Aufgabe 24.4

Lösen Sie die Gleichung $x^3-3x^2+2x+3=0$, die in Aufgabe 12.67 mit dem Newtonverfahren gelöst wurde, mit der Intervallhalbierungsmethode für das Intervall $[-1,1]$!

Lösung:

Zunächst soll die Anzahl der Nullstellen des kubischen Polynoms $f(x)=x^3-3x^2+2x+3$ bestimmt werden. Da $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ gilt und $f(x)$ überall stetig ist, gibt es mindestens eine Nullstelle. Lokale Extrema können nur für $f'(x)=3x^2-6x+2=2=0$, also für $x=1\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ vorliegen. Wegen $f''(x)=6x-6\begin{cases}<0, & x=1-\sqrt{\frac{1}{3}}\\ >0, & x=1+\sqrt{\frac{1}{3}}\end{cases}$ liegt an der Stelle $1-\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein lokales Maximum und bei $1+\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein lokales Minimum vor. Der Funktionswert in diesem Minimum ist $f(1+\sqrt{\frac{1}{3}})\approx 2.615>0$, deshalb hat das kubische Polynom nur eine Nullstelle.

Intervallhalbierungsmethode (Bisektion) zur Lösung von $f(x)=0$ ($f(x)$ stetig):

Startintervall $[x_0,y_0]$ so wählen, dass $f(x_0)$ und $f(y_0)$ unterschiedliches Vorzeichen haben.

$m=\dfrac{x_n+y_n}{2}$, falls $f(m_n)=0$ Lösung gefunden, sonst
falls x_n, m_n gleiches Vorzeichen $x_{n+1}=m_n$, $y_{n+1}=y_n$,
falls m_n, y_n gleiches Vorzeichen $x_{n+1}=x_n$, $y_{n+1}=m_n$,

usw., Lösung wird immer weiter eingeschlossen. Verfahren konvergiert immer, aber langsam.

$f(-1)=-3$, $f(1)=3$, also $[-1,1]$ als Startintervall geeignet.

n	x_n	y_n	m_n	$f(m_n)$
0	-1	1	0	3
1	-1	0	-0.5	1.125
2	-1	-0.5	-0.75	-0.609375
3	-0.75	-0.5	-0.625	0.3339844
4	-0.75	-0.625	-0.6875	-0.1179199
5	-0.6875	-0.625	-0.65625	0.1128845
6	-0.6875	-0.65625	-0.671875	-0.0012932
7	-0.671875	-0.65625	-0.6640625	0.0561004

Die Lösung liegt zwischen -0.671875 und -0.6640625. Das Intervallhalbierungsverfahren konvergiert langsam gegen die in Aufgabe 12.67 mit dem Newtonverfahren ermittelte Lösung $x^*\approx -0.67169988$.