Aufgabe 24.8

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
100x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_8+ & x_9 = & 96\\
x_1+ & 100x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_8+ & x_9 = & 97\\
x_1+ & x_2+ & 100x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_8+ & x_9 = & 98\\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & 100x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_8+ & x_9 = & 99\\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & 100x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_8+ & x_9 = & 100\\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & 100x_6+ & x_7+ & x_8+ & x_9 = & 101\\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & 100x_7+ & x_8+ & x_9 = & 102\\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & 100x_8+ & x_9 = & 103\\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_8+ & 100x_9 = & 104
\end{array}$$

soll mit dem Jacobischen Gesamtschrittverfahren iterativ nach der Vorschrift

$$\vec{x}^{(n+1)} = \frac{1}{100}\left(\begin{pmatrix}96\\97\\98\\99\\100\\101\\102\\103\\104\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&0&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&0&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&0\end{pmatrix}\vec{x}^{(n)}\right)$$

gelöst werden.

a) Begründen Sie die Konvergenz dieses Verfahrens!
b) Wählen Sie einen geeigneten Startvektor und führen Sie mit diesem einen Schritt des Iterationsverfahrens aus!

Lösung:

a) $\boldsymbol{A}\vec{x} = (\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{R})\vec{x} = \vec{b}$ ($\boldsymbol{L}$ linke untere, $\boldsymbol{R}$ rechte obere Dreiecks-, $\boldsymbol{D}$ Diagonalmatrix)

$\boldsymbol{D}\vec{x} = \vec{b} - (\boldsymbol{L}+\boldsymbol{R})\vec{x}, \qquad \vec{x} = \boldsymbol{D}^{-1}(\vec{b} - (\boldsymbol{L}+\boldsymbol{R})\vec{x})$

Das Gesamtschrittverfahren $\vec{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{D}^{-1}(\vec{b} - (\boldsymbol{L}+\boldsymbol{R})\vec{x}^{(n)})$ konvergiert für strikt diagonaldominante Matrizen $\boldsymbol{A}$.

Für alle Zeilen der Matrix des Gleichungssystems gilt $100 = |a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| = 8$, somit ist das starke Zeilensummenkriterium erfüllt und die Matrix strikt diagonaldominant. Folglich konvergiert das Gesamtschrittverfahren.

b) Ein geeigneter Startvektor ist z.B. wegen $100x_i \approx 100,\ i=1\ldots,9$ der Vektor $\vec{x}^{(0)} = (1\ \ 1\ \cdots\ 1)^{\mathsf{T}}$.

$$\begin{pmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\\x_3^{(1)}\\\cdots\\x_9^{(1)}\end{pmatrix} = \frac{1}{100}\left(\begin{pmatrix}96\\97\\98\\\cdots\\104\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\8\\8\\\cdots\\8\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{100}\begin{pmatrix}88\\89\\90\\\cdots\\96\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}88\\0{,}89\\0{,}90\\\cdots\\0{,}96\end{pmatrix}$$

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$	$x_4^{(n)}$	$x_5^{(n)}$	$x_6^{(n)}$	$x_7^{(n)}$	$x_8^{(n)}$	$x_9^{(n)}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0,88	0,89	0,9	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96
2	0,886	0,8961	0,9062	0,9163	0,9264	0,9365	0,9466	0,9567	0,9668
3	0,885484	0,895585	0,905686	0,915787	0,925888	0,935989	0,94609	0,956191	0,966292
4	0,88552492	0,89562593	0,90572694	0,91582795	0,92592896	0,93602997	0,94613098	0,95623199	0,96633300
5	0,88552164	0,89562265	0,90572366	0,91582467	0,92592568	0,93602669	0,94612770	0,95622871	0,96632972
6	0,88552190	0,89562292	0,90572393	0,91582494	0,92592595	0,93602696	0,94612797	0,95622898	0,96632999
7	0,88552188	0,89562289	0,90572390	0,91582491	0,92592592	0,93602693	0,94612794	0,95622895	0,96632996
8	0,88552189	0,89562290	0,90572391	0,91582492	0,92592593	0,93602694	0,94612795	0,95622896	0,96632997
9	0,88552189	0,89562290	0,90572391	0,91582492	0,92592593	0,93602694	0,94612795	0,95622896	0,96632997
exakt	$\frac{263}{297}$	$\frac{266}{297}$	$\frac{269}{297}$	$\frac{272}{297}$	$\frac{275}{297}$	$\frac{278}{297}$	$\frac{281}{297}$	$\frac{284}{297}$	$\frac{287}{297}$