Aufgabe 23.11

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y''+64y=96\cos 4x,\ y(0)=y'(0)=0$!

Lösung:

homogen: $\lambda^2+64=0,\ \ \lambda_{1/2}=\pm 8\mathrm{i},\ \ y_{\text{hom}}=A\cos 8x+B\sin 8x$

inhomogen: Ansatz:
$$\begin{aligned} y &= C\cos 4x + D\sin 4x \\ y' &= -4C\sin 4x + 4D\cos 4x \\ y'' &= -16C\cos 4x - 16D\sin 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''+64y &= -16C\cos 4x-16D\sin 4x+64C\cos 4x+64D\sin 4x = 48C\cos 4x+48D\sin 4x \\ &= 96\cos 4x,\quad C=2,\ D=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= A\cos 8x+B\sin 8x+2\cos 4x, & y(0) &= A+2=0, & A &= -2 \\ y' &= -8A\sin 8x+8B\cos 8x-8\sin 4x, & y'(0) &= 8B=0, & B &= 0 \end{aligned}$$

Lösung der Anfangswertaufgabe: $y=-2\cos 8x+2\cos 4x$

oder mit Laplacetransformation:

$$L[y'']+64L[y]=p^2L[y]-\underbrace{y(0)}_{0}p-\underbrace{y'(0)}_{0}+64L[y]=(p^2+64)L[y]=96L[\cos 4x]=96\frac{p}{p^2+16}$$

$$L[y]=96\frac{p}{(p^2+16)(p^2+64)}$$

In Formelsammlungen, z.B. Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Begründet v. I. N. Bronstein u. K. A. Semendjajew. Hrsg. v. E. Zeidler. Teubner. 2. Aufl. 2003, S. 207 findet sich die Formel $L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)}\right]=\frac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{\beta^2-\alpha^2}$. Also ist $L^{-1}\left[\frac{p}{(p^2+4^2)(p^2+8^2)}\right]=\frac{\cos 4t-\cos 8t}{48}$.

$$y=\frac{96}{48}(\cos 4x-\cos 8x)=2\cos 4x-2\cos 8x$$

oder mit Partialbruchzerlegung:

$$\frac{96p}{(p^2+16)(p^2+64)}=\frac{Ap+B}{p^2+16}+\frac{Cp+D}{p^2+64},\quad 96p=Ap^3+Bp^2+64Ap+64+Cp^3+Dp^2+16Cp+16D$$

$$\begin{array}{lll} p^3: & A+C=0 & |\cdot 16 \\ p^2: & B+D=0 & |\cdot 16 \\ p: & 64A+16C=96 & |+ \\ 1: & 64B+16D=0 & |+ \\ & 16A+16C=0 & |- \quad 48A=96,\ \ A=2,\ \ C=-2 \\ & 16B+16D=0 & |- \quad 48B=0,\ \ B=0,\ \ D=0 \end{array}$$

$$\frac{96p}{(p^2+16)(p^2+64)}=\frac{2p}{p^2+16}-\frac{2p}{p^2+64}$$

$$L^{-1}\left[\frac{96p}{(p^2+16)(p^2+64)}\right]=2L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+4^2}\right]-2L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+8^2}\right]=2\cos 4x-2\cos 8x$$