Aufgabe 23.9

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y''(x)+36y(x)=6,\ y(0)=y'(0)=0$ mit Hilfe der Laplacetransformation!

Lösung:

$$L[y''+36y]=L[y'']+36L[y]=p^2L[y]-\underbrace{y(0)}_{0}p-\underbrace{y'(0)}_{0}+36L[y]=6L[1]=6\,\frac{1}{p}$$

$$(p^2+36)L[y]=\frac{6}{p},\ \ L[y]=\frac{6}{p\,(p^2+36)},\ \ y=L^{-1}\left[\frac{6}{p\,(p^2+36)}\right]$$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{6}{p\,(p^2+36)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{Bp+C}{p^2+36}$,

$$A(p^2+36)+(Bp+C)p=(A+B)p^2+Cp+36A=6,\ A+B=0,\ C=0,\ 36A=6,\ A=\frac{1}{6},\ B=-\frac{1}{6}$$

$$y=L^{-1}\left[\frac{6}{p\,(p^2+36)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1/6}{p}-\frac{p/6}{p^2+36}\right]=\frac{1}{6}L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{6}L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+36}\right]$$
$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cos 6t=\frac{1}{6}(1-\cos 6t)$$

oder

In Formelsammlungen, z.B. Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Begründet v. I. N. Bronstein u. K. A. Semendjajew. Hrsg. v. E. Zeidler. Teubner. 2. Aufl. 2003, S. 205 findet sich die Formel $L^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+\alpha^2)}\right]=\dfrac{1}{\alpha^2}(1-\cos\alpha t)$.

Folglich ist $y=L^{-1}\left[\dfrac{6}{p\,(p^2+36)}\right]=6L^{-1}\left[\dfrac{1}{p\,(p^2+6^2)}\right]=\dfrac{6}{6^2}(1-\cos 6t)=\dfrac{1}{6}(1-\cos 6t)$.