Aufgabe 24.2

Die Gleichung $f(x)=x-\sin x-0.25=0$ soll numerisch gelöst werden.

a) Zeigen Sie, dass die bei der Picarditeration verwendete Funktion $F(x)=x-f(x)$ über dem Intervall $[1.1,1.3]$ eine Selbstabbildung ist, die der Kontraktionsbedingung genügt!
b) Lösen Sie die Gleichung durch Picarditeration ausgehend vom Startwert $x_0=1.2$!
c) Lösen Sie die Gleichung mit dem Newtonverfahren ausgehend vom Startwert $x_0=1.2$!

Lösung:

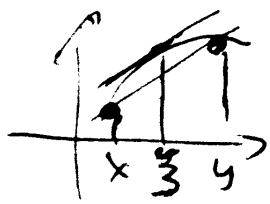
a) $F(x)=x-f(x)=x-(x-\sin x-0.25)=\sin x+0.25$

$F(x)$ ist monoton wachsend für $-1.57\approx-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\approx 1.57.$

$F(1.1)=\sin 1.1+0.25\approx 1.141,\quad F(1.3)=\sin 1.3+0.25\approx 1.214$

Wegen der Monotonie folgt $F(1.1)\leq F(x)\leq F(1.3)$ für $1.1\leq x\leq 1.3$, also gilt erst recht $1.1\leq F(x)\leq 1.3$ für $1.1\leq x\leq 1.3$. Somit ist $F(x)$ über $[1.1,1.3]$ eine Selbstabbildung.

Mittelwertsatz der Differenzialrechnung: Ist $F(x)$ über $[a,b]$ differenzierbar, so gilt für $x,y\in[a,b]$ mit $x<y$ $\dfrac{F(x)-F(y)}{x-y}=F'(\xi)$ für ein $\xi\in(x,y)$, d.h. der Anstieg der Sekante ist gleich dem Anstieg der Tangente an einem Zwischenpunkt.



$F'(\xi)=\cos\xi$

$F'(\xi)$ ist monoton fallend für $0\leq\xi\leq\pi\approx 3.14.$

$F'(1.1)=\cos 1.1\approx 0.454,\quad F'(1.3)=\cos 1.3\approx 0.267$

Wegen der Monotonie folgt $0.267\approx F'(1.3)\leq F'(\xi)\leq F'(1.1)\approx 0.454$ für $1.1\leq\xi\leq 1.3$, d.h. für $x,y\in[1.1,1.3]$ gilt $\left|\dfrac{F(x)-F(y)}{x-y}\right|=|F'(\xi)|\leq 0.454$ und damit schließlich auch $|F(x)-F(y)|\leq 0.454\,|x-y|$, so dass die Kontraktionsbedingung erfüllt ist.

b) $x_0=1.2,\quad x_{n+1}=\sin x_n+0.25,$

n	x_n
0	1.2
1	1.18203909
2	1.17538083
3	1.17283660
4	1.17185360
5	1.17147220
6	1.17132398
7	1.17126634
8	1.17124393
9	1.17123520
10	1.17123181

n	x_n
11	1.17123049
12	1.17122998
13	1.17122978
14	1.17122970
15	1.17122967
16	1.17122966
17	1.17122966
18	1.17122965
19	1.17122965
20	1.17122965
21	1.17122965

$\underline{\underline{x^*=1.17122965}},\quad x^*-\sin x^*-0.25=0$

c) Newtonverfahren zur Lösung von $f(x)=0$: $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$f(x)=x-\sin x-0.25,\quad f'(x)=1-\cos x$

$x_0=1.2,\quad x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n-\sin x_n-0.25}{1-\cos x_n},$

n	x_n
0	1.2
1	1.17183230
2	1.17122993
3	1.17122965
4	1.17122965
5	1.17122965

quadratische Konvergenz des Newtonverfahrens