Aufgabe 25.8

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Zeichnen Sie die in Aufgabe 15.9 gegebene Kurve $\vec{x}(t)$ in $t = [-2, 2]$ zusammen mit der in Aufgabe 15.9a) gefragten Tangente in einen gemeinsamen Plot. Beschriften Sie die Achsen und erstellen Sie eine Legende.

   Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `plot3`.

2. Auf Computern kann man bestimmte Integrale bequem durch Riemann-Summen approximieren.

   a) Implementieren Sie eine Funktion, welche die Riemann-Summe

   $$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

   mit $x_i = a + (b-a)\,\frac{i-1}{n-1}$ berechnet. Erstellen Sie dazu ein extra `m-File` und arbeiten Sie mit `function-handles`. Ihrer Funktion werden die folgenden Parameter übergeben:

   - die Funktion f, für die das bestimmte Integral berechnet werden soll (in Form eines `function-handles`),
   - die untere Integrationsgrenze a,
   - die obere Integrationsgrenze b,
   - die Anzahl der x_i, d.h. n.

   Zurückgegeben werden soll die obige Riemann-Summe.

   b) Benutzen Sie Ihre Funktion, um das bestimmte Integral aus der obigen Aufgabe 2a) für $n = 2$, $n = 32$ und $n = 512$ anzunähern und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.

   c) Plotten Sie nun den Fehler in Abhängigkeit von n ($n \in [2^1, 2^{10}]$) in einen normalen und in einen doppelt-logarithmischen Plot (Plot, bei dem beide Achsen logartihmisch geteilt sind). Was können Sie beobachten?

   Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `loglog` zum zeichnen eines doppelt-logarithmischen Plots.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus.

Hinweise zur MATLABaufgabe

inline function-handles

`Inline function-handles` erlauben es, für kleine („einzeilige“) Funktionen ein `function-handle` direkt zu erzeugen, ohne extra ein `m-File` anlegen zu müssen. Zum Beispiel kann man mit

```
≫ f = @(x)x^2+1
```

ein `function-handle` für die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ erzeugen und mit

```
≫ f(4)
```

an einer bestimmten Stelle (hier 4) auswerten. Solche Funktionen lassen sich auch „vektorisieren“. Beispielsweise erlaubt

```
≫ f = @(x)x.^2+1
```

die gleichzeitige Auswertung an mehreren Stellen, z.B.

```
≫ f([3 4 5])
```

Lösung:
nachbereitete `diary`-Datei (Kommentare durch % gekennzeichnet) und Plots auf dieser und der nächsten Seite

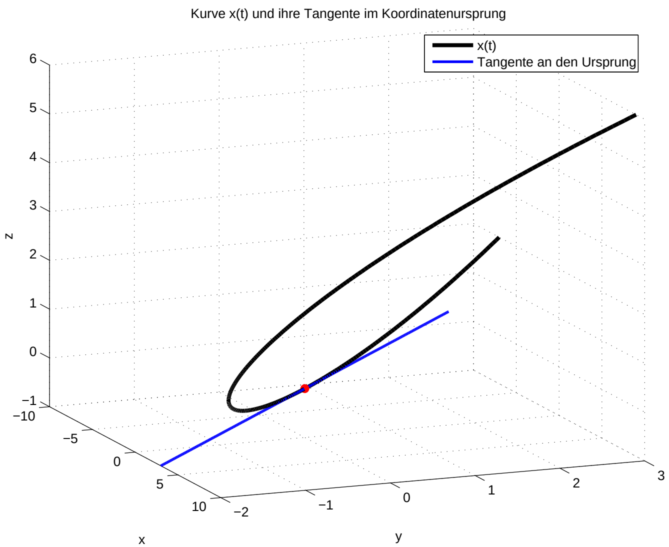
```
% ----------------------------------------------------------------------
% Aufgabe 1
% ----------------------------------------------------------------------

t1=linspace(-2,2,300);
% Funktion x(t) auswerten
x=[ t1.^3 + 1 ; t1.^2 - 1 ; t1.^2 + t1 ];

t2=linspace(-2,0,300);
% Tangente T(t) auswerten
T=[ 3*(t2+1) ; -2*(t2+1) ; -1*(t2+1)];

figure(1); clf; hold on;
% Funktion zeichnen
plot3(x(1,:), x(2,:), x(3,:), 'LineStyle','-','Color','k','LineWidth',3);
% Tangente zeichnen
plot3(T(1,:), T(2,:), T(3,:), 'LineStyle','-','Color','b','LineWidth',2);
% Ursprung markieren
plot3(0, 0, 0, 'Marker','.','Color','r','MarkerSize',20);
% Betrachterstandpunkt
view(68,16);

% Label, Title, Legend
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z'); grid on;
title('Kurve x(t) und ihre Tangente im Koordinatenursprung');
legend('x(t)', 'Tangente an den Ursprung', 'Location', 'NorthEast');
print -depsc HA03_matlab_plot_1.eps
```




```
% ----------------------------------------------------------------------
% Aufgabe 2
% ----------------------------------------------------------------------

% a) -------------------------------------------------------------------

% Listing des m-Files HA03_matlab_solution_RiemannSumme.m
type HA03_matlab_solution_RiemannSumme.m

function I=RiemannSumme(f, a, b, n)

% Berechne x_i
x = linspace(a,b,n);
% Alternative:
% x = a + (b-a) * (0:n-1)/(n-1);

% Werte f an allen x_i aus
fx = f(x);

% Summiere diese Werte (bis auf den letzten)
I = sum(fx(1:end-1));

% Die x_i sind gleichmäßig verteilt, daher gilt
% (x_i+1 - x_i) = (b-a)/(n-1)  für alle i.
I = I*(b-a)/(n-1);

% Ende des Listings des m-Files HA03_matlab_solution_RiemannSumme.m


% b) -------------------------------------------------------------------

% Inline Funktion definieren
f = @(x)1./(x.^2+16);

% Exakter Wert des Integrals
I_exakt = pi/16

I_exakt =
    0.1963

% Integral approximieren
n = 2;
I = HA03_matlab_solution_RiemannSumme(f,0,4,n);
fprintf('n=%3d,   Riemann-Summe=%6.4f,   Fehler=%8.2E\n',n,I,abs(I_exakt-
I));
n=  2,   Riemann-Summe=0.2500,   Fehler=5.37E-002

n = 32;
I = HA03_matlab_solution_RiemannSumme(f,0,4,n);
fprintf('n=%3d,   Riemann-Summe=%6.4f,   Fehler=%8.2E\n',n,I,abs(I_exakt-
I));
n= 32,   Riemann-Summe=0.1984,   Fehler=2.01E-003

n = 512;
I = HA03_matlab_solution_RiemannSumme(f,0,4,n);
fprintf('n=%3d,   Riemann-Summe=%6.4f,   Fehler=%8.2E\n',n,I,abs(I_exakt-
I));
n=512,   Riemann-Summe=0.1965,   Fehler=1.22E-004
```

```
n = 2^20;
I = HA03_matlab_solution_RiemannSumme(f,0,4,n);
fprintf('\nn=%7d, Riemann-Summe=%11.9f, pi/16=%11.9f, Fehler=%8.2E\n',n,I,
I_exakt,abs(I_exakt-I));

n=1048576, Riemann-Summe=0.196349600, pi/16=0.196349541, Fehler=5.96E-008


% c) ------------------------------------------------------------------

Anz=10;
n = 2.^(1:Anz);

for i=1:Anz,
  Fehler(i)=abs(I_exakt - HA03_matlab_solution_RiemannSumme(f,0,4,n(i)));
end

% Normaler Plot
figure(2); clf; hold on;
plot(n, Fehler, 'b-*');
% Label, Title, Legend
xlabel('n'); ylabel('Fehler');
title('Integrationsfehler in Abhängigkeit von n');
legend('Integrationsfehler', 'Location', 'NorthEast');
print -depsc HA03_matlab_plot_2c1.eps

% LogLog Plot
figure(3); clf;
loglog(n, Fehler,'b-*'); hold on;
% Label, Title, Legend
xlabel('n'); ylabel('Fehler');
title('Integrationsfehler in Abhängigkeit von n');
legend('Integrationsfehler', 'Location', 'NorthEast');
print -depsc HA03_matlab_plot_2c2.eps

% Hier sieht man eine Gerade mit Steigung -1.
%
% (Der Fehler verhält sich ca. wie 0.062/n, deshalb verhält sich
%  der dekadische Logarithmus des Fehlers ca. wie  -1.2 - lg n.)

diary off
```