Aufgabe 24.1

Zur numerischen Lösung der Gleichung $x = \arccos x$ wird auf dem Taschenrechner ausgehend vom Startwert 0.7

(I) fortlaufend die arccos-Taste bzw.
(II) fortlaufend die cos-Taste

gedrückt.

a) Wieso konvergiert das eine Verfahren und das andere nicht?
b) Berechnen Sie mit dem konvergenten Verfahren die Lösung auf 4 Stellen nach dem Komma! Wie viele Iterationsschritte sind erforderlich?
c) Geben Sie ein schnelleres Iterationsverfahren an! Wie viele Iterationsschritte sind bei diesem erforderlich?

Lösung:

Lösung der nichtlinearen Gleichung $f(x) = 0 \iff x = x - f(x)$
(iterierfähige Gestalt: x aus sich selbst zu berechnen)

Wir setzen $F(x) = x - f(x)$ und suchen die Lösung von $x^* = F(x^*) \iff f(x^*) = 0$.

Gilt $x^* = F(x^*)$, so heißt x^* „Fixpunkt" der Abbildung F.

„Picarditeration" (Fixpunktiteration) Idee (Hoffnung):
$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & F(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x^* & = & F(x^*) \end{array}$$

Die gegebene Gleichung $x = \arccos x$ ist schon in iterierfähiger Gestalt, $x = \cos x$ ist äquivalent dazu.

$F_1(x) = \arccos x, \quad F_2(x) = \cos x$

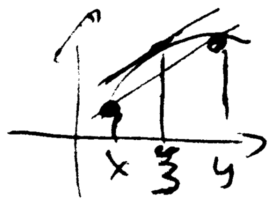
	$x_{n+1} = F_1(x_n)$	$x_{n+1} = F_2(x_n)$
n	x_n	x_n
0	0.7	0.7
1	0.795399	0.764842
2	0.651131	0.721492
3	0.861723	0.750821
4	0.532141	0.731129
5	1.009669	0.744421
6	nicht def.	0.735480

a) **Banachscher Fixpunktsatz:** Ist $\vec{F}$ eine Selbstabbildung $\vec{F} : D \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^n$, die für alle $\vec{x}, \vec{y} \in D$ der Kontraktionsbedingung $\|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})\| \le L\|\vec{x} - \vec{y}\|$, $L < 1$ genügt, so konvergiert die Iterationsfolge $\vec{x}_{n+1} = F(\vec{x}_n)$ für alle Startwerte $\vec{x}_0 \in D$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $\vec{x}^* \in D$.

Im vorliegenden Fall geht es um skalarwertige Funktionen von Skalaren $F(x)$, als Kontraktionsbedingung kann deshalb $|F(x) - F(y)| \le L|x - y|$, $L < 1$ betrachtet werden.

Bezüglich $F_2(x)$ betrachten wir z.B. das Intervall $D = [0.5, 1]$. Es gilt $F_2(0.5) = \cos 0.5 \approx 0.878$, $F_2(1) = \cos 1 \approx 0.540$. Ferner ist $F_2(x) = \cos x$ über $[0, \pi]$ und damit erst recht über D monoton fallend, also gilt für $x \in D$ $F_2(x) \in [\cos 1, \cos 0.5] \subset D$. $F_2(x)$ ist also über dem Intervall $D = [0.5, 1]$ eine Selbstabbildung.

Mittelwertsatz der Differenzialrechnung: Ist $F(x)$ über $[a,b]$ differenzierbar, so gilt für $x,y \in [a,b]$ mit $x<y$ $\dfrac{F(x)-F(y)}{x-y}=F'(\xi)$ für ein $\xi \in (x,y)$, d.h. der Anstieg der Sekante ist gleich dem Anstieg der Tangente an einem Zwischenpunkt.



(Das entspricht der Taylorentwicklung (s. z.B. Aufgabe 12.150) bis zum absoluten Glied mit Lagrangeschem Restglied $F(x)=F(y)+F'(\xi)(x-y),\ \xi \in (x,y)$.)

Über $D=[0.5,1]$ gilt also $\left|\dfrac{F_2(x)-F_2(y)}{x-y}\right| = |F_2'(\xi)| = |-\sin\xi| < \sin 1 < 1,$ so dass auch Kontraktivität und damit nach dem Banachschen Fixpunktsatz Konvergenz der Iteration $x_{n+1} = F_2(x_n) = \cos x_n,\ x_0 = 0.7$ gesichert ist.

Für $F_1(x) = \arccos x$ ist das nicht der Fall. $F_1(x)$ ist z.B. wegen $F_1(0.5) \approx 1.047$ über dem Intervall $[0.5,1]$ keine Selbstabbildung, $F_1(0.5)$ liegt sogar außerhalb des Definitionsbereiches von $F_1(x)$. Das gilt analog auch für andere Gebiete D. Das braucht aber nicht im Einzelnen untersucht werden, da Kontraktivität in keinem Falle zu sichern ist. Es gilt nämlich immer $\left|\dfrac{F_1(x)-F_1(y)}{x-y}\right| = |F_1'(\xi)| = \left|-\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\right| \geq 1.$

b) Iteration mit $F_2(x) = \cos x$:

n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n
0	0.7	5	0.744421	10	0.738436	15	0.739188
1	0.764842	6	0.735480	11	0.739584	16	0.739016
2	0.721492	7	0.741509	12	0.738749	17	0.739132
3	0.750821	8	0.737450	13	0.739312	18	0.739054
4	0.731129	9	0.740185	14	0.738932	19	0.739106

Nach dem 18. Iterationsschritt sind die Stellen 0.7391 sicher.

c) **Newtonverfahren (Tangentenverfahren)** zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(x)$:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)-0}{x_n-x_{n+1}}, \qquad x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Mit $f(x)=x-\cos x$ ergibt sich als Iterationsvorschrift $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n-\cos x_n}{1+\sin x_n}$ (vgl. Aufgabe 12.62):

n	x_n
0	0.7
1	0.739436
2	0.739085
3	0.739085

Beim Newtonverfahren sind nur 3 Schritte erforderlich.
(quadratische Konvergenz des Newtonverfahrens bei guter Startnäherung)