Aufgabe 24.5

Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$.

a) Stellen Sie die Iterationsvorschriften des Gesamt- und des Einzelschrittverfahrens auf!
b) Prüfen Sie die Konvergenz der Verfahren!
c) Führen Sie je fünf Iterationsschritte mit dem Startvektor $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch und vergleichen Sie mit der exakten Lösung des Gleichungssystems!

Lösung:

Iterative Verfahren (werden insbesondere für große schwach besetzte Gleichungssysteme (d.h. viele Koeffizienten 0) verwendet)

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1, \ldots, n$$

Auflösen jeder Zeile nach Diagonalelement: $x_i = \dfrac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j \right)$

Dabei wird der Vektor $\vec{x}$ aus sich selbst berechnet, so dass dies als Grundlage einer Iterationsvorschrift verwendet werden kann (vgl. z.B. Aufgabe 24.1):

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)}$$ **Gesamtschritt-** oder **Jacobiverfahren**

Beim Einzelschrittverfahren werden schon berechnete Komponenten noch im gleichen Schritt mit verwendet:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)}$$ **Einzelschritt-** oder **Gauß-Seidel-Verfahren**

a) $$\left.\begin{aligned} 7x_1 - 4x_2 &= 6 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 0{,}6 \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{7}(4x_2 + 6) \\ x_2 &= \frac{1}{5}(2x_1 + 0{,}6) \end{aligned}\right.$$

Gesamtschrittverf.: $$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{7}(4x_2^{(k)} + 6) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{5}(2x_1^{(k)} + 0{,}6) \end{aligned}$$

Einzelschrittverf.: $$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{7}(4x_2^{(k)} + 6) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{5}(2x_1^{(k+1)} + 0{,}6) \end{aligned}$$

b) Beide Verfahren konvergieren, wenn die Matrix strikt diagonaldominant ist, d.h.

das starke Zeilensummenkriterium $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ für $i = 1, \ldots, n$ bzw.

das starke Spaltensummenkriterium $|a_{jj}| > \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$ für $j = 1, \ldots, n$ erfüllt ist.

Für $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ ist dies erfüllt, z.B. Zeilen: $\begin{matrix} |7| > |-4| \\ |5| < |-2| \end{matrix}$.

Also sind beide Verfahren konvergent.

c) exakte Lösung:

$$\begin{aligned} 7x_1 - 4x_2 &= 6 \qquad & 35x_1 - 20x_2 &= 30 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 0{,}6 \qquad & -8x_1 + 20x_2 &= \ \ 2{,}4 \\ & & 27x_1 \qquad\quad &= 32{,}4,\ \underline{\underline{x_1 = 1{,}2}},\ \underline{\underline{x_2}} = \frac{1}{5}(2x_1 + 0{,}6) \underline{\underline{= 0{,}6}} \end{aligned}$$

	Gesamtschrittverfahren		Einzelschrittverfahren	
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	1	1	1	1
1	1,428571429	0,52	1,428571429	0,691428571
2	1,154285714	0,691428571	1,252244898	0,620897959
3	1,252244898	0,581714286	1,211941691	0,604776676
4	1,189551020	0,620897959	1,202729529	0,601091812
5	**1,211941691**	**0,595820408**	**1,200623892**	**0,600249557**
6	1,197611662	0,604776676	1,200142604	0,600057042
7	1,202729529	0,599044665	1,200032595	0,600013038
8	1,199454094	0,601091812	1,200007450	0,600002980
9	1,200623892	0,599781638	1,200001703	0,600000681
10	1,199875222	0,600249557	1,200000389	0,600000156
11	1,200142604	0,599950089	1,200000089	0,600000036
12	1,199971479	0,600057042	1,200000020	0,600000008
13	1,200032595	0,599988592	1,200000005	0,600000002
14	1,199993481	0,600013038	1,200000001	0,600000000
15	1,200007450	0,599997392	1,200000000	0,600000000
16	1,199998510	0,600002980	1,200000000	0,600000000
17	1,200001703	0,599999404	1,200000000	0,600000000
18	1,199999659	0,600000681	1,200000000	0,600000000
19	1,200000389	0,599999864	1,200000000	0,600000000
20	1,199999922	0,600000156	1,200000000	0,600000000
21	1,200000089	0,599999969	1,200000000	0,600000000
22	1,199999982	0,600000036	1,200000000	0,600000000
23	1,200000020	0,599999993	1,200000000	0,600000000
24	1,199999996	0,600000008	1,200000000	0,600000000
25	1,200000005	0,599999998	1,200000000	0,600000000
26	1,199999999	0,600000002	1,200000000	0,600000000
27	1,200000001	0,600000000	1,200000000	0,600000000
28	1,200000000	0,600000000	1,200000000	0,600000000