Aufgabe 24.9

In einer Stadt gibt es 100 Bäcker B_i $(i = 1, \dots, 100)$. Jeder von ihnen verkauft in seinem Laden x_i Brötchen, von denen er $10/12$ selbst herstellt, während er je $1/12$ von seinen Nachbarkollegen B_{i-1} und B_{i+1} bezieht. Dabei habe der Bäcker B_1 die Nachbarn B_{100} und B_2 sowie der Bäcker B_{100} die Nachbarn B_{99} und B_1.

Die Bäcker B_1 bis B_{50} stellen je 1000 Brötchen, die Bäcker B_{51} bis B_{100} stellen je 2000 Brötchen her. Es wird angenommen, dass alle hergestellten Brötchen auf die beschriebene Weise auch verkauft werden.

a) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Bestimmung der x_i auf!
b) Geben Sie für dieses Gleichungssystem die Iterationsvorschrift des Jacobischen Gesamtschrittverfahrens an!
c) Begründen Sie die Konvergenz dieses Verfahrens!
d) Um eine Startnäherung für die Jacobiiteration zu erhalten, wird angenommen, dass jeder Bäcker seine Produktion vollständig im eigenen Laden verkauft. Führen Sie von dieser Startnäherung ausgehend einen Jacobiiterationsschritt aus!
e) Berechnen Sie für x_{50} und x_{51} auch das Ergebnis des zweiten Jacobiiterationsschritts!

Lösung:

a) Der Bäcker B_i produziert $10/12$ des eigenen Verkaufs (x_i) und je $1/12$ des Verkaufs der Nachbarn $(x_{i-1},\, x_{i+1})$, also $\dfrac{10}{12}x_i + \dfrac{1}{12}x_{i-1} + \dfrac{1}{12}x_{i+1}$. Nach Multiplikation mit 12 erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
10x_1 \quad + x_{100} + x_2 &= 12\,000 \\
10x_i \quad + x_{i-1} + x_{i+1} &= \begin{cases} 12\,000, & 2 \le i \le 50 \\ 24\,000, & 51 \le i \le 99 \end{cases} \\
10x_{100} + x_{99} \quad + x_1 &= 24\,000
\end{aligned}$$

b) $$x_1^{(k+1)} = \frac{12\,000 - x_{100}^{(k)} - x_2^{(k)}}{10}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{12\,000 - x_{i-1}^{(k)} - x_{i+1}^{(k)}}{10}, \qquad 2 \le i \le 50$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{24\,000 - x_{i-1}^{(k)} - x_{i+1}^{(k)}}{10}, \qquad 51 \le i \le 99$$

$$x_{100}^{(k+1)} = \frac{24\,000 - x_{99}^{(k)} - x_1^{(k)}}{10}$$

c) Jede Zeile der Systemmatrix des Gleichungssystems hat das Diagonalelement 10, sondt nur 2 Elemente 1, alle anderen 0. Es gilt $|10| > |1| + |1|$, also sind alle Zeilen strikt diagonaldominant, so daa das Jacobische Gesamtschrittverfahren konvergiert.

d) Startnäherung $x_i^{(0)} = \begin{cases} 1000, & 1 \le i \le \ \ 50 \\ 2000, & 51 \le i \le 100 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{12\,000-2000-1000}{10} = 900 \\
x_i^{(1)} &= \frac{12\,000-1000-1000}{10} = 1000, \qquad 2 \le i \le 49 \\
x_{50}^{(1)} &= \frac{12\,000-1000-2000}{10} = 900 \\
x_{51}^{(1)} &= \frac{24\,000-1000-2000}{10} = 2100 \\
x_i^{(1)} &= \frac{24\,000-2000-2000}{10} = 1000, \qquad 52 \le i \le 99 \\
x_{100}^{(1)} &= \frac{24\,000-2000-1000}{10} = 2100
\end{aligned}
$$

e) $$
\begin{aligned}
x_{50}^{(2)} &= \frac{12\,000-1000-2100}{10} = 890 \\
x_{51}^{(2)} &= \frac{24\,000-900-2000}{10} = 2110
\end{aligned}
$$

Die Weiterrechnung führt auf

k	$x_{46}^{(k)}=x_1^{(k)}$	$x_{47}^{(k)}=x_2^{(k)}$	$x_{48}^{(k)}=x_3^{(k)}$	$x_{49}^{(k)}=x_2^{(k)}$	$x_{50}^{(k)}=x_1^{(k)}$	$x_{51}^{(k)}=x_{100}^{(k)}$	$x_{52}^{(k)}=x_{99}^{(k)}$	$x_{53}^{(k)}=x_{98}^{(k)}$	$x_{54}^{(k)}=x_{97}^{(k)}$	$x_{55}^{(k)}=x_{96}^{(k)}$
0	1000	1000	1000	1000	1000	2000	2000	2000	2000	2000
1	1000	1000	1000	1000	900	2100	2000	2000	2000	2000
2	1000	1000	1000	1010	890	2110	1990	2000	2000	2000
3	1000	1000	999	1011	888	2112	1989	2001	2000	2000
4	1000	1000,1	998,9	1011,3	887,7	2112,3	1988,7	2001,1	1999,9	2000
5	999,99	1000,11	998,86	1011,34	887,64	2112,36	1988,66	2001,14	1999,89	2000,01
6	999,99	1000,12	998,86	1011,35	887,63	2112,37	1988,65	2001,14	1999,88	2000,01
7	999,99	1000,12	998,85	1011,35	887,63	2112,37	1988,65	2001,15	1999,88	2000,01
8	999,99	1000,12	998,85	1011,35	887,63	2112,37	1988,65	2001,15	1999,88	2000,01