Aufgabe 25.10

Lösen Sie die folgende Aufgabe mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. a) Bestimmen Sie (ohne `MATLAB`) die reelle Lösung von

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (vgl. Aufgabe 22.28) für $\omega \neq \pm 1$ in Abhängigkeit von ω.

   b) Zeichnen Sie die x-Komponente der Lösung für $\omega = 2, \frac{3}{2}, \frac{6}{5}$ über dem Intervall $[0, 10\pi]$. In Aufgabe 22.28 wird für $\omega = 1$ als Lösung des Differenzialgleichungssystems

$$\vec{x}(t) = C \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

   ermittelt. Ermitteln Sie auch hierzu die Lösung der Anfangswertaufgabe und zeichnen Sie deren x-Komponente ein.

   c) Wie lautet die Periodenlänge der unter (a) bestimmten Lösung für rationale ω (in Abhängigkeit von ω)?

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus.

Lösung:

1. a) Die allgemeine Lösung des homogenen Systems wir in Aufgabe 22.28 ermittelt. Sie lautet

$$\vec{x}(t) = C\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix} + D\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}.$$

Für die Inhomogenität kann der Ansatz nach Art der rechten Seite gemacht werden

$$\vec{x}_s(t) = \begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}\sin\omega t + \begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}\cos\omega t$$

(mit noch zu bestimmenden A_1, A_2, B_1, B_2). Setzt man diesen Ansatz in das inhomogene System ein, erhält man

$$\begin{aligned}\omega\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}\cos\omega t - \omega\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}\sin\omega t = \vec{x}_s'(t) &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\vec{x}_s(t) + \begin{pmatrix}\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\omega A_1\cos\omega t - \omega B_1\sin\omega t\\ \omega A_2\cos\omega t - \omega B_2\sin\omega t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der Koeffizienten folgt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}A_2 &= -\omega B_1 + 1\\ B_2 &= \omega A_1\\ -A_1 &= -\omega B_2\\ B_2 &= \omega A_2\end{aligned}$$

dessen Lösung

$$A_1 = 0,\quad A_2 = \frac{1}{1-\omega^2},\quad B_1 = \frac{-\omega}{1-\omega^2},\quad B_2 = 0$$

lautet. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist damit

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{1-\omega^2}\begin{pmatrix}-\omega\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} + C\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix} + D\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}.$$

Um die gegebene Anfangsbedingung zu erfüllen, muss

$$\vec{x}(0) = \frac{1}{1-\omega^2}\begin{pmatrix}-\omega\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}C\\ D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

gelten, d.h.

$$\begin{pmatrix}C\\ D\end{pmatrix} = \frac{1}{1-\omega^2}\begin{pmatrix}\omega\\ 0\end{pmatrix}.$$

b) nachbereitete `diary`-Datei (Kommentare durch `%` gekennzeichnet) und Plot auf der übernächsten Seite

c) Es muss die Periodenlänge der homogenen Lösung ($= 2\pi$) mit der Periodenlänge der speziellen Lösung ($= \frac{2\pi}{\omega}$) abgestimmt werden, um die Periodenlänge der Lösung zu erhalten. Es muss also

$$k_1 2\pi = k_2 \frac{2\pi}{\omega}$$

für ganze Zahlen k_1 und k_2 gelten. Die rationale Periodenlänge ω lässt sich als $\omega = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{ggT}(p,q) = 1$ schreiben. Dann ist die obige Bedingung zu

$$k_1 = k_2 \frac{1}{\omega} = k_2 \frac{q}{p}$$

äquivalent. Aus $\operatorname{ggT}(p,q) = 1$ folgt $k_2 = p$ und $k_1 = q$ und damit beträgt die Periodenlänge der Lösung

$$q \cdot 2\pi \quad \text{bzw.} \quad p \cdot \frac{2\pi}{\omega}.$$

```
% ----------------------------------------------------------------------
% Aufgabe 1
% ----------------------------------------------------------------------

omega=[2, 3/2, 6/5];

linestyles={'b-','m-','c-'};

% Startbedingung
x0 = [0 ; 0];

% Figure einrichten
figure(1); clf; hold on;
t = linspace(0,5*2*pi,1000);

for i=1:length(omega),

    % Frequenz der Anregung
    w = omega(i);

    % Parameter C(1), C(2) bestimmen, damit die Anfangsbed. erfüllt ist
    C = x0 - 1/(1-w^2) * [-w ; 0];

    % Lösung für w berechnen
    x = 1/(1-w^2) * [-w * cos(w*t) ; sin(w*t)] + C(1) * [cos(t) ; -sin(t)]
      + C(2) * [sin(t) ; cos(t)];

    % x-Komponente der Lösung plotten
    plot(t,x(1,:),linestyles{i},'LineWidth',2);
end

% Parameter C(1), C(2) bestimmen, damit die Anfangsbedingung erfüllt ist
C = x0;
% Lösung berechnen
x = C(1) * [cos(t) ; -sin(t)] + C(2) * [sin(t) ; cos(t)]
  + 1/2 * [t .* sin(t) ; t.*cos(t) - sin(t)];
% x-Komponente der Lösung plotten
plot(t,x(1,:),'r-','LineWidth',3);

% Titel und Label setzen
legend('omega = 2','omega = 3/2','omega = 6/5','omega = 1','Location', '
NorthWest');
xlabel('t'); ylabel('x');
set(gca,'XTick',0:2*pi:6*2*pi);
title('x-Komponente der Lösungen des Differenzialgleichungssystems');
print -depsc HA05_matlab_plot_1.eps

diary off
```