{2}}{2+\frac{1}{1-i}}$; c) $z = \dfrac{(1+2i)(2-i)+1}{(2-i)^2-2+i}$;

   d) $z = \dfrac{(6-2i)(1+i)}{(2+i)(2+2i)}$; e) $z = \dfrac{4+2i}{1+i} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}i$;

   f) $z = \dfrac{1}{i^5} + \dfrac{1}{i^7}$; g) $\dfrac{1}{1+j\omega T}$; h) $\dfrac{1}{\frac{1}{R+j\omega L}+j\omega C}$

5. Berechnen Sie für:
5.1. $z_1 = \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi$; $z_2 = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi$;
   a) $z_1 \cdot z_2$; b) $z_1 : z_2$.
5.2. $z_1 = 3(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$; $z_2 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$
   a) $z = z_1 \cdot z_2$; b) $z = z_1 : z_2$; c) $z = z_1+z_2$; d) $z = z_2^{\,7}$

6. Berechnen Sie:
   a) $(1+i)^8$, b) $(1-i)^{10}$, c) $(2+i\sqrt{12})^5$, d) $(\cos x + i\sin x)^2$,
   e) $(-\sqrt{3}+3i)^4$

7. Lösen Sie grafisch und rechnerisch die Gleichungen:
   a) $z^3 = 1$, b) $z^4 = 1$!

8. Lösen Sie folgende Gleichungen:
   a) $z^3+2i = 0$, b) $z^6-i = 0$, c) $\frac{z^4}{8} + \sqrt{3}\,i = -1$,

   d) $z^2 = \dfrac{1-3i}{1+3i} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$, e) $\frac{1}{32}z^5 + i\sin 135^\circ = \cos 135^\circ$,

f) $z^2 - 2iz - 1 - \overset{2i}{\cancel{7i}} = 0.$

9. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen im Bereich der komplexen Zahlen:
a) $x^4 - 16 = 0$, b) $x^6 - 4x^3 + 8 = 0$, c) $z^5 - z^4 + z^2 - z = 0$

7. Hausaufgaben

1. Veranschaulichen Sie in der komplexen Zahlenebene die Punktmengen: a) $1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$, b) $\operatorname{Im} z^2 = 1$!

2. Berechnen Sie mittels der trigonometrischen Form der komplexen Zahlen:
a) $(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}) \cdot (-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{i}{2})$, b) $(6 + 8i) : (-5 + 12i)$

3. Berechnen Sie:
a) $(\sqrt{3} + i)^9$, b) $(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3})^{12}$, c) $(-2 + i\sqrt{12})^{11}$, d) $(1 - i)^{14}$

4. Lösen Sie die Gleichung $z^6 = 1$ grafisch und rechnerisch!

5. Für welche z-Werte gilt: $z^5 = 8 - 6i$?

6. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichung im Bereich der komplexen Zahlen: $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

7. Berechnen Sie für die komplexen Zahlen:
$z_1 = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ und $z_2 = -\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2} i$
a) $z = z_1 \cdot z_2 + \frac{1}{z_2}$ b) $z = \frac{z_1}{\overline{z_2}} + z_2$

8. Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Nullstellen des Polynoms $P(z) = z^7 - 2z^6 + z^3 - 2z^2$.
Geben Sie die Zerlegung in reelle Faktoren an!

9. Berechnen Sie $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w \\ 1 & w & w^2 \end{vmatrix}$, mit $w = \cos\frac{2}{3}\pi + i \sin\frac{2}{3}\pi$.

10. Für welche x-Werte gelten die folgenden Ungleichungen:
1. $8x + 7 < 5x - 4$ 2. $-2x^2 + 14x - 20 > 0$
3. $|x-1| < |2x| + 1$ 4. $|2x-1| \geq x+4$
Die Ungleichung 4 ist auch grafisch zu lösen!

11. Veranschaulichen Sie im Koordinatensystem die Lösungsmenge der Ungleichung $|x| - |y| \leq 1$!

10. Elementare Funktionen

Rationale Funktionen

1. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen $y = P(x)$, und skizzieren Sie die Funktionsbilder. Kontrollieren Sie die Nullstellen, soweit sinnvoll, mittels des Satzes von VIETA, und zerlegen Sie $P(x)$ in Faktoren:

1.1 $P(x) = 5x + 1$, 1.2 $P(x) = x^2 - [illegible]$,

1.3 $P(x) = -x^3 - x$, 1.4 $P(x) = x^2 + 4x + [illegible]$.

2. Berechnen Sie mittels HORNER-Schema $P(x_0)$ für

2.1 $P(x) = x^4 - 5x^3 - 10x + 16$, $x_0 = [illegible]$,

2.2 $P(x) = 3{,}7x^2 - 4{,}56x + 7{,}92$, $x_0 = 2{,}[illegible]$.

3. Bestimmen Sie unter Verwendung des HORNER-Schemas die Nullstellen der folgenden Polynome, und zerlegen Sie sie in Faktoren:

3.1 $P(x) = -x^3 + 3x + 2$,

3.2 $P(x) = x^8 - 5x^7 + 9x^6 - 11x^5 + 10x^4 + [illegible]x^3 - [illegible]x^2$,

3.3 $P(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$, 3.4 $P(x) = x^4 + 4x^2 + 3$.

4. Schreiben Sie die folgenden Funktionen als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochenen rationalen Funktion:

4.1 $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x - 1}$, 4.2 $y = \dfrac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2}$.

5. Bestimmen Sie die Definitionsbereiche, Achsenschnittpunkte, Unstetigkeitsstellen sowie Asymptoten der folgenden Funktionen und skizzieren Sie die Funktionsbilder:

5.1 $y = \dfrac{1}{2 - x}$, 5.2 $y = \dfrac{2x + 1}{3x - 2}$,

5.3 $y = \dfrac{x^2 - 16}{x - 3}$, 5.4 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$,

5.5 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, 5.6 $y = \dfrac{3x - 6}{x^2 - 3x + 2}$

5.7 $y = \dfrac{x^4 - 4x^3 + 5x^2 + [illegible]x - 4}{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}$.

6. Die Funktion $y = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ ist proportional zur Dichte eines Stoffes mit der Brechungszahl n. Stellen Sie die Funktion für $1 < n < 3$ graphisch dar!

7. Stellen Sie zu der folgenden Tabelle das Interpolationspolynom nach Newton auf:

a)

x	-1	0	1	2
y	6	2	2	12

b)

x	-2	-1	0	1	3
y	13	-7	-7	-5	53

c) Zu b) noch $x_5 = 2$; $y_5 = -19$.

Wurzelfunktionen

8. Skizzieren Sie die folgenden Funktionen (Definitionsbereich, Scheitelpunkt, Nullstellen):
$y = \sqrt{x}$; $y = 2\sqrt{x+1}$; $y = -0{,}5\sqrt{x-3}$;
$y = 1 + \sqrt{x-3}$; $y = 1 + \sqrt{3-x}$; $y = \sqrt[3]{x-1}$

9. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:
a. $\sqrt{4a^2 - 9b^2}$; $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{3}$; $(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{12} - \sqrt{27})\sqrt{3}$
$1 : (\sqrt{5} - \sqrt{8})$

10. Lösen Sie: $\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3} = 2\sqrt{x+1}$

11. Stellen Sie grafisch dar:
a) $y = 1 - \sqrt{2-x}$; b) $y = x^2 + 1$ c) $y = x + \frac{1}{x}$
c) $y = \sqrt{1-x^2}$; d) $y = \sqrt{1-|x|}$.
Ermitteln Sie dazu den Definitionsbereich, den Wertevorrat und die Nullstellen. Bilden Sie die Umkehrfunktionen.

12. Vereinfachen Sie:
a) $\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{27}$
b) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2})$
c) $5\sqrt{28} + 2\sqrt{175} - 4\sqrt{63} - 3\sqrt{700} + 8\sqrt{567}$
d) $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$
e) $\dfrac{5\sqrt{2} + \sqrt{30}}{5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}$

13. Lösen Sie:
a) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3} = 2\sqrt{x+1}$
b) $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b}$; $a > 0$; $b > 0$
c) $5\sqrt{3x+4} - 3\sqrt{2x-5} = 4\sqrt{3x-5}$
d) $2 - \sqrt{x} < \sqrt{10-x}$

14. a) 1. $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$
2. $\sqrt[3]{x^3 - 2x - 3} = x - 1$
3. $x^2 + 4 - 5\sqrt{x^2 - 2} = 0$
4. $\sqrt{x^2 - x + 6} + 6(x^2 - x + 6)^{-1/2} > 7$
5. $\sqrt{a + \sqrt{x}} + \sqrt{a - \sqrt{x}} < \sqrt{2}$

b) Vereinfachen Sie:
1. $\dfrac{\sqrt{(a+x)(x+b)} + \sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)} - \sqrt{(a-x)(x-b)}}$, mit $x = \sqrt{ab}$, $(a>0)$
2. $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{x}} - \left(\dfrac{a + \sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ax}} - \sqrt[4]{ax} \right) : (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{x})$

Logarithmus- und Exponentialfunktionen

15. Stellen Sie grafisch dar:
$y = e^{-x}$; $y = e^{x+2}$; $y = \ln(-x)$; $y = \lg(x+2)$; $y = 4 - \ln(x+2)$.

16. Berechnen Sie mit Logarithmentafel:
$6{,}32 \cdot 0{,}0403$
$0{,}00764 : 0{,}124$
$\sqrt[9]{0{,}00183}$.

17. Lösen Sie:
a) $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)} = 3$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$
b) $\log_x\sqrt{5} + \log_x(5x) - 2{,}25 = (\log_x\sqrt{5})^2$
c) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\lg 4}{\lg 8}$
d) $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$.

18. Ermitteln Sie mittels linearer Interpolation:
$\lg 2{,}345$; $\lg 33{,}64$; $\lg 1{,}0713$; $\lg 0{,}09328$
$\lg x = 0{,}0086 - 1$; $\lg x = 2{,}5597$.

19. Berechnen Sie mit Logarithmentafel:
$0{,}9135 \cdot 0{,}0217 \cdot 0{,}1368$
$\left(\frac{0{,}7583}{0{,}04704}\right)^5$.

20. Für die Durchhangkurve (Kettenlinie) eines Seiles ohne Biegesteifigkeit gilt die Gleichung:
$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.
Ermitteln Sie (mit $a = 10$) Funktionswerte für die Koordinaten $x = 0$; ± 4 ; ± 6 ; ± 10 und stellen Sie die Funktion grafisch dar.
Berechnen Sie ein Näherungspolynom (quadratische Parabel) durch die Punkte mit den Koordinaten $x = -10$; 0 ; 10.
Berechnen Sie für $x = 0$; ± 4 ; ± 6 ; ± 10 die Funktionswerte des Polynoms und vergleichen Sie diese mit den Werten der Kettenlinie.

Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

21. Zeichnen Sie in je eine Darstellung die Bilder der Funktionen:

a) $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = 1/2 \sin 3x$

b) $y = \cos x$, $y = \cos \frac{x}{2}$, $y = 2 \cos \frac{x}{3}$, $y = \frac{1}{2} \cos x \cdot e^x$

c) $y = \sin x$, $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $y = 2 + \sin x$, $y = 1 - \sin(x - \pi)$

d) $y = \sinh x$, $y = \cosh x$, $y = \sinh(x-1)$, $y = \cosh(x+2) - 1$!

22. Vereinfachen Sie: $Z = \sin\beta \cdot \sqrt{1 + \cot^2\beta}$.

23. Bestimmen Sie die 4 Werte der Winkelfunktionen für $\varphi = 72{,}68^\circ$.

24. Entwickeln Sie einen Ausdruck für

a) $\tan(45^\circ + \beta)$ b) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha)$.

25. Berechnen Sie mittels der Additionstheoreme aus den genauen Werten der Winkelfunktionen für 45° und 30°

a) $\sin 15^\circ$ b) $\tan 15^\circ$!

26. Bestimmen Sie: $\sin 118^\circ$, $\tan 137^\circ$, $\cos(-200^\circ)$, $\cos 193^\circ$, $\cot 257^\circ$, $\sin(-310^\circ)$, $\tan(-470^\circ)$, $\cos 900^\circ$!

27. Lösen Sie die goniometrischen Gleichungen:

a) $2\sin^2 x = 3\cos x$ b) $\sin 2x = \tan x$ c) $1 - \cos x = \tan \frac{x}{2}$

28. Eine Fahnenstange (Länge l) steht auf einer senkrechten Säule (Höhe h). In welcher horizontalen Entfernung x vom Fuß der Säule erscheinen diese und die Stange unter gleichen Winkeln? Wie ist der Winkel von h und l abhängig? (Zahlenbeispiel: h = 3m, l = 6m)

29. Von einem Dreieck seien bekannt: a, b, γ. Berechnen Sie c, α, β. (Zahlenbeispiel: $a = 5{,}38$; $b = 2{,}46$; $\gamma = 125^\circ 24'$)

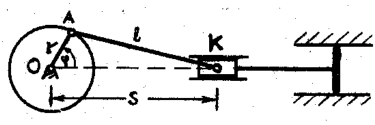
30. Es ist die Länge eines Riemens zu berechnen, der straff um zwei Seilscheiben vom Radius R bzw. R/2 gespannt ist, wenn der Achsabstand der Scheiben 2R ist.

31. Bei der Berechnung der Schwingungsdauer eines schwingenden Siebes ergibt sich die Gleichung

$$\tan\left(\omega_1 \cdot \frac{T}{4}\right) = \frac{K \cdot \sin\omega_1 t_1 \cdot \sin\omega_2 t_1 + \cos\omega_1 t_1}{K \cdot \cos\omega_1 t_1 \cdot \sin\omega_2 t_1 - \sin\omega_1 t_1}$$

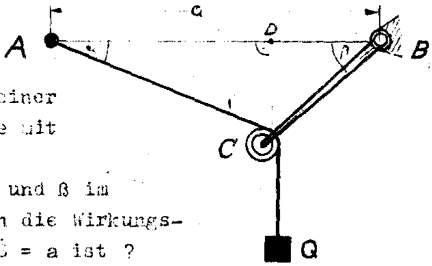
Welchen Wert nimmt T an, wenn $t_1 = 0$ ist?

32. Der Weg $s = \overline{OK}$ des Kreuzkopfes eines Kurbelgetriebes ist in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel φ darzustellen. Für welchen Kurbelwinkel φ_0 steht der Kreuzkopf genau mitten zwischen den Totlagen?



8. Hausaufgabe

1. Eine Welle AB bestehe aus drei Teilstücken mit den Längen 100;200;100 mm und den Massen 2 ; 3 ; 1 kg. Man stelle die Masse eines Abschnittes AX dieser Welle als Funktion der Länge x dar, wobei x von A aus abgetragen wird.
2. Zerlegen Sie in Faktoren: $F(x) = x^7 - x^6 + 2x^5 - 17x^3 + 25x^2 - 10x$.
3. Skizzieren Sie die Funktion: $Y = (2x-2) / (x^2 - 2x - 3)$.
4. Bei durchsichtigen Körpern mit der Brechungszahl n ($n \geq 1$) hat das Reflexionsvermögen R den Wert:
$$R = R(n) = (n^2 - 2n + 1)/(n^2 + 4n + 4).$$
a) Skizzieren Sie diese Funktion!
b) Erweitern Sie die Skizze für $n < 1$.
5. Lösen Sie:
a) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{3x-5} = \sqrt{4x-15} - \sqrt{3x-21}$
b) $\cos 3x + 2 \cos x = 0$ c) $\ln x^2 + \ln 3x^{-3} = 2\ln x^{-1} + 2$
6. Zeichnen Sie die Funktionen:
a) $y = |x| - x$ b) $y = 1 - 2\cos(x - \frac{\pi}{3})$ c) $y = \lg \frac{2+x}{2-x}$.
7. Ermitteln Sie unter Verwendung einer Tafel:
a) $\cos 280^\circ$, $\cot (-920^\circ)$
b) $\sin x$, $\cot x$, $\lg \sin x$, $\lg \tan x$ für $x = 64^\circ 13'$
c) $$\frac{5642^4 \cdot \sqrt{0{,}09168}}{13460^3}$$
8. Man berechne den für die Theorie des Drehstroms wichtigen Ausdruck: $\sin \beta + \sin (\beta + 120^\circ) + \sin (\beta + 240^\circ)$!
9. An einem in A befestigten, über die Rolle C laufenden Seil greift die Last Q an. Die Rolle C befindet sich an einer in B drehbar gelagerten Stange mit der Länge $\overline{BC} = b$.



a) Wie groß sind die Winkel α und β im Gleichgewichtszustand, wenn die Wirkungslinie von Q senkrecht zu $\overline{AB} = a$ ist ?
b) Wie lang muß b gewählt werden, damit $\overline{BD} = \frac{a}{n}$ wird ? ($n \in N$)
c) Untersuchen Sie die Spezialfälle $b = a$, $b \to 0$.
(Rollendurchmesser sowie Gewicht des Seiles und der Stange vernachlässigen.)

11. Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen

11.1 [illegible]

1.1 Gegeben ist die Zahlenfolge mit $a_n = \frac{2n-7}{3n+2}$

Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie und Beschränktheit.
Geben Sie die Glieder mit n = 5, 10, 50, 100, 500 an.
Bestimmen Sie den Grenzwert.
Bestimmen Sie $N(\varepsilon)$ für ε = 1, 1/10, 1/100, 1/1000.

1.2 Untersuchen Sie die Zahlenfolge auf Monotonie und Beschränktheit:

a) $a_n = (n+2)/2n$ b) $a_n = (n^2+1)/(n+1)$

2. Untersuchen Sie auf Konvergenz! Bestimmen Sie den Grenzwert:

$$a_n = (1 + 1/3n)^n.$$

3. Bestimmen Sie ein $N(\varepsilon)$, so daß $|a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon)$, mit $a_n = \frac{1}{n^2-1}$; $\varepsilon = 0{,}01$.

4. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{3x^2+2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x-1}{2-x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^5-x^2-2}{x^4+3x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)^x}{n^x}\right]^n$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x)^x}{(2x+1)^x}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin^3 x}{x}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^n+(n-1)^n}{n^n}$

5. Für welche x ist f(x) unstetig? Welcher Art ist die Unstetigkeit? Skizze!

a) $y = 2 - \frac{|x|}{x}$ b) $y = \left(1+\frac{4}{x}\right)^x$ c) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ d) $y = \begin{cases} 0 & ; x=2 \\ \frac{1}{2^{x-2}} & ; x\neq 2 \end{cases}$

6. Für die isobare Wärmeausdehnung eines idealen Gases gilt die Gleichung $V_1 = V_0(1+\gamma\Delta t)$. Leiten Sie diese Formel aus der Zustandsgleichung für ideale Gase $pV = mRT$ her, indem Sie p und m als konstant annehmen!

Symbole: t - Temperatur in °C, p - Druck, R - Gaskonstante
T - " " °K, V - Volumen,
Δt - Temperaturdifferenz, V_0 - " bei 0°C=273°K
γ - Ausdehnungskoeffizient, $\gamma = (273\ \text{grd})^{-1}$

9. Hausaufgabe

1. Bestimmen Sie Db, WV und Umkehrfunktion von:
   1. $y = -\sqrt{x}$ 2. $y = e^{-x}$ 3. $y = e^{x+1}$

2. Untersuchen Sie die Zahlenfolge auf Monotonie und Beschränktheit.
   a) $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$, b) $\{a_n\} = \{an/(n+1)\}$ (a...reeller Parameter)

3. Untersuchen Sie auf Konvergenz! Bestimmen Sie die Grenzwerte:
   a) $a_n = ((1-\lambda^2)/(1+\lambda^2))^n$ b) $a_n = (\lambda^n - \lambda^{-n})/(\lambda^n + \lambda^{-n})$, $(\lambda > 0)$

4. Bestimmen Sie ein $N(\varepsilon)$, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$, mit $a_n = 1/(n^2 - 1)$,
   $\varepsilon = 0{,}001$.

5. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:
   a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ (ohne l'Hospital)

   c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 + 3x^2}{2x^2 + x^3 + x^5}$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ e) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(2x)^x}{(2x-1)}\, x$

6. Für welche x ist f(x) unstetig? Welcher Art ist die Unstetigkeit? Skizze!
   a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = \frac{1}{x^2}$ c) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

   d) $y = \frac{1}{1+2^{1/x}}$ e) $y = x \sin \frac{1}{x}$

7. Sei $X = N \cap \{x:\ 0 < x < 21 \wedge x \in R\}$, $A = X \cap \{x:\ 6/x\}$
   $B = X \cap \{x:\ 4/x\}$
   $C = X \cap \{x:\ 3/x\}$.

   Geben Sie alle Zahlen x an, für die gilt:

   a) $x \in A \cap B$ b) $x \in A \cup B$ c) $x \in B \setminus C$
   d) $x \in A \setminus B$ e) $x \in C \cap B$ f) $x \in A \setminus (A \cap B)$
   g) $x \in (C \setminus A) \cup (C \cap A) \cup (A \setminus C)$

11.2 Differentiation von Funktionen; Anwendungen

Ableitung von Funktionen

1. **Differenzieren Sie; bestimmen Sie den DB von f und f':**

a) $y = 5x^{2/3} - 3x^{5/2} + 2x^{-1}$ b) $s = \frac{\cos t}{1 - \sin t}$

c) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ d) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots + \frac{1}{x^n}$

e) $z = (1 - x^3)^5$ f) $s = \ln \sin \omega t$

g) $y = 2\, x^{-2} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{4x^5}}\right)^{-2}$ h) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

i) $z = x^3\, (x^2 - 1)^2$ j) $y = x^{\sin x}$

k) $y = \sin\,(2x^2 - 3x + 1)$ l) $u = \sin^2 \omega t$

m) $v(t) = \sqrt{1 + \sqrt{2pt}}$ n) $y = e^{\cos x} \sin x$

o) $y = 2^{\sin 3u}$ p) $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln \tan \frac{x}{2}$

q) $y = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2} - 2 \arctan x$ r) $b = b(t) = \frac{\ln \sin t}{\ln \cos t}$

s) $y = 2^{\,x/\ln x}$ t) $y = y(b) = \ln \frac{\exp b}{b^2 + 1}$

u) $y = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$ v) $z = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

2. **Berechnen Sie die 1. Ableitung an der Stelle x_o:**

$y = e^{2x};\ x_o = 2$ $y = 1 - \sqrt[3]{x^2} + \frac{16}{x};\ x_o = -8$

3. **Bestimmen Sie die n-te Ableitung von:**

$y = a^x$ $y = \ln x$

4. **Bilden Sie das Differential von $f(x) = \sin x - x \cos x$**

5. Bestimmen Sie den Anstiegswinkel der Kurve $y = f(x)$ an der Stelle x_o:

a) $f(x) = x^3\ ,\ x_o = 0$ b) $f(x) = e^{-x}\ ,\ x_o = 0.$

6. Die Schwingungsenergie U_s idealer Gase errechnet sich aus

$$U_s = RT^2 \frac{d \ln Q_s}{d\,T} \qquad \text{mit } Q_s = (\,1 - e^{-\theta/T}\,)^{-1}.$$

Ermitteln Sie U_s!

7. Bei einer Stabilitätsuntersuchung ergab sich

$$F = F(\varphi) = 4cl \sin\varphi \cdot \left(1 - \frac{\cos \beta}{\cos \varphi}\right).$$

Zur kritischen Belastung F_k gehört der Winkel $\varphi = \varphi_k$. Er ergibt sich aus der Beziehung : $\left.\frac{d\,F}{d\,\varphi}\right|_{\varphi = \varphi_k} = 0$. Berechnen Sie φ_k als Funktion von β.

Anwendung der Ableitung

8. Berechnen Sie die Grenzwerte (nach l'Hospital):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to +0} \frac{\ln x}{\cot x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to +0} \cot x \cdot \sinh x$ f) $\lim\limits_{x\to +0} (\sin x)^x$

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4} - 0} (\tan x)^{\tan 2x}$ h) $\lim\limits_{x\to +0} \frac{\ln \tan ax}{\ln \tan bx}$ $(a, b > 0)$

9. Führen Sie für $y = f(x)$ eine vollständige Kurvendiskussion durch (Definitionsbereich, Wertevorrat, Symmetrieverhalten, Achsenschnittpunkte, Unstetigkeiten, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Extrema, Wendepunkte, Monotonieintervalle, konvex-konkav, Skizze) :

a) $y = x^3 - x^2 - 2x$ b) $y = 2x - x\ln(x-1)$ c) $y = x \ln^2 x$

10. Die Kantenlänge eines Würfels wird mit $x = (5 \pm 0{,}01)$ cm gemessen. Bestimmen Sie den absoluten und den relativen Fehler des Volumens.

11. Ersetzen Sie den Funktionszuwachs durch das Differential zur Näherungsberechnung von $\sqrt[3]{1{,}02}$.

12. Ein Körper bewegt sich auf der x-Achse nach dem Gesetz:
$x = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Bewegung. Zu welchen Zeitpunkten ändert der Körper die Richtung der Bewegung?

13. Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v = \dot{s}$ und die Beschleunigung $a = \ddot{s}$ (sowie von beiden die Extrema) des Kreuzkopfes für $\varphi = \omega t$ und $l = r$ (siehe Aufgabe 7/32).

14. Benutzen Sie das NEWTON'sche Näherungsverfahren zur Bestimmung der Nullstellen der Funktion

a) $y = x^3 - 6x + 2$ b) $f(x) = \sin x - \frac{1}{x} + 1$

15. Berechnen Sie Näherungswerte für die Lösungen der Gleichung
$\frac{1}{x} = 3 - x^2$.

Parameterdarstellung von Kurven und Funktionen

16. Bringen Sie die Gleichungen der folgenden Kurven auf die Form $y = f(x)$ oder $F(x,y) = 0$:

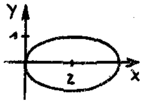
a) $x = t, \quad y = 4\,t^2$ b) $x = a \sin^2 t, \quad y = a \cos^2 t$

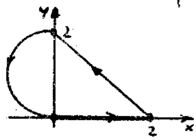
c) $x = a \cos t, \; y = b \sin t$ -2 d) $x = \cosh t \;, \quad y = \sinh t$

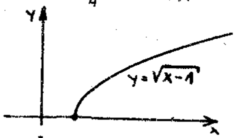
17. Geben Sie für die folgenden Kurven Parameterdarstellungen an:

a) Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $P_1(1;0;-1)$ und $P_2(2;-1;1)$

b) 

c) 

d) 

e) 

18. Geben Sie zu 16.d) und 17.c) den Anstieg $y' = \frac{dy}{dx}$ in Abhängigkeit von t an.

19. Die Parameterdarstellung der gewöhnlichen **Zykloide** lautet:

$$x = a\,(t - \sin t)$$
$$y = a\,(1 - \cos t).$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve durch den Punkt, für den $t = t_0 = \pi/2$ ist.

20. Gegeben sei die Kurve $x = a \cos^3 t, \; y = a \sin^3 t$.
a) Geben Sie eine Darstellung in kartesischen Koordinaten an!
b) Zeigen Sie, daß diese Kurve die Bahnkurve eines Punktes eines Kreises vom Radius $a/4$ ist, wenn dieser Kreis auf einem zweiten Kreis vom Radius a ohne zu gleiten rollt (wobei der kleinere Kreis stets innerhalb des größeren bleibt; Skizze!).

21. Gegeben sei die C_2: $x = t^2 + 2t$
$y = t^2 - 2t - 1$. (C_2...Kurve 2. Ordnung)

Gesucht sind: a) Horizontaltangenten ($y' = 0$!)
b) Vertikaltangenten
c) Wie 16.
d) Definitionsbereich
e) Wertevorrat
f) Nullstellen
g) Skizze

10. Hausaufgabe

1. Differenzieren Sie:

$y = (x^2+1)\,\arctan x$ $\qquad s = \sqrt{4t-1} + \operatorname{arccot}\sqrt{4t-1}$

$y = \arctan\sqrt{u}$ $\qquad y = \ln(e^{2t}+1) - 2\arctan e^t$

$y = \ln^2 \arctan\frac{x}{3}$ $\qquad z = x(\cos\ln x + \sin\ln x)$

2. Bestimmen Sie die n-te Ableitung:

a) $y = x\,e^{x/a}$ $\qquad$ b) $y = \frac{1}{1+2x}$

3. Mit welcher relativen Genauigkeit muß der Radius einer Kugel gemessen werden, damit der relative Fehler bei der Berechnung des Volumens kleiner als 1% ist?

4. Die Schwingung eines Massenpunktes genüge dem Gesetz $x = A\cos\omega t$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit und Beschleunigung für $x = \pm A$ und $x = 0$. Zeigen Sie die Gültigkeit von $\ddot{x} = -\omega^2 x$.

5. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

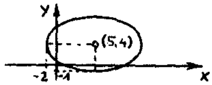
a) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\ln x)$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x\sin x}$

c) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x^2-2\pi x+\pi^2}{\sin^2 x}$ $\qquad$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{3x^2-15x+18}$ $\qquad$ f) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$

6. Führen Sie eine Kurvendiskussion durch: $y = f(x) = e^{-\cos x}$.

7. Geben Sie für folgende Ellipse eine Parameterdarstellung an:



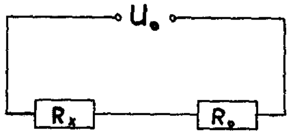
8. Geben Sie für folgende Kurve eine Gleichung in kartesischen Koordinaten und fertigen Sie eine Skizze an:

$$x = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1}\ (1),\quad y = \frac{at(t^2-1)}{t^2+1}\ (2);\quad (a>0).$$

(Hinweis: Setzen Sie (1) in $y/x = \ldots$ ein;
Skizze: $\lim y, y'$ für $x \to \pm a$)

9. Gegeben sei folgende Schaltung:

Wie muß R_x gewählt werden, damit die von diesem Widerstand aufgenommene Leistung maximal wird ?



10. Berechnen Sie einen Näherungswert für die reelle Lösung der Gleichung $x^3 + x + 1 = 0$.

12. Funktionen mehrerer Variabler

Partielle Ableitung und totales Differential

1. Ermitteln Sie DB, Wertevorrat und Bild folgender Funktionen:

   a) $z = x - y$ b) $z = x^2 + y^2$ c) $z = c$
   d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e) $z = \sqrt{1 - x^2}$ f) $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$
   g) $z = \sqrt{xy}$

2. Durch welche Bedingungen muß der DB bei den folgenden Funktionen eingeschränkt werden:

   a) $z = \frac{y}{x-y}$ b) $z = \frac{1}{xy}$ c) $z = \frac{1}{\sin 2x}$
   d) $z = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^{-1}$ e) $z = \ln\left(1 - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\right)$

3. Berechnen Sie für nachstehende Funktionen alle partiellen Ableitungen erster Ordnung:

   a) $f(x,y) = 5x^3 + 3x^2y + 7xy^5 - y^6$ b) $f(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$
   c) $f(s,t) = e^{\sin st}$ d) $f(a,b) = a^b$
   e) $f(x,y,z) = xyz + \frac{y-z}{x}$ f) $g(u,v,w) = \frac{u \cdot x}{u^2 + v^2 + w^2}$
   g) $T(f,g,h) = \frac{1}{\sqrt{g^2 + h^2}}$ h) $u(a,b,c) = \arctan \frac{a}{b} + \frac{1}{x}$

4. Bilden Sie alle partiellen Ableitungen

   a) zweiter Ordnung von $f(x,y) = x^2 + e^x y + e^y x^2 - 3x \ln y$,
   b) dritter Ordnung von $g(u,v) = u^3 - u^2 v + v^3$.

5. a) Bei der Berechnung der Translationsenergie U_t idealer Gase ist die partielle Ableitung

$$\frac{\partial \ln Q_t}{\partial T} \qquad \text{mit } Q_t = Q_t(v,T) = \frac{(2\,\mathrm{mk}T)^{3/2}\,v}{k^3}$$

   zu bilden. Führen Sie die Differentiation aus!

   b) Stellen Sie die LAGRANGEschen Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

   mit $L = T - U$ unter Verwendung von Kugelkoordinaten für einen Massenpunkt auf der (ruhenden) Erdoberfläche auf!
   Dabei bedeuten: U...potentielle Energie (von ϑ und φ unabhäng.)

$$T = mR^2/2\,(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) \quad \text{...kin. Energie}$$

$$q_1 = \vartheta\,,\quad q_2 = \varphi\,.$$

6. Berechnen Sie für folgende Funktionen das totale Differential:

a) $z = f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ b) $z = g(u,v) = \arctan \frac{u}{v}$

c) $w = w(x,y,z) = e^{x^2 + y^2 + z^2}$ d) $Z = Z(u,v,w) = \ln\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$

7. Berechnen Sie y' durch implizite Differentiation:

a) $2x^3 + 2xy^2 - 2y = 0$ b) $x^3 + y^3 = 3axy$

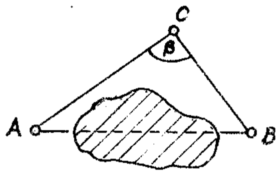
c) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

8. Berechnen Sie Δz und dz für $(x,y) = (5,4)$, $(\Delta x; \Delta y) = (0{,}1;-0{,}2)$ mit $z = xy$.

9. Ist $dz = e^{\sin x}(\tan y\, dx + \frac{dy}{\cos^2 y})$ ein vollständiges Differential?

10. Die Kanten eines Quaders wurden mit einer Genauigkeit von $\pm$ 0,1 mm gemessen: a = 10 cm, b = 6 cm, c = 5 cm. Für die Masse erhielt man (270 $\pm$ 0,5) g. Berechnen Sie die Dichte sowie deren maximalen absoluten und relativen Fehler!

11. Um wieviel Prozent kann das errechnete Volumen eines Zylinders fehlerhaft sein,wenn der Radius mit 1/3 % und die Höhe mit 1/2 % fehlerhaft gemessen werden?



12.a) Zur Bestimmung der nicht meßbaren Strecke $\overline{AB} = c$ wurde ein Hilfspunkt C gewählt und dann die Strecken a = 364,76 m, b = 402,35 m und der Winkel $\beta = 68^{\circ}14'$ gemessen. Die Meßfehler wurden mit $\Delta a = \Delta b = \pm$ 5 cm, $\Delta\beta = \pm 1'$ geschätzt. Wie groß sind c und sein absoluter Maximalfehler? Berechnen Sie die relativen Fehler von a, b, β und c!

b) Mit welchem relativen Fehler bei der Bestimmung der Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ eines Pendels muß man rechnen, wenn man für π 3,14, für die Länge l 1m (bis auf 1 cm genau) und für die Erdbeschleunigung 9,8 m s^{-2} einsetzt?

Extrema von Funktionen mehrerer Variabler

Bestimmen Sie alle relativen Extrema der folgenden Funktionen:

13. $z = f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 3xy - 5x - 2y + 5$,

14. $z = f(x,y) = e^x - xe^y$, 15. $z = f(x,y) = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$,

16. $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - xy + 10x + 10y - 4$,

17. $f(x,y) = \frac{1}{2} x^2 - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}$, 18. $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$,

19. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + ax + by$,

20. $f(x,y) = x^3 - y^3 + 3axy \quad (a \geq 0)$,

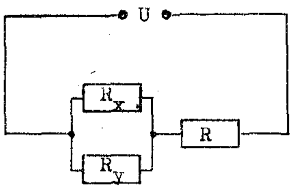
21. $f(x,y) = \frac{1}{3} x^3 + xy^2 - 5x + \frac{1}{3} y^3 - 5y$,

22. $f(x,y) = 3x^2 - 2x(y + 1) - 3y - 1$,

23. $f(x,y) = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$,

24. $f(x,y) = e^{y^2-x^2} + \frac{x^2}{2}$.

25.



Bei der angegebenen Schaltung berechnet sich die elektrische Gesamtleistung der Widerstände R_x und R_y nach der Formel

$$N = \frac{R_xR_y\ (R_x + R_y)\ U^2}{(R_xR_y + R_xR + R_yR)^2} .$$

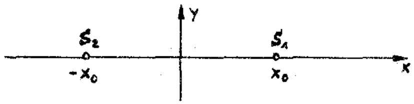
a) Für welche Werte von R_x und R_y wird N maximal?

b) Begründen Sie das Ergebnis auf einfache Weise!

26. Zwei Strahlungsquellen gleicher Intensität sollen entsprechend der Abbildung angeordnet sein. Dann berechnet sich für einen in derselben Ebene liegenden Punkt die Strahlungsintensität nach

$$f(x,y) = \frac{a}{(x-x_0)^2 + y^2} + \frac{a}{(x+x_0)^2 + y^2} , \quad a > 0.$$

Untersuchen Sie diese Funktion auf Extrema!



Bestimmen Sie alle relativen Extrema der folgenden Funktionen:

27. $f(x,y) = x \cos y$, 28. $f(x,y) = \sin x \cos y$,

29. $f(x,y) = x - \ln x - ay^2$ 30. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy + 2a^2$

Extrema mit Nebenbedingungen

31. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = x + y + 1 = 0$ durch Einsetzen der Nebenbedingung!

32. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = 3 - \frac{3}{4}x - y$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 4x^2 + 4y^2 - 9 = 0$ nach der Multiplikatorenmethode von Lagrange!

33. Bestimmen Sie die Art der Extrema von Aufgabe 32.

34. Bestimmen Sie mit geeigneten Mitteln die Extrema von $f(x,y,z)$ unter Beachtung der angegebenen Nebenbedingungen, und geben Sie die Art der Extrema an!

a. $f(x,y,z) = x + y + z$, NB: $\varphi_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$,
$\varphi_2(x,y,z) = x + z - 1 = 0$;

b. $f(x,y,z) = xyz$, NB: $\varphi(x,y,z) = x + y + z - a = 0, a>0$

35. Bestimmen Sie den kürzesten Abstand des Punktes $P_0(0;2)$ von der Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$.

36. Gegeben ist die Fläche
$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 2z + 2 = 0$.

1. Um was für eine Fläche handelt es sich? (Klassifizierung mit Tabelle)
2. Transformieren Sie auf Normalform und fertigen Sie eine Skizze an!
3. Bestimmen Sie den Punkt der Fläche, der im alten Koordinatensystem den kleinsten z-Wert hat!
4. Welche Punkte des Schnittgebildes mit der Ebene $z = 1$ haben den größten bzw. kleinsten Abstand vom Koordinatenursprung?

Ausgleichsrechnung

37. Bestimmen Sie m und n so, daß für $f(x) = mx + n$ die mittlere quadratische Abweichung der $f(x_i)$ von den y_i minimal wird:

a)

i	x_i	y_i
1	-1	-3,5
2	0	0,1
3	1	3,4

b)

i	x_i	y_i
1	1,4	2,8
2	2,6	-0,4

c)

i	x_i	y_i
1	2,0	0,0
2	1,8	0,4
3	2,0	0,2
4	2,2	-0,2
5	2,0	-0,2

38. In einer Kupferhütte werden an 6 Arbeitstagen die folgenden Werte für die Schmelzleistung S und den Koksverbrauch K ermittelt:

i	S_i	K_i
1	238	67,7
2	246	68,1
3	266	71,0
4	241	72,1
5	253	77,0
6	290	75,0

Für welche Werte von a und b gibt die Darstellung $S = aK + b$ den ermittelten Zusammenhang am besten wieder?

39. Ersetzen Sie in Aufgabe 30 die Gerade $f(x) = mx + n$ durch die Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$.

40. Für den Kraftstoffverbrauch eines PKW Trabant auf 100 km wurden folgende Werte gemessen:

i	v_i/kmh^{-1}	y_i/l
1	60	6,0
2	65	6,2
3	70	6,5
4	75	7,0
5	80	7,5

Drücken Sie den Zusammenhang zwischen v und y näherungsweise durch eine quadratische Funktion aus!

11. Hausaufgabe

1. Bestimmen Sie Definitionsbereich und Wertevorrat der folgenden Funktionen und fertigen Sie eine Skizze an:

   a) $z = 9 - x^2 - y^2$, b) $\frac{z}{c} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, c) $\frac{z}{c} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

2. Skizzieren Sie den Definitionsbereich von $z = \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$.

3. Die Schwingungswäre des idealen Gases berechnet sich aus

$$C_s = R\vartheta \frac{\partial(e^{\frac{\vartheta}{T}} - 1)^{-1}}{\partial T} .$$

   Was ergibt sich für C_s, wenn man die partielle Differentiation ausführt?

4. Zeigen Sie, daß die Funktion $z = e^{\frac{x}{y}} \ln y$ die "Differentialgleichung"

$$x \cdot z_x + y \cdot z_y = \frac{z}{\ln y}$$ erfüllt!

5. Ist $dz = 2 \arctan \frac{y}{x}\, dx + \ln(x^2 + y^2)\, dy$ ein vollständiges Differential?

6. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, die mit einer Genauigkeit von 0,1 cm gemessen wurden, sind gleich 7,5 cm und 18 cm. Bestimmen Sie den absoluten Fehler bei der Berechnung der Hypotenuse!

7. Von einem geraden Kegelstumpf hat man die Radien der Grundkreise mit $r_1 = (30 \pm 1)$ mm und $r_2 = (60 \pm 1)$ mm sowie die Höhe mit $h = (30 \pm 0{,}2)$ mm gemessen. Wie groß ist der maximale absolute Fehler bei der Berechnung des Volumens nach der Formel

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)?$$

8. Berechnen Sie die Extrema der folgenden Funktionen:

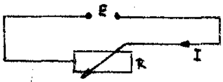
   a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$,

   b) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y \ln y + y^2$,

   c) $f(x,y) = xy$, NB.: $(x,y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

9. Ein Planet bewege sich auf einer Ellipse mit den Halbachsen a und b. In einem Brennpunkt stehe die Sonne. Berechnen Sie den größten und kleinsten Abstand zwischen beiden Körpern!

10. In der angegebenen Schaltung besteht zwischen der Urspannung E, der Spannung U, der Stromstärke I und dem inneren Widerstand R_0 der Spannungsquelle die Beziehung $U = E - R_0 \cdot I$. Durch Veränderung des Widerstandes R läßt sich I regulieren. Eine Meßreihe hat folgende Werte ergeben:



I/mA	0	2,1	4,0	6,2
U/V	6,2	5,8	5,7	5,2

Berechnen Sie daraus näherungsweise E und R_0 !

13. Integralrechnung für Funktionen einer Variablen

Integration mit Hilfe elementarer Umformungen des Integranden

1. a) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x}\,dx$ b) $\int \frac{x-2}{x^3}\,dx$ c) $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,dx$

   d) $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{\pi}{x^3}\right)dx$ e) $\int (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})\,dx$ f) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^3}}\,dx$

   g) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}\,dx$ h) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx$ i) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx$

Integration durch Substitution

2. a) $\int (4x-9)^{10}\,dx$ b) $\int e^{-3x}\,dx$ c) $\int \sqrt[3]{5-6x}\,dx$

   d) $\int \sin\frac{x}{2}\,dx$ e) $\int (9x-7)^{15}\,dx$ f) $\int \sqrt{-3-2x}\,dx$

   g) $\int \sqrt{1-x}\,dx$ h) $\int \frac{3}{\cos^2(6x-1)}\,dx$ i) $\int \frac{4\pi}{\sin^2(3-2x)}\,dx$

   j) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$ k) $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$ ℓ) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$

3. a) $\int \sin^4 x \cdot \cos x\,dx$ b) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ c) $\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx$

   d) $\int \frac{x^2}{4+x^6}\,dx$ e) $\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+7}\,dx$ f) $\int \tan x\,dx$

   g) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^2 x\,\sin^2 x}$ h) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ i) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$

   j) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$ k) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$ l) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(1+\tan x)^{1/2}}$

   m) $\int x^2 e^{x^3-8}\,dx$ n) $\int \frac{x+1}{x^2-1}\,dx$ o) $\int \sin 2x\,\frac{e^{\cos x}}{\cos x}\,dx$

   p) $\int \frac{x+1}{x^{a+1}}\,dx$ q) $\int \frac{dz}{z\ln z-z}$ r) $\int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+1}}$

   s) $\int \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}\,dy$ t) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$

4. a) $\int \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}$ b) $\int \frac{dx}{\sin x}$ c) $\int \sin x \cdot e^{\cos x}\, dx$

d) $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$ e) $\int \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} + 1}\, dx$ f) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$

g) $\int_{-6}^{0} \sqrt{-x^2 - 6x}\, dx$ h) $\int \frac{1}{\cos x}\, dx$ i) $\int \frac{dx}{\sinh^2(4-3x)}$

j) $\int \frac{dx}{\sqrt{-8+6x-x^2}}$ k) $\int_0^2 \sqrt{5+x^2}\, dx$ l) $\int \frac{x^2}{x^2 - 4}\, dx$

m) $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\, dx$ n) $\int \frac{dx}{\cos^2(4-2x)}$ o) $\int \frac{x\, dx}{(x^2+g^2)^n}$

p) $\int e^{7x-3}\, dx$

Partielle Integration

5. a) $\int x\, e^x dx$ b) $\int x \sin x\, dx$ c) $\int x \arctan x\, dx$

d) $\int x \cosh x\, dx$ e) $\int \ln x\, dx$ f) $\int x^2 \cos x\, dx$

g) $\int x\, e^{7x-4}\, dx$ h) $\int e^x \cos x\, dx$ i) $\int x^2 \ln x\, dx$

j) $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t\, dt$ k) $\int \cos^2 x\, dx$ l) $\int_0^{\pi} (1 - \frac{2}{\pi}x) \cos nx\, dx$

m) $\int_0^1 (x-x^2)\sin(n\pi x)dx$ n) $\int x^3 e^{-4x} dx$ o) $\int \ln(x^2+1)\, dx$

Integration durch Partialbruchzerlegung

6. a) $\int \frac{dx}{x^2-4}$ b) $\int \frac{x\, dx}{x^2+4x+4}$ c) $\int \frac{dx}{x^3+x}$

d) $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}\, dx$ e) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}\, dx$ f) $\int \frac{dx}{x^2+x}$

g) $\int \frac{5x-1}{x^3-3x-2}\, dx$ h) $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3 - x^2}\, dx$, i) $\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}\, dx$

j) $\int \frac{x^5+4x^3-x^2+3x+2}{x^4-3x^2+2x}\, dx$

7. a) $\int \frac{1}{3 - 2\cos x}\, dx$ b) $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$ c) $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x(1+\cos^2 x)}$

d) $\int \frac{dx}{(2x+1)(1+\sqrt{2x+1})}$ e) $\int \frac{(9x-5)dx}{9x^2-6x+1}$ f) $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}\, dx$

Aufgaben zur Ergänzung

8. a) $\int \frac{dt}{\sqrt{b^2-t^2}}$ b) $\int \frac{dx}{\sinh x}$ c) $\int \sqrt{a-bx}\, dx$

d) $\int \sin^3 x \cos x \, dx$ e) $\int \frac{dx}{\sin^2(4-3x)}$ f) $\int \sqrt{5-x^2}\, dx$

g) $\int \frac{(1-\sin x)dx}{\sin x(1-\cos x)}$

9. a) $\int \frac{dx}{9x^2+9}$ b) $\int \frac{x\,dx}{9x^2+9}$ c) $\int \frac{x^2dx}{9x^2+9}$

d) $\int e^{-x}dx$ e) $\int x\, e^{-x}dx$ f) $\int x\, e^{-x^2} dx$

10. a) $\int \frac{dx}{e^{3x}-2e^x}$ b) $\int \frac{dx}{3-2\sin x}$ c) $\int \frac{dx}{2x^2+9x-5}$

d) $\int x^2\cos(n\pi x)dx$ e) $\int \frac{\sin^3 x \cos x\, dx}{\cos^4 x}$ f) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\, dx$

g) $\int \cos^4 x\, dx$ h) $\int x^3 e^{7x-5}dx$ i) $\int x \cosh x^2\, dx$

j) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3 x}{1-\cos^2 x}\, dx$ k) $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ l) $\int \frac{\arctan u}{1+u^2}\, du$

m) $\int x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx$ n) $\int x \sqrt{1-x^2}\, dx$ o) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}^{\,3}}$

p) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ q) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ r) $\int \frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$

s) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\, dx$ t) $\int \sqrt{x^2-2x+5}\, dx$ u) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x+5}}$

12. Hausaufgabe

Berechnen Sie folgende Integrale:

1. $\int \frac{2+x}{x^2+4x}\, dx$
2. $\int \sin^3 x\, dx$
3. $\int \frac{dx}{\sinh^2(4-3x)}$
4. $\int x \cos x^2\, dx$
5. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{m-x^2}}$
6. $\int \sqrt{x^2-4x-12}\, dx$
7. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$
8. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$
9. $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}\, dx$
10. $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\, dx$
11. $\int \frac{6x^3+13x^2+101x-7}{(x^2+1)(x^2+4x+20)}\, dx$
12. $\int \frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)}\, dx$

Uneigentliche Integrale

11. a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x-2}$ b) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x-2}$ c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x-2}$

12. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 e^x\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 -(x-2)^{-1}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^\infty e^x\,dx$

13. a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

14. Gegeben: $|x\,e^{-x^2}| = y$
Gesucht: Nullstellen, Verhalten im Unendlichen, Skizze. Inhalt der zwischen Kurve und x-Achse liegenden Fläche.

15. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^a e^x \sin x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi} \cos x\, e^{\sin x}\,dx$

16. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ b) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$

17. a) $\displaystyle\int_{-2}^3 \frac{dx}{x^2-1}$ b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$ c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

18. a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\sin x}}$

19. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x\,(x-2)^2}$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$ c) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ $(b > a > 0)$

20. a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,x\,dx$ $(a<e<b)$

<u>Anwendungen der Integralrechnung</u>

21. Gesucht ist der Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und
   a) der Funktion $y = \sin x$ im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$;
   b) der Funktion $y(x^4 + 1) = x$.

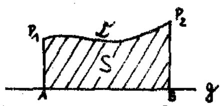
22. Es ist die von den Kurven a) $y = 3-2x-x^2$ und $y = x+3$
   b) $y = x^2+4x$ und $y = x+4$
   begrenzte Fläche zu berechnen.

23. Berechnen Sie die von der Ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ eingeschlossene Fläche.

24. Berechnen Sie die von der Lemniskate $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ begrenzte Fläche.

25. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, den ein Bogen der Zykloide $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ mit der x-Achse einschließt.

26. Gegeben sei ein Kurvenstück $\mathcal{L}$ durch eine Kurve $F(x,y) = 0$ und die 2 Endpunkte $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ sowie eine Gerade g.

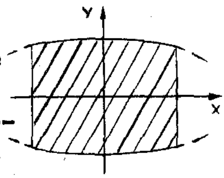


   Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Körpers, wenn das Flächenstück $S(AP_1P_2B)$ (s. Skizze) um g rotiert:
   a) $F(x,y) = y^2-8x$; $x_1 = 0$, $y_2 = 4$; g...x-Achse
   b) $F(x,y) = y^2-8x$; $y_1 = -4$, $y_2 = 4$; g...y-Achse
   c) $F(x,y) = y-\sqrt{(2+x)/(4x+x^2)}$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; g...x-Achse
   d) $F(x,y) = y^2-8x$; $y_1 = 0$, $y_2 = 4$; g...x = 2
   e) $F(x,y) = y - \ln x$; $x_1 = 1$, $y_2 = 1$; g...x-Achse
   f) $F(x,y) = 2x^2+ y^2- 25$; $y_1 = 1$, $y_2 = 2$; g...y-Achse
   g) $F(x,y) = xy - 1$; $(x \geq 1)$; g...x-Achse
   h) $F(x,y) = y - \coth x + 1$; $y_1 = 1$, $(x_2 = \infty)$; g...x-Achse

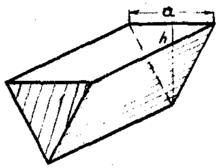
27. Berechnen Sie die Bogenlänge des Kurvenstücks $\mathcal{L}$:
   a) $y = \cosh x$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$
   b) $y = \ln \cos x$, $y_1 = 0$, $x_2 = \pi/6$
   c) $y = \ln x$, $x_1 = 3/4$, $x_2 = 12/5$
   d) $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, ein Bogen,(vorher Skizze!)
   e) $x = a \cos\varphi$, $y = a \sin\varphi$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$
   f) Spirale $r = a\, e^{k\varphi}$, $a,k > 0$, $r_1 = a$, $\varphi_2 = \pi/2$

28. Berechnen Sie die durch das Kurvenstück $\mathcal{L}$ bei Rotation um g erzeugte Mantelfläche(s. A.26!):
   a) $F(x,y) = x^2+ 2y^2- 1$, g...x-Achse
   b) $F(x,y) = 2y - x^2$, $x_1 = 0$, $y_2 = 1/2$, g...y-Achse
   c) $F(x,y) = xy - 1$, $(x \geq 1)$ g... x-Achse
   d) $F(x,y)$: s.Aufg. 11.2.20, $0 \leq t \leq \pi$ g... x-Achse.

29. Ein Faß werde durch ein zwischen 2 Grenzen um die x-Achse rotierendes Stück der Ellipse $3x^2 + 5y^2 = 120$ beschrieben. Die Länge des Fasses betrage 1m, die Durchmesser beider Bodenflächen je 60 cm. Man berechne Inhalt und Oberfläche des Fasses !



30. Es ist die Druckkraft des Wassers auf eine senkrechte dreieckförmige Wand zu berechnen. Die Oberfläche des Wassers reicht bis an die Grundlinie a des Dreiecks heran (s. Skizze), d.h. Wassertiefe = Höhe h des Dreiecks.



31. Ein zylindrisches Gefäß mit der Grundfläche $s = 420\ cm^2$ ist bis zur Höhe $H = 40$ cm mit Wasser gefüllt. Auf dem Boden des Gefäßes befindet sich eine Öffnung von $2\ cm^2$. Es ist die Zeit t zu berechnen, in der das Gefäß ausläuft.
(Hinweis: Auslaufgeschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Wasserspiegelhöhe x : $v = \mu\sqrt{2gx}$,
μ: Konstante, die abhängig von der Viskosität der Flüssigkeit und der Form des Gefäßes ist; Annahme: $\mu = 0{,}6$)

32. Der Effektivwert der elektrischen Stromstärke eines Wechselstromkreises ist durch die Gleichung

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$$

bestimmt, wobei T die Länge einer Periode ist. Es ist der Effektivwert der nach einer Sinusfunktion veränderlichen Stromstärke $i = I_m \sin\frac{2\pi}{T} t$ zu ermitteln.

33. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Fläche unter der Kurve $y = 2\sin 3x,\ y \geq 0,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$!

34. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment eines Kreises bzgl. einer Tangente (in Polarkoordinaten) !

35. Ermitteln Sie Oberfläche und eingeschlossenes Volumen der Pseudosphäre! (entsteht durch Rotation einer Traktrix:
$x = t - a \tanh t/a$, $a = a \cosh^{-1} t/a$
um die x-Achse)
Ermitteln Sie die Lage des Schwerpunktes (für $x \geq 0$).

13. Hausaufgabe

1. Berechnen Sie die Fläche zwischen den Parabeln $y + x^2 = 6x$ und $x^2 = y + 2x$.

2. a) Es ist der Inhalt der Fläche zu berechnen, die von der Astroide
$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t \quad (0 \le t \le 2\pi,\ a > 0)$$
begrenzt wird. Fertigen Sie eine Skizze an!

   b) Berechnen Sie die Bogenlänge dieser Kurve.

3. Gesucht ist die Bogenlänge von $y = x^2$ für $0 \le x \le 2$.

4. Berechnen Sie Volumen und Oberfläche des Körpers, der bei Rotation der Fläche zwischen $y = \sqrt{4x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$ um die x-Achse entsteht.

5. Es ist das Drehmoment (= statisches M) der Fläche zwischen der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ und der x-Achse bezüglich der x-Achse zu ermitteln ($y \ge 0$, Flächendichte $\varrho = \text{const}$).

6. Gesucht ist der Schwerpunkt der Fläche, die begrenzt wird von
$$ay = b\sqrt{a^2 - x^2},\ x = 0,\ y = 0,\ (a, b > 0,\ x, y \ge 0).$$

7. In einem gegebenen Wechselstromkreis ändere sich die Stromstärke i nach der Funktion $i = i(t) = i_0\, e^{-kt} \sin\omega t$.

   Bestimmen Sie die Elektrizitätsmenge $q = \int_0^{t_1} i\,dt$, die in der Zeit $0 \le t \le \pi/\omega$ durch den Stromkreis fließt.

8. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der bei Rotation der Fläche zwischen $y = 0$ und $y \cdot \sqrt{1 + x^2} = 1$ um die x-Achse entsteht.

9. Ermitteln Sie die Koordinaten des Schwerpunktes desjenigen Körpers, der bei Rotation der Fläche zwischen der x-Achse und $y = e^{-x}$ für $x \ge 0$ entsteht.

14. Reihen

Zahlenreihen

1. Stellen Sie fest, ob die folgenden Reihen konvergent sind!

1.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$, 1.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2n}$,

1.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$, 1.4 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$,

1.5 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}}$, 1.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

1.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$, 1.8 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$,

1.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{n}$, 1.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

1.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$, 1.12 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(\text{arc tan } n)^n}{2^n}$.

2. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls die Summen!

2.1 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$, 2.2 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$,

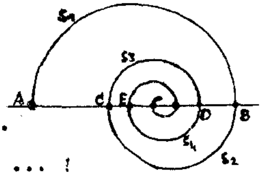
2.3 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$, 2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$,

2.5 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - + \dots$, 2.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$,

3. Entsprechend der Zeichnung lassen sich beliebig viele Halbkreise aneinander anfügen. Ihre Radien seien

a) $r_1 = 1,\ r_2 = \frac{2}{3},\ r_3 = (\frac{2}{3})^2, \dots ,$

b) $r_1 = 1,\ r_2 = \frac{1}{2},\ r_3 = \frac{1}{3}, \dots ,$



die zugehörigen Bogenlängen $s_1, s_2, s_3, \dots$

3.1 Ermitteln Sie die Summe $s = s_1 + s_2 + s_3 + \dots$!

3.2 Welcher Punkt der Strecke AB wird dabei eingeschlossen?

Potenzreihen

4. Berechnen Sie für die folgenden Reihen den Konvergenzradius!

4.1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k!\,x^k$, 4.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$,

4.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{(n+1)^n}$.

5. Für welche x sind die folgenden Reihen konvergent?

5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, 5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$,

5.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$, 5.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n x^n}$,

5.5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,(x-1)^n$.

6. Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche der folgenden Reihen, und geben Sie für diese Bereiche die Summen der Reihen an!

6.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, 6.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

7. wie 5.

7.1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n-1} \cdot n^3}{(n^2-1) \cdot 5^n} (x - \frac{1}{8})^n$ 7.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+ n)\ 2^{2n}\ x^n}{3^{3n}}$

7.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1}\ x^{2n}$ 7.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^{n-1}}$

7.5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}$ 7.6. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\ 2^{2k-1}}{(2k)!}\ x^{2k}$

7.7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

8. Ermitteln Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) x^n \quad !$$

Taylorreihen

Führen Sie für die Funktionen der Aufgaben 9 bis 19 eine Taylorentwicklung mit der Entwicklungsstelle x_0 aus:

a) mit Restglied,
b) als Reihe.

Untersuchen Sie ferner:

c) das Verhalten des Restgliedes R_n für $n \to \infty$,
d) das Konvergenzverhalten der Reihe.

9. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, 10. $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$,
11. $f(x) = xe^x$, $x_0 = 0$, 12. $f(x) = x^4 - x^2 + 2x$, $x_0 = 2$,
13. $f(x) = x^4 - x^2 + 2x$, $x_0 = 0$, 14. $f(x) = (x-1)e^x$, $x_0 = 0$,
15. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, 16. $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = 0$,
17. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$, 18. $f(x) = (1+x)^m$, $x_0 = 0$,
19. $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 0$.

20. Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabe 18

a) $\sqrt{1{,}004}$ (2 Summanden), b) $\sqrt{90}$ (2 Summanden),
c) $\sqrt[5]{40}$ (4 Summanden).

21. Berechnen Sie unter Benutzung von 9a)

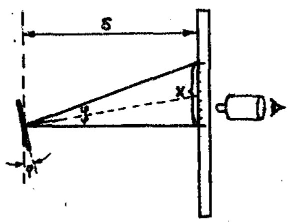
a) e auf 5 zuverlässige Dezimalen,
b) $\sqrt{e}$ " 3 " " ,
c) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ " 3 " " .

Untersuchen Sie vorher, wie groß n gewählt werden muß, um die geforderte Genauigkeit zu erreichen.

22. Wieviele Glieder der Reihe 19b) benötigt man, um die Zahl π auf 5 Dezimalen genau zu berechnen?

23. Entwickeln Sie $f(x) = x \sin x$ für $x_0 = 0$, und geben Sie den Fehler für den Fall an, daß $f(x)$ im Intervall $[-\pi/2;\pi/2]$ durch eine Parabel vierter Ordnung ersetzt wird. Vergleichen Sie Funktionswert und Näherungswert an der Stelle $x = \pi/2$.

24. Die waagerechte Skala eines Meßgerätes wird von einem Spiegel reflektiert, der auf einer senkrechten Achse in einer Entfernung s von der Skala drehbar befestigt ist. Das Spiegelbild der Skala betrachten wir durch ein Fernglas. In dem Augenblick, in dem der Spiegel parallel zur Skala ist, sehen wir im Fernglas den Nullpunkt der Skala. Der Drehung des Spiegels um den Winkel φ entspricht auf der Skala eine lineare Abweichung x. Für welche Winkel φ (in Grad) kann man $\varphi \approx kx$ setzen, wenn der relative Fehler 1% nicht übersteigen soll?



25. Stellen Sie $f(t) = \int_0^t e^{-x^2}dx$ durch eine Potenzreihe dar!

26. Ermitteln Sie unter Benutzung der geometrischen Reihe die Potenzreihen der folgenden Funktionen mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$, und geben Sie die Konvergenzbereiche an!

1. $f(x) = \arctan x$,
2. $f(x) = \ln(1+x)$.

27. Bestimmen Sie mit Hilfe des Potenzreihenansatzes

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$$

mit $y \not\equiv 0$.

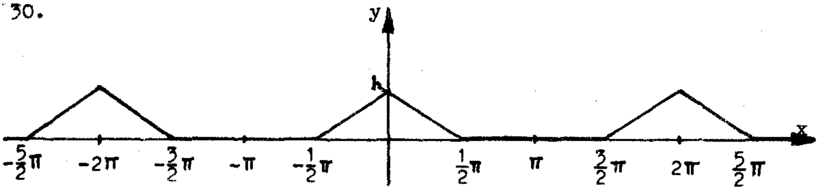
Fourierreihen

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Fourierreihen!

28. $f(x) = |x|$ im Intervall $(-\pi,\pi)$, Periodenlänge 2π .

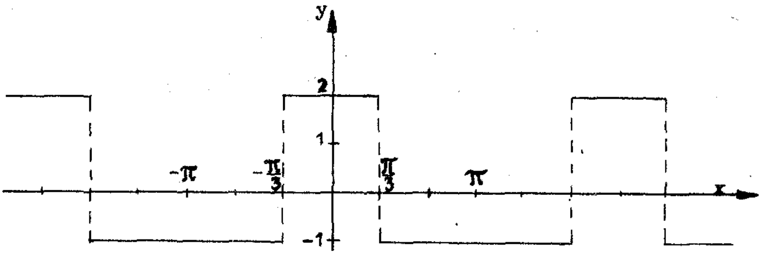
29. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases}$, Periodenlänge 21 .

30.



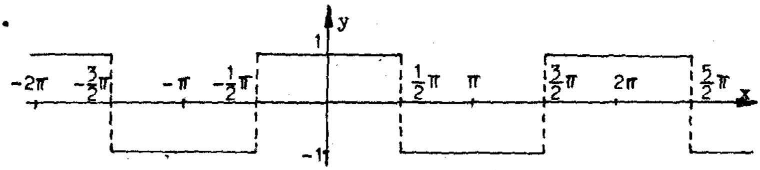
31. $f(x) = x^2$ für $-\pi \leq x \leq \pi$, Periodenlänge 2π .

32.

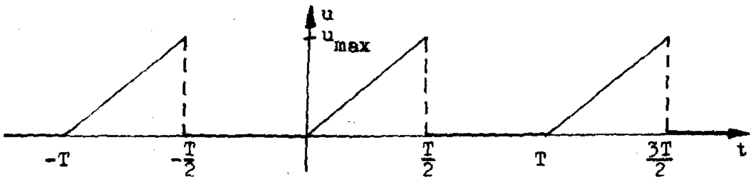


33. $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & \text{für } 0 < x < \pi, \\ -\frac{x+\pi}{2} & \text{für } -\pi < x < 0, \end{cases}$ Periodenlänge 2π .

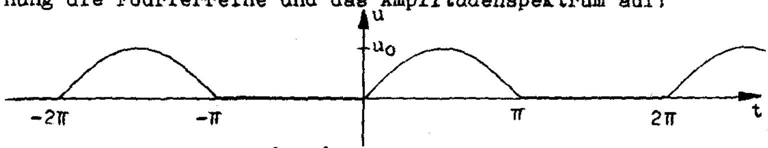
34.



35.



36. Stellen Sie für die durch Einweggleichrichtung gewonnene Spannung die Fourierreihe und das Amplitudenspektrum auf!



$u = \begin{cases} u_0 \sin t & \text{für } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$, Periodenlänge 2π .

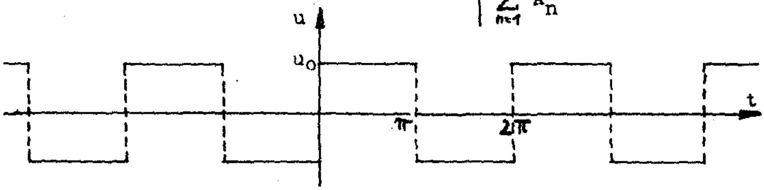
Hinweis: Amplitudenspektrum: $A_0 = \frac{|a_0|}{2}$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

37. In einer elektrischen Verstärkeranlage wird eine Sinusspannung verstärkt. Durch Verzerrung entsteht die in der Abbildung dargestellte Spannung.

37.1. Stellen Sie das Amplitudenspektrum auf!

37.2. Berechnen Sie den Klirrfaktor k:

$$k = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}} .$$



(k kennzeichnet bei Verstärkern die Übertragungsqualität.)

14. Hausaufgabe

1. a) Entwickeln Sie die Funktion $y = \cos x$ an der Stelle $x_0 = \pi$ nach Taylor!

b) Geben Sie die Funktion $F(x) = \int_0^x e^{-z^2}\,dz$ in Form einer Reihe an. (Setzen Sie dazu in die Taylor-Entwicklung von $f(x) = e^x$: $x = -z^2$ ein; integrieren Sie danach gliedweise.) Berechnen Sie $F(1/3)$ näherungsweise; $n=3$.

2. Stellen Sie fest, ob die folgenden Reihen konvergent sind!

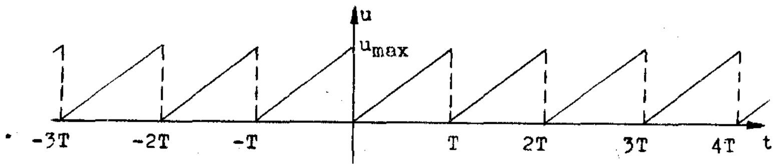
2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+n^3}$, 2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}\cdot 3^n$,

3. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der folgenden Reihen und geben Sie für diesen Bereich die Summen der Reihen an!

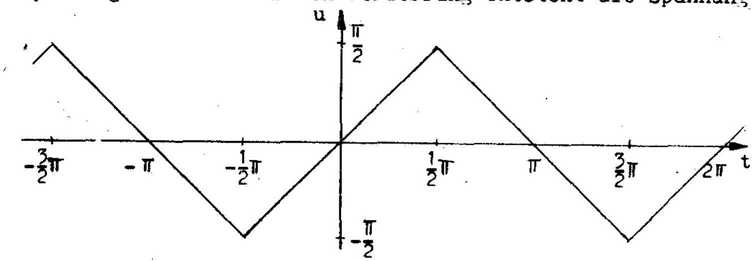
3.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$, 3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin^n x$.

4. Für welche x ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{1\pi}$ konvergent?

5. Beschreiben Sie die Abhängigkeit zwischen Spannung und Zeit durch eine Fourierreihe!



6. In einer Verstärkeranlage wird eine sinusförmige Wechselspannung verstärkt. Durch Verzerrung entsteht die Spannung:



Gesucht: 1. Amplitudenspektrum A_n

2. Klirrfaktor k .

15. Mehrfach- und Kurvenintegrale

Mehrfachintegrale

1. Fertigen Sie für die folgenden Doppelintegrale eine Skizze des Integrationsgebietes an und vertauschen Sie die Reihenfolge der Integrationen! Berechnen Sie die Integrale!

a) $$\int_0^a \int_0^x dy\, dx$$

b) $$\int_0^a \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx\, dy$$

c) $$\int_{-2}^0 \int_{y^2-4}^0 dx\, dy \quad .$$

2. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch folgende Flächen begrenzt wird: $z=x^2+y^2$, $x+y=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. Fertigen Sie vorher eine Skizze des Gebietes der x,y-Ebene an!

3. Geben Sie für $\iint_B f(x,y)\, db$ Doppelintegrale an, wenn B durch folgende Begrenzungskurven gegeben ist:
   a) Dreieck mit den Eckpunkten (0;0), (1;0), (1;1)
   b) Dreieck mit den Eckpunkten (0;0), (1;1), (0;1)
   c) $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$. Vergleichen Sie a), b) und c)!
   d) Kreis mit Radius $r=2$, Mittelpunkt (0,0).
   e) $y=x$, $y=x^2$.

4. Berechnen Sie das Integral $\iint_B db$, wobei B begrenzt wird von

   a) $y=x$, $xy=4$, $x=4$,
   b) $x+3y=0$, $y^2=4x$
   c) $y=\ln x$, $x-y=1$, $y=-1$.

5. Berechnen Sie das Volumen des von folgenden Flächen begrenzten Körpers: $x+y+z=1$; $x+y+z=2$; $x+y=4$; $x=0$; $y=0$.

6. Berechnen Sie durch Transformation auf Polarkoordinaten das Gebietsintegral

$$\iint\limits_B x(x^2 + y^2)\,db \quad \text{mit B:} \quad x^2 + y^2 \leqq 1,\ x \leqq 0,\ y \leqq 0.$$

Geben Sie außerdem das Integral in kartesischen Koordinaten an!

7. Berechen Sie das Integral I über das Gebiet B:

$$I = \iint\limits_B \sqrt{x^2 + y^2}\ db\ , \ B \text{ wird begrenzt von } x^2 + y^2 = 1.$$

8. Berechen Sie mittels Transformation das Volumen des Körpers, der von den Flächen
$x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = x + 2$ begrenzt wird!

9. Die Gerade $y = 1$ trennt von der Parabel $y = x^2$ ein Segment ab. Berechnen Sie
   a) die Schwerpunktkoordinaten,
   b) die axialen Trägheitsmomente bezüglich der x- und y-Achse,
   c) die polaren Trägheitsmomente bezogen auf den Koordinatenursprung und den Schwerpunkt des Segmentes.

10. Entwickeln Sie eine Formel für das Trägheitsmoment eines homogenen Kreiszylinders (Radius R, Höhe h), wenn
    a) die Rotationsachse
    b) eine Mantellinie
    Bezugsachse ist.

11. Ein sechskantiger Bleistift wird so gespitzt, daß beim Spitzen eine Kegelfläche mit dem halben Öffnungswinkel von $\frac{\pi}{18}$ entsteht. Eine Seite des sechseckigen Querschnittes des Bleistiftes sei 4 mm lang.
    Berechnen Sie die Oberfläche des die Spitze bildenden Kegels ($\sin\frac{\pi}{18} \approx 0{,}1736$).

12. a) Sei die Dichte eines Körpers (bis auf die Maßeinheit) gleich der x-Koordinate. Dann berechnet sich seine Masse m zu $m = \iiint_G x\,dz\,dy\,dx$, wobei G das Raumgebiet des Körpers ist. Berechnen Sie m für den Fall, daß G begrenzt wird von $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x+2y+z=2$!

b) Durch die Ebenen $x+y = 2$, $z = 5$ sowie die Koordinatenebenen wird ein Prisma begrenzt. Man berechne die Masse für die Dichteverteilung $\varrho(x,y,z) = x+y+z$.

c) Berechnen Sie die Masse des Körpers, der das Raumgebiet G: $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$, $x+y+z\leq 1$ ausfüllt und dessen Dichte (bis auf die Maßeinheit) gleich $1/(x+y+z+1)^3$ ist!

13. Gesucht ist das Volumen des Körpers, der begrenzt wird von folgenden Flächen:
    a) $z = 6-x^2-y^2$, $z^2= x^2+y^2$, $(z \geq 0)$
    b) $az = x^2+y^2$, $2az = a^2-x^2-y^2$, $a > 0$
    c) $az = x^2+y^2$, $z^2-x^2-y^2= 0$, $a > 0$
    d) $x^2+ (y- \frac{a}{2})^2= \frac{a^2}{4}$, $x^2+y^2+z^2= a^2$

14. Bestimmen Sie die Masse der Hohlkugel, die durch die Gleichungen $x^2+y^2+z^2= a^2$ und $x^2+y^2+z^2= 4a^2$ begrenzt wird, wenn die Dichte in jedem Punkt umgekehrt proportional dem Abstand des Punktes vom Koordinatenursprung ist.

15. Gesucht ist die Ladung der Achtelkugel (1. Oktant) $x^2+y^2+z^2= 4$ mit der Ladungsdichte $\varrho(x,y,z) = z$.

16. Der vom Zylinder $x^2+y^2= 1$ und den Ebenen $z = 0$, $z = 1$ begrenzte Körper hat die räumliche Dichte $\varrho(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z}$. Gesucht ist seine Masse!

17. Gesucht ist der Schwerpunkt des homogenen Körpers, der begrenzt wird von $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y+z = a$, $a > 0$.

18. Berechnen Sie das Volumen des von folgenden Flächen begrenzten Körpers: $x = 0$, $y = -1$, $z = -1$, $x+y+z = 1$.

Kurvenintegrale

19. Berechnen Sie $\oint_A^B \mathfrak{F}\, d\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x \end{pmatrix}$

und A(0; 0) ; D (2 ; 0) ; B (4 ; 2) :

1.Weg: Gerade AB

2.Weg: Streckenzug ADB

20. Berechnen Sie $\oint_0^A \mathfrak{F}\, d\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix}$

und A(2;2); B(2;0); O(0;0) :

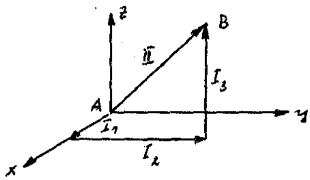
1.Weg: Gerade OA

2.Weg: Streckenzug OBA

3.Weg: Parabel $y = x^2/2$ von 0 nach A .

21. Berechnen Sie $\oint_A^B \mathfrak{F}\, d\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} x+y+z+1 \\ 3x+2y-z-2 \\ 5x-y+z+7 \end{pmatrix}$

und A(0;0;0); B(2;4;6)
längs der Wege I und II



22. Berechnen Sie $\oint_A^B \mathfrak{F}\, d\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

und A(0;0); B(4;2):

1. längs der Geraden AB;
2. längs der Ellipse : $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$;
3. beliebige Kurve;
4. begründen Sie die Wegunabhängigkeit des Integrals.

23. Berechnen Sie die Integrale, überprüfen Sie die Wegunabhängigkeit:

1. $\oint_A^B (2xy\,dx + 2x \sin 2y\, dy)$; $A(1; \frac{\pi}{6})$; $B(2; \frac{\pi}{4})$
2. $\oint_A^B (\cos 2y\, dx - 2x \sin 2y\, dy)$; $A(1; \frac{\pi}{6})$; $B(2; \frac{\pi}{4})$
3. $\oint_A^B \mathfrak{F}\, d\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$; A(0;1;2); B(2;3;6)

15. Hausaufgabe

1. Berechnen Sie $\iint\limits_B e^{x+y}\,db$; B: $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 1$.

2. Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die begrenzt wird durch $y = x^2$; $4y = x^2$; $x = -2$; $x = 2$.

3. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der begrenzt wird durch die Flächen mit: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 3y + 6z = 6$.

4. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der begrenzt wird durch die Flächen mit:
   $x = 0$, $z = 0$, $y = e^{-x}$, $x = 1$, $z = 3y^2$.

5. Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_B (x^2 + y^2)^2\,db$;
   B: Einheitskreisfläche.

6. Gesucht ist das Volumen des Körpers, der durch die Ebene $z = \frac{1}{2}$ von der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ abgeschnitten wird.

7. Berechnen Sie $\oint\limits_A^B \mathfrak{F}\,d\mathfrak{r}$ längs des Weges mit
   $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ und $z = t \cdot (2\pi - t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
   für:

7.1. $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ 7.2. $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$ 7.3. $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -z \end{pmatrix}$

8. Ein Kraftfeld sei durch $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ mit $P = x + y$; $Q = 2x$; und $R = 0$ bestimmt.
   Berechnen Sie die Arbeit, die notwendig ist, um eine Masseeinheit auf der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ von $P_1(a;0;0)$ im mathematisch positiven Drehsinn nach $P_2(a;0;0)$ zu verschieben.

9. Zeigen Sie, daß $\oint \begin{pmatrix} y \\ x+y \end{pmatrix} d\mathfrak{r}$ längs einer beliebigen geschlossenen Kurve gleich Null ist.
   Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie das Integral längs der Kurve berechnen, die das Gebiet, das durch $y = x^2$ und $y = 4$ begrenzt wird, umschließt.

16. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen 1. Ordnung

Lösen Sie die Differentialgleichungen:

1. a) $y' = -\frac{x}{y}$ b) $y' = y \tan x$ c) $y' = xy$

   d) $y' \cdot (1 + x) = 1 - y$ e) $y'^2 + y^2 = 1$

   f) $xyy' + y^2 = 1$ g) $x(1 + x) - y(1 + y)\,y' = 0$

2. a) $xy' + y \ln x = y \ln y$ b) $y' = \frac{x - y}{x}$ c) $y' = \frac{x^2 + 5y^2}{3xy}$

   d) $xyy' = x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2$

3. a) $y' - xy + 2x = 0$ b) $xy' + 2y = x^5 + x$

   c) $(x^2 + y)dx + xdy = 0$ d) $xy' - y = x^2 \cos x$

   e) $y'(1 - x) = (1 - y)$ mit $x_0 = 1;\ y_0 = -2$
   $x_1 = 0;\ y_1 = 0$

Lösen Sie als exakte Differentialgleichung (mit integrierendem Faktor):

4. a) $(x^2 + y)dx + xdy = 0$ b) $(6xy + x^2 + 3)dy + (3y^2 + 2xy + 2x)\,dx = 0$

   c) $(x \cos y + \sin x)\,dy + (\sin y + y \cos x)\,dx = 0$

   d) $(x^2 + y)\,dx - xdy = 0$ e) $y' = \frac{6x^2y - 4x}{6y - 2x^3}$

   f) $(y^3 - x^3)\,dy - x\,ydx = 0$

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Lösen Sie die Differentialgleichungen:

5.a) $y'' - y = 0$ b) $y'' + y = 0$ c) $y'' - 4y' + 4y = 0$

d) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ e) $\ddot{s} + 2\dot{s} + 2s = 0$

f) $y^{IV} - 16y = 0$

6.a) $y'' + y = x^2$ b) $y'' - y = \cos x$ c) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

d) $y'' - 3y' + 2y = \cos 2x$ e) $y''' - y'' + y' - y = \cos 2x$

7.a) $y'' + 4y = \cos 2x$ mit $x_0 = 0;\ y_0 = 0;\ y_0' = 0$

b) $y'' - y = e^{-x}$ c) $y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = (x+1)e^x$

d) $y''' + 4y'' + 3y' = x^2$

16. HA.: Lösen Sie die Differentialgleichungen:

1.a) $y'\sqrt{a^2 + x^2} = y$ b) $(\sin y \cos x)\, y' - \cos y \sin x = 0$

c) $y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0$ d) $xy' + y = x \sin x$

e) $(x^2 + 1)\, dy + x(y - x^2 - 1)\, dx = 0$

f) $(2 \arctan x + 1 + 2xy)\, dx + x^2 dy = 0$

2.a) $y'' - 5y' + 6y = 4 \sin 2x$

b) $y'' + 4y = \sin 2x + e^{-2x} \cos x$

c) $y^{IV} + 2y''' - 3y'' = e^x + e^{3x} + 2$

Wiederholungsaufgaben

Diese Aufgaben sollen eine Hilfe für die Vorbereitung auf die Semesterklausur darstellen. Hiermit werden zusätzlich Übungsaufgaben zur Verfügung gestellt. Diese Aufgaben sind keinesfalls als Einschränkung des Vorbereitungsgebietes zu betrachten. Beschäftigung mit den Beispielen der Übungen und den Hausaufgaben ist unerläßlich.

1. Bestimmen Sie x so, daß gilt: $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ 1 & -2 & x \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & -0{,}2 \end{vmatrix} - 0{,}055$

2. Berechnen Sie den Winkel zwischen der Ebene $E: 4x+y-2z-3=0$ und der x-Achse!
3. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P_1(4;-3;-2)$ von der Ebene $E: 3x-4y+12z-13=0$!
4. Ermitteln Sie das Schnittgebilde der Ebenen $E_1: 2x-y+2z-3=0$, $E_2: -4x+2y-4z+6=0$, $E_3: 3x-y+z-1=0$, $E_4: 7x-3y+5z=7$!
5. Gegeben sind die Geraden $g_1: \mathfrak{r}=(7;-2;7)^T+\lambda(-2;1;-2)^T$ und $g_2: \mathfrak{r}=(4;7;-5)^T+\mu(3;1;0)^T$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g_1 und g_2 sowie die allgemeine Form der Gleichung der Ebene, die g_1 und g_2 enthält !
6. Gegeben sind die Punkte $A(2;-14;-3)$ und $B(4;5;1)$ und der Vektor $\vec{v}=(2;-6;3)^T$. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch B, die orthogonal zu $\overrightarrow{AB}$ und $\vec{v}$ ist!
7. Bestimmen Sie den Fußpunkt des Lotes von $A(2;-14;-3)$ auf $E: 2x-3y+6z=-70$!
8. Bestimmen Sie X aus der Gleichung $AX+B=2(X-C)$ für $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$!
9. Bestimmen Sie A^{-1} zu $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$!
10. Lösen Sie $AX=B$ für $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$!
11. Für welchen Wert von λ hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x+3y-z&=2 \\ 3x+\lambda y+4z&=5 \\ 7x+4y+2z&=8 \end{aligned}$$

keine Lösung?

12. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem für alle reellen λ:

$$\begin{aligned} \lambda x+y+z&=1 \\ \lambda x+\lambda y+z&=2 \\ \lambda x+\lambda y+\lambda^2 z&=2 \end{aligned}$$!

13. Gesucht ist $\mathfrak{x}$ aus der Gleichung $A\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ für:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ -10 & 5 & -5 & 4 & 7 \\ -14 & 7 & -7 & 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

14. Geben Sie die Produktdarstellung des Polynoms
$P(x) = x^7 - 2x^6 - 81x^3 + 162x^2$ an.

15. Zeichnen Sie das Bild der Funktion: $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x}{x^2 - 2x + 1}$.

16. Bestimmen Sie die rationale Funktion, deren Zählergrad 3 und deren Nennergrad 2 ist und die folgende Eigenschaften besitzt:
a) bei $x=2$ befindet sich eine 2-fache Nullstelle,
b) bei $x=1$ liegt eine Polstelle 2. Ordnung,
c) $y=x+1$ ist Asymptote.

17. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen:
a) $y = 2 - \sqrt{3-x}$ b) $y = -\ln|2-x|$.

18. Lösen Sie die Gleichungen:
a) $\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1} - \dfrac{10}{\sqrt{x+2}} = 0$ b) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$
c) $\sin(2x+\pi) - 2\cos x = 0$.

19. Berechnen Sie: $\cos(45^\circ + \beta) + \cos(45^\circ - \beta) = ?$

20. Gesucht sind Größe und Richtung einer Kraft F, die den beiden Kräften $F_1 = 27{,}93$ N, $F_2 = 35{,}88$ N, die miteinander einen Winkel $\beta = 58{,}15^\circ$ bilden, das Gleichgewicht hält.

21. Beim freien Fall mit Luftwiderstand gilt näherungsweise:
$$s = s(t) = \frac{m}{k}\ln\cosh\left(\sqrt{g\frac{k}{m}}\,t\right), \quad v = v(t) = \sqrt{g\frac{m}{k}}\tanh\left(\sqrt{g\frac{k}{m}}\,t\right).$$
Stellen Sie v explizit als $v = v(s)$ dar.

22. Es sollen 2 Produkte A und B aus den Grundmaterialien m_1 und m_2 hergestellt werden, deren Kennzahlen bekannt sind. Außerdem sind die Einsatzzahlen für die Arbeitskräfte und die Kennzahl der für das Produkt A benötigten Spezialmaschine bekannt.

Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die Aufwandzahlen je Einheit des Produktes. Dabei stehen für einen best. Zeitraum folgende Kapazitäten zur Verfügung, die nicht überschritten werden dürfen:

Material m_1: 10000t, m_2: 10000t; Arbeitsk.: 300; Sp.masch.: 3

Produkt	Material m_1 (t)	Material m_2 (t)	AK	Spezmasch.
A	2	10	0,2	0,005
B	16	5	0,4	-

Ges.: a) math. Modell für ein Produktionsprogramm, dessen Optimalitätskriterium die Zahl der hergestellten Produkte beiden geg. Kapazitätsbeschränkungen ist;
b) graphische Lösung.

23. Skizzieren Sie die Lösungsmengen der Ungleichungen:

1. $|x| < |y|$ 2. $2x^2 + y^2 > 1$ 3. $|x| + 5|y| < 5$

4. $|x-y|^2 - |x+y|^2 \leq 1$

24. a) Für welche Punkte der GAUSS'schen Zahlenebene gilt: $|z-1| > |z-i|$?

b) Vereinfachen Sie: $\dfrac{(2+i)^3 + 5i^5 - 2}{(1-i)^6 - (1+i)^6}$; $\left(\dfrac{2}{1 - i\sqrt{3}}\right)^{12}$; $\left(\dfrac{1 + 2i}{2+\frac{1}{1-i}}\right)^2$.

c) Lösen Sie: 1. $x^2 - 2ix - 5 = 0$ 2. $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$

3. $\dfrac{x^3}{10} + 0{,}8i - 0{,}6 = \dfrac{5\cos\pi + (\cos 225^\circ + i\sin\frac{5}{4}\pi)^2}{3 + i}$

25. Berechnen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren sowie die Transformationsmatrix C für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

26. Bringen Sie die folgenden C_2/F_2 auf Normalform:

a) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$ b) $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y - 3z + 18 = 0$

Fertigen Sie eine Skizze an!

27. a) Was für eine Kurve wird durch die Gleichung $8x^2 - 6xy - 2y = 0$ dargestellt?

b) Was für eine F_2 wird durch $x^2+4y^2+z^2-4xy+4xz+6yz+4x+6y-2z+1=0$ beschrieben?

c) Bestimmen Sie den Typ der F_2: $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz+10y+1=0$ und rechnen Sie die Gleichung in die Normalform um!

28. Beweisen Sie: $3^n > n^3$ für $n \geq 4$!

29. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

30. Untersuchen Sie auf Monotonie und Beschränktheit: $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2^{n+1} - n^2}{2^n}\right\}$

31. Berechnen Sie die Ableitung: a) $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$

b) $z = 3\sin^2 x \cdot e^{3x} + \sin 2x \cdot e^{3x}$ c) $y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}$

d) $v(t) = 3b^2 \arctan\sqrt{\dfrac{t}{b-t}} - (3b+2t)\cdot\sqrt{bt - t^2}$

e) $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-1}{x+1}$ f) $y = x^{(x^x)}$

g) $y = a(\sin t - t\cos t)$ h) $x^y = y^x$

$x = a(\cos t + t\sin t)$

32. Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(x+1)} - \dfrac{1}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^{2x} - \sin x\cos x}{\ln(1+x) - 1/2\cdot\sin 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{-x}(\ln x + e^x))$ d) $\lim\limits_{x\to +0} x^3 \ln x$

33. Führen Sie zu folgenden Funktionen eine vollständige Kurvendiskussion durch: a) $y = x^4/e^x$ b) $y = e^x/x^4$ c) $y = x^2 \ln x$

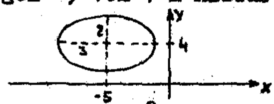
34. Berechnen Sie das Biegemoment M an der Stelle $x = l/2$, wenn die Gleichung der Biegelinie eines Trägers

$$v = \frac{g}{\varkappa^4 EI}\left(\tan\frac{\varkappa l}{2}\sin\varkappa x + \cos\varkappa x - 1 - \frac{1}{2}\varkappa^2 x + \frac{\varkappa^2}{2} x^2\right)$$

lautet und die Beziehung $M = -EIv''$ gilt!

35. Wie weit taucht eine Eiskugel ($\gamma = 0{,}9\ \mathrm{gcm}^{-3}$) von 1 m Radius in Wasser ein?

36. a) Geben sie für die Ellipse eine Parameterdarstellung an:



b) Die Bewegung eines Punktes wird durch $x = 6\sin^2 t$, $y = 3\sin 2t$ beschrieben. Für welches t schließt die Tangente der Bahnkurve mit der x-Achse den Winkel 135° ein?

37. Die Bewegung eines Massenpunktes werde durch die Gleichungen $x = a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$ mit $\omega = 0{,}01\pi\,\mathrm{s}^{-1}$ beschrieben.

a) Geben Sie die Gleichung der Bahnkurve an!
b) Welche Koordinaten besitzt der Punkt zur Zeit $t_0 = 200/3$ s?
c) Wie groß ist der Anstiegswinkel der Bahn zur Zeit t_0?

38. Ermitteln Sie die 2. partiellen Ableitung von $f(x,y)$ an der Stelle (x_0,y_0):

a) $f(x,y) = \ln(x^2\sin x) + \ln(x^2\sin y)$, $x_0 = \pi/2$, $y_0 = -\pi$
b) $f(x,y) = (2y)^x + \arctan y$, $x_0 = 1$, $y_0 = e/2$

39. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 5x - 6y + 3$. Berechnen Sie

a) die relativen Extrema;
b) angenähert die Änderung des Funktionswertes beim Übergang vom Punkt $P_0(2;2)$ zum Punkt $P_1(2{,}1;\ 1{,}9)$.

40. Bestimmen Sie die relativen Extrema von $z = \frac{2}{xy} - \frac{1}{y^2} + 2x$

a) ohne Nebenbedingung,
b) unter der Nebenbedingung $h(x,y) = xy - 4 = 0$.

41. a) Die Höhe eines geraden Kreiskegels betrage 5 m, der Radius 2 m ± 3 cm. Wie groß ist der relative Fehler des Volumens?

b) Bei einem geraden Kreiszylinder werde der Radius mit einem Fehler von 3 % gemessen. Frage: s. a)

c) Bei einem Kegel ($r = 1$m, $h = 2$m) werden Radius und Höhe mit gleicher Genauigkeit gemessen. Daraus wird das Volumen ermittelt. Mit welcher absoluten Genauigkeit (in cm) muß man messen, damit der Fehler des Volumens höchstens 0,25 % beträgt?

d) Bei einem Hohlspiegel werden die Bildweite b und die Gegenstandsweite g gemessen: $b = 4$ cm, $g = 3$ cm.
Berechnen Sie den prozentualen Fehler der Brennweite, wenn die beiden Messungen mit je einem Fehler von 0,1 mm vorgenommen werden.

e) Bei einem Dreieck werden die Höhen h_a, h_b und der Winkel γ gemessen. Man berechne den relativen Fehler des Flächeninhalts. ($h_a = 10$cm, $h_b = 10$cm, $\gamma = 60^\circ$, $\Delta h = 1$mm, $\Delta\gamma = 1^\circ$)

42. Für die Abhängigkeit des Wider_standes eines metallischen Leiters von der Temperatur gilt innerhalb eines gewissen Temperaturintervalls die Gleichung:

$R_T = R_0 + R_0 \beta T$, mit R_T...Widerstand bei Temperatur T
R_0... " " 0°
β ...Temperaturkoeffizient.

Zur Ermittlung von R_0 und β wurden bei acht verschiedenen Temperaturen die Widerstände R_T gemessen. Man erhielt die Wertepaare:

(20°C ; 1,66), (30°C ; 1,71),
(40°C ; 1,76), (50°C ; 1,81),
(60°C ; 1,86), (70°C ; 1,93),
(80°C ; 2,oo), (90°C ; 2,o5).

Berechnen Sie die Konstanten R_0 und β.
(Hinweis: Setzen Sie $R_T = aT + b$ mit $a = R_0\beta$ und $b = R_0$).

43. Berechnen Sie die Integrale $\int f(x)\,dx$ mit $f(x) = \ldots$

a) $\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$ b) $x^2\sqrt{2x^3-3}$ c) $x^{10}\ln x$

d) $(\ln x)^2$ e) $\frac{6x-1}{3x^2-x+2}$ f) $\frac{e^{2x}-3e^x}{e^{2x}-6e^x+5}$

g) $\frac{1}{2x^2+9x-5}$ h) $\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}$ i) $\frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1}$

k) $\frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)}$ l) $\frac{1}{\sqrt[3]{4-5x}}$ m) $\frac{1}{\sqrt{4-2x-x^2}}$

n) $\sqrt{3-2x-x^2}$ o) $\frac{1}{\sin x\cos x}$ p) $\tan^2 x$

q) $\frac{1}{2+\cos x}$ r) $\frac{2+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$ s) $\frac{1}{a^x+1}$

44. a) $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ c) $\int_1^\infty \left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

d) $\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\cos x}$ e) $\int_0^\infty x\sin x\,dx$

45. Ein Ball rollt über eine Ebene mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 25 cm/s. Auf Grund der Reibung erfolgt eine Bremsung um 6 cm/s². Wie weit rollt der Ball?

46. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter der Kurve $y = x^2 + 2x + \frac{1}{x}$ zwischen $x = 1$ und $x = e$!

47. Die Kurve $F(x,y) = 0$ rotiere im angegebenen Intervall um die jeweilige Gerade.

a) Berechnen Sie das entstehende Volumen:

1) $F(x,y) = y + x^2 - 4$	$[-2;2]$	um die x-Achse
2) $F(x,y) = y - \frac{1}{\cos x}$	$(-\pi/2;\pi/2)$	um die x-Achse
3) $F(x,y) = x^2 + y^2 - a^2$	$[-a;a]$	um $x = b$ $(> a)$
4) $F(x,y) = y - x\,e^{-x}$	$[0;\infty)$	um die x-Achse .

b) Berechnen Sie die Mantelfläche:

1) $F(x,y) = y - \frac{x^3}{3}$	$[-2;2]$	um die x-Achse
2) $F(x,y) = \frac{y}{a} - \cosh\frac{x}{a}$	$[-a;a]$	um die x-Achse
3) $F(x,y) = y(x-1) - 1$	$[0;2]$	um die x-Achse .

48. Berechnen Sie die Bogenlänge von

a) $y = x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 5$, b) $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$, $0 \leq x \leq a$,

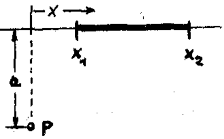
c) $x = t^2$, $y = t^3$, $0 \leq t \leq 4$.

49. Es ist das Trägheitsmoment des über der x-Achse liegenden Bogens der Astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ im Intervall $0 \leq x \leq a$ bezüglich der x-Achse unter der Voraussetzung zu berechnen, daß die lineare Dichte konstant ist.

50. Es ist das Drehmoment des Bogens der Zykloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $0 < t < 2\pi$ in Bezug auf die x-Achse zu ermitteln, wenn angenommen wird, daß die lineare Dichte λ konstant ist.

51. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes der Fläche zwischen $y = 0$ und $y = e^{-x}$ $(x \geq 0)$.

52. Für die Kraft, die von einem geradlinigen stromdurchflossenen Leiter der Länge s auf einen in der Entfernung a befindlichen Punkt P ausgeübt wird, gilt (in geeigneten Maßeinheiten):



$$F = aI\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

(I-Stromst.)

Berechnen Sie F für einen unendlich langen Leiter!

53. Untersuchen Sie auf Konvergenz: a) $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ b) $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

c) $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(en)^n}{(n!)^2\, 2^n}$ d) $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ e) $\sum\limits_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^5+2}}{n(n-1)}$ f) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$

54. Für welche x konvergiert:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$

e) $1-2x + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{2}{5!}x^5 + \frac{2}{7!}x^7 - + \ldots$ (Summe?)

f) $(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \frac{(x+1)^4}{4 \cdot 4^3} + \ldots$

g) $2x+1 + \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(2x+1)^3}{7} + \ldots$

55. a) Entwickeln Sie die Funktion $y = (x-1)e^x$ mit Hilfe der TAYLOR-Formel an der Stelle $x_0 = 0$.

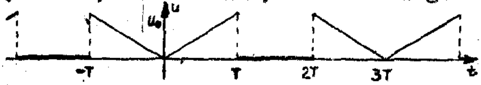
b) Entwickeln Sie $f(x) = x/e^x$ um den Ursprung und geben Sie das Restglied an.

c) Entwickeln Sie $f(x) = (x^2 + 5x - 7) \cdot \ln(x+3)$ (mit $x > -3$) nach Potenzen von $x + 2$ bis zum Glied mit $n = 4$, und geben Sie das zugehörige Restglied an.

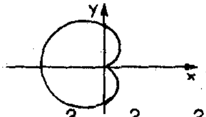
d) Ein schwerer, unausdehnbarer, vollkommen biegsamer Draht stellt sich im Gleichgewicht auf eine Kettenlinie ein; Gleichung: $y = \cosh x$ (bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems). Praktisch ersetzt man sie in der Nähe des Scheitels durch eine Parabel 2. Grades.
Für welche Abszissen ist der dadurch bewirkte Fehler unter 1%?

56. Entwickeln Sie in der Fourierreihe:

a) $y = e^{at}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, Periodenlänge $= 2\pi$;

b) 

57. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Kardioide: $r = r(\varphi) = a(1-\cos\varphi)$:



58. Berechnen Sie die Masse des Körpers, der durch $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geq 0)$ und $z = H$ begrenzt wird, wenn die Dichte in jedem Punkt gleich dem z-Wert dieses Punktes ist.

59. Berechnen Sie das Kurvenintegral längs des (einmal im mathematisch positiven Sinn durchlaufenen) Einheitskreises für das Vektorfeld:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} .$$

60. Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel bezüglich eines Durchmessers.

Lösungen der Wiederholungsaufgaben

1.) $x_1 = -2$, $x_2 = +3$ 2.) $\approx 61^0$ 3.) 1 4.) Gerade $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.) $S(-5;4;-5)$, E: $2x-6y-5z+9=0$ 6.) $\mathfrak{x} = (4;5;1)^T + t(81;2;-50)^T$

7.) $F(-2;-8;-15)$

8.) $X = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 15 \\ -1 & 1 & -5 \\ 10 & 11 & 22 \end{pmatrix}$ 9.) $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -11 & -9 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 10.) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

11.) $\lambda = -2$ 12.) $\lambda = 0, \lambda = 1$: unlösbar, $\lambda = -1$: $\mathfrak{x} = -\frac{1}{2}(3;1;0)^T + t(1;0;1)^T$

sonst : $\mathfrak{x} = \left(\frac{\lambda - 2}{\lambda(\lambda - 1)} ; \frac{1}{\lambda - 1} ; 0 \right)^T$

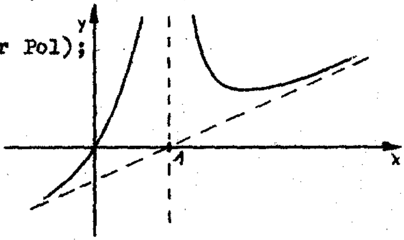
13.) $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

14.) $P(x) = x^2(x-2)(x-3)(x+3)(x^2+9)$

15.) Nst. $x = 0$, Pol: $x = 1$ (gerader Pol);

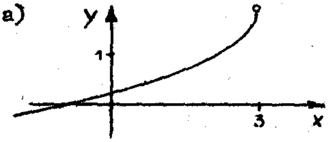
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$;

Asymptote: $y_a = x - 1$

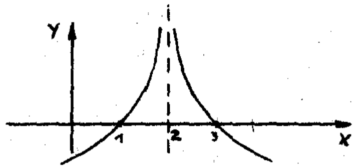


16.) $y = \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^2 - 2x + 1}$

17.) a)



b)



18.) a) $x_1 = 2$, $(x_2 = -31/3)$ b) $x = 16$ c) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$,

19.) $\sqrt{2}\cos\beta$ 20.) $F = 55{,}30$ N, $\sphericalangle(F, F_2) = 154{,}89°$

21.) $v = \sqrt{g \frac{m}{k}} \cdot \sqrt{1 - e^{-\frac{2ks}{m}}}$

22.) a) x_1...Einheit von A $2x_1 + 16x_2 \leq 10\,000$ b) A...600 E

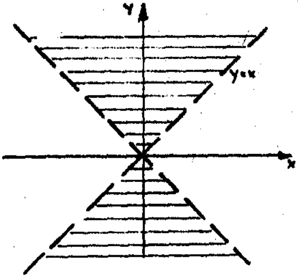
x_2...Einheit von B $10x_1 + 5x_2 \leq 10\,000$ B...450 E

$0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 \leq 300$

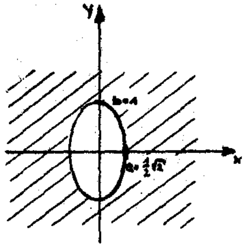
$0{,}005\, x_1 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

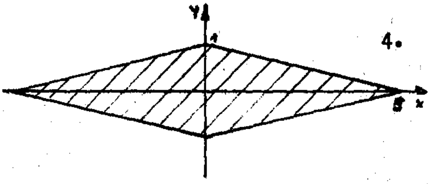
23.1.



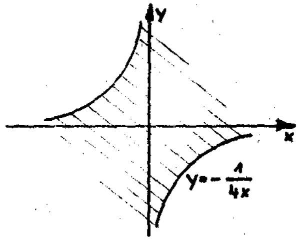
2.



3.



4.



24. a) $x < y$ b) 1 ; 1; c) 1. $i \pm 2$ 2. $x_1 = -1$,

$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$, $x_4 = 3$, $x_{5,6} = -\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2} i\sqrt{3}$; 3. $x_1 = -2$

$x_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$

25. $\lambda = 1 \,/\, -2 \,/\, 4$, $C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

26.a) $\frac{(x-2)^2}{3^2} - \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1$ b) $3(z-3) = (x-1)^2 + 2(y+2)^2$

Hyperbel, $M(2,-1)$ ellipt. Paraboloid, $S(3,1,-2)$

27.a) Hyperbel: $9\bar{\bar{x}}^2 - \bar{\bar{y}}^2 + 8/9 = 0$

b) zweischaliges Hyperboloid

c) elliptisches Paraboloid: $5\bar{\bar{x}}^2 + 2\bar{\bar{y}}^2 - 5\sqrt{2}\,\bar{\bar{z}} = 0$

28. vollst. Induktion ,

$\left[(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 < n^3 + n^3 + n^3 = 3n^3 \overset{V.}{<} 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}\right]$

29.a) 1/3

30. $b_n = n^2/2^n$ ist mon. fallend $\longrightarrow 0 \Longrightarrow a_n$ mon. wachsend $\longrightarrow 2$

31. a) $-\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}} - 1}$ b) $e^{3x}(6\sin 2x + 9\sin^2 x + 2\cos 2x)$

c) $x^{-1/3}\cdot(1 + 3\sqrt{x} + 3\sqrt{x}^{\,2} + \sqrt{x}^{\,3}) = \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}$

d) $4t\sqrt{\frac{t}{b-t}}$ e) $\frac{x^2}{x^4+x^2-2}$ f) $x^{(x^x)} \cdot x^x\left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right)$

g) $\tan t$ h) $\frac{y}{x} \cdot \frac{x\ln y - y}{y\ln x - x}$

32. a) $1/2$; b) -4 ; c) 1 ; d) 0

33. a) Db $(-\infty, \infty)$, Nst.: $x = 0$, Max $(4;256e^{-4})$, Min $(0;0)$, $Wp_1(2;16e^{-2})$, $Wp_2(6;1296e^{-6})$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

b) Db $(-\infty, \infty)\setminus\{0\}$, Nst.: keine, Min$(4;0{,}213)$, Wp: keine
$\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

c) Db $(0,\infty)$, Nst. : $x = 1$, Min $\left(\frac{1}{\sqrt{e}} ; -\frac{1}{2e}\right)$, Wp$(e^{-3/2};-3/2\,e^{-3})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

34. $M = \frac{\bar{g}}{\varkappa^2}\left(\frac{1}{\cos \varkappa\frac{l}{2}} - 1\right)$ 35. $h \approx 1{,}608$ m
$(h^3 - 3h^2 + 3{,}6 = 0)$

36. a) $x = -5 + 3\cos t$, $y = 4 + 2\sin t$ b) $t_0 = \frac{\pi}{2}\left(k + \frac{3}{k}\right)$, $k \in \Gamma$

37. a) $x^2 + y^2 = a^2$ (Kreis) b) $P\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$ c) $\alpha = 30^0$

38. a) $f_{xx} = -\frac{16}{\pi^2} - 1$, $f_{xy} = 0$, f_{yy} nicht def.

b) $f_{xx} = e$, $f_{xy} = 4$, $f_{yy} = -\frac{16e}{(4+e^2)^2}$

39. a) Min $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{7}{2}\right)$ b) $\frac{1}{2}$

40. a) $P(1;1)$ kein Extr.   b) Max $(16; \frac{1}{4}; 16{,}5)$

41. a) 3% b) 6% c) 0,1 cm d) 0,297% e) 3,007 %

42. $a \approx 0{,}00564$, $b \approx 1{,}54$, $R_0 = b \approx 1{,}54\,\Omega$ $\beta \approx 0{,}00366\ \frac{1}{^0C}$

43. a) $\sqrt{2x-3}$ b) $1/9\,(\sqrt{2x^3-3}\;)^3$ c) $\frac{1}{11}(\ln x - \frac{1}{11})\,x^{11}$

d) $x\,[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2]$ e) $\ln(3x^2 - x + 2)$

f) $1/2\,\ln|e^{2x} - 6e^x + 5|$ g) $\frac{1}{11}\ln\left|\frac{2x-1}{x+5}\right|$

h) $\frac{-3}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln|x-1| + 2\ln|x+1|$

i) $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x^2-1| + 1/2\ln(x^2+1) + \arctan x$

k) $\frac{1}{x-1} + 1/2\ln|x-1| - 1/4\ln(x^2+2x+5) + 1/2\arctan\frac{x+1}{2}$

l) $-\frac{3}{10}(4-5x)^{2/3}$ m) $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{5}}$ o) $\ln|\tan x|$

n) $2\arcsin\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}$ p) $-x + \tan x$

q) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)$ r) $\frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$

s) $x - \frac{1}{\ln a}\ln(a^x+1)$

44. a) 6 b) div. c) $^{19}/_3$ d) $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ e) div

45. $\frac{625}{12}$ cm

46. $\frac{e^3}{3} + e^2 - \frac{1}{3}$

47. a) $\frac{512}{15}\pi$; ∞ ; $2\pi^2 a^2 b$; $\pi/4$

b) $\frac{34\sqrt{17}-2}{9}\pi$; $a^2\pi(2+\sinh 2)$; ∞

48. $\frac{335}{27}$; $a/2\,(e - 1/e)$; $\frac{8}{27}(37\sqrt{37}-1)$

49. $\frac{2}{8}a^3$

50. $\frac{32}{5}\lambda a^2$

51. S(1;1/4)

52. 2 I/a

53. kon.; kon.; kon.; kon.; div.; div.

54. a) $[-1;1]$ b) $[-1;1)$ d) $(-1;1)$

c) $(-e;e)$ e) $1-2\sin x$ f) $[-3;3)$

g) $[-1;0)$

55. a) $f(x) = -1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-1)\,x^k}{k!}$

b) $f(x) = x - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} -+ \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{(n-1)!} +$

$$+ (-1)^{n+1}\, e^{-\vartheta x}\,(\vartheta x - n - 1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

c) $f(x) = -13\,(x+2) + \frac{15}{2}(x+2)^2 - \frac{23}{6}(x+2)^3 + \frac{37}{12}(x+2)^4$

$$+ \frac{2\vartheta^2(x+2)^2 + 7\vartheta(x+2) - 151}{60\left[1 + \vartheta(x+2)\right]^5}(x+2)^5$$

d) $x \leqq 0{,}688$

56. a) $y = \frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2a} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^2+n^2}\sin nt + a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2}\cos nt\right]$

$$= \frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nt - n\sin nt}{a^2+n^2}\right]$$

b) $u(t) = \frac{u_0}{3} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} u_0\left[\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{3} - \frac{3}{2\pi n^2}\left(1 - \cos\frac{2n\pi}{3}\right)\right]\cos\frac{2n\pi t}{3T}$

57. $\frac{3}{2}\pi a^2$

58. $\frac{H^4}{4}\pi$

59. 2π

60. $\frac{8}{15}\pi\rho R^5$

8027/1005/82-01100