Aufgabe 23.8

Lösen Sie die inhomogenen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

a) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3x}$,
b) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{x}$
c) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}$,
d) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{2x}$,
e) $y'' + 16y = 3\sin 2x$

(vgl. Aufgabe 21.53) mit Hilfe der Laplacetransformation!

Lösung:

$L[y^{(n)}] = p^n L[y] - y(0)p^{n-1} - y'(0)p^{n-2} - \cdots - y^{(n-2)}(0)p - y^{(n-1)}$

$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - y(0)p - y'(0)$

Wenn wie hier keine Anfangsbedingungen gegeben sind, so kann man einfach $y(0)=C, y'(0)=D$ setzen, man erhält dann die allgemeine, von 2 Konstanten abhängige Lösung der Differenzialgleichung 2. Ordnung.

Für die Ausführung der Laplace-Rücktransformationen kann man auf Formelsammlungen, z.B. Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Begründet v. I. N. Bronstein u. K. A. Semendjajew. Hrsg. v. E. Zeidler. Teubner. 2. Aufl. 2003 zurückgreifen.

a) $L[y''-3y'+2y] = p^2 L[y] - Cp - D - 3pL[y] + 3C + 2L[y]$

$$= (p^2-3p+2)L[y] - Cp + 3C - D = L[\mathrm{e}^{3x}] = \frac{1}{p-3}$$

$$L[y] = \frac{Cp-3C+D}{p^2-3p+2} + \frac{1}{(p^2-3p+2)(p-3)} = \frac{Cp+D-3C}{(p-2)(p-1)} + \frac{1}{(p-3)(p-2)(p-1)}$$

Weiter mit Partialbruchzerlegung oder Nutzung der Formeln

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}\right] = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{\beta - \alpha}, \quad L^{-1}\left[\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}\right] = \frac{\alpha \mathrm{e}^{-\alpha t} - \beta \mathrm{e}^{-\beta t}}{\alpha - \beta},$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}\right] = \frac{(\gamma-\beta)\mathrm{e}^{-\alpha t} + (\alpha-\gamma)\mathrm{e}^{-\beta t} + (\beta-\alpha)\mathrm{e}^{-\gamma t}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

(oben zitiere Formelsammlung S. 204f.)

$$y = C(2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}) + (D-3C)(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}) + \frac{-\mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}{-2}$$

$$= \left(2C - D + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{x} + (D-C-1)\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x} = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}$$

b) analog a): $L[y''-3y'+2y] = (p^2-3p+2)L[y] - Cp + 3C - D = L[\mathrm{e}^{x}] = \dfrac{1}{p-1}$

$$L[y] = \frac{Cp-3C+D}{p^2-3p+2} + \frac{1}{(p^2-3p+2)(p-1)} = \frac{Cp+D-3C}{(p-2)(p-1)} + \frac{1}{(p-2)(p-1)^2}$$

Für den letzten Term wird eine Partialbruchzerlegung vorgenommen:

$$\frac{1}{(p-2)(p-1)^2} = \frac{E}{p-2} + \frac{F}{p-1} + \frac{G}{(p-1)^2}, \quad \begin{aligned} &E(p-1)^2 + F(p-1)(p-2) + G(p-2) = \\ &E(p^2-2p+1) + F(p^2-3p+2) + G(p-2) = \\ &(E+F)p^2 + (-2E-3F+G)p + (E+2F-2G) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} E+\ F \qquad = 0 & \Longrightarrow & F=-E \\ -2E-3F+\ G=0 & \Longrightarrow & E+G=0,\ \ G=-E \\ E+2F-2G=1 & \Longrightarrow & E-2E+2E=E=1,\ \ F=-1,\ \ G=-1 \end{array}$$

$$L[y]=\frac{Cp+D-3C}{(p-2)(p-1)}+\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)^2},\quad L^{-1}\left[\frac{1}{(s+\alpha)^2}\right]=t\mathrm{e}^{-\alpha t}\ \text{(Formelsammlung)}$$

$$\begin{aligned} y &= C(2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)+(D-3C)(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x \\ &= (2C-D-1)\,\mathrm{e}^x+(D-C+1)\,\mathrm{e}^{2x}-x\mathrm{e}^x=A\mathrm{e}^x+B\mathrm{e}^{2x}-x\mathrm{e}^x\ \ \text{(Resonanz)} \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} L[y''-2y'+y] &= p^2L[y]-Cp-D-2pL[y]+2C+L[y] \\ &= (p^2-2p+1)L[y]-Cp+2C-D=L[\mathrm{e}^x]=\frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

$$L[y]=\frac{Cp+D-2C}{(p-1)^2}+\frac{1}{(p-1)^3}$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s+\alpha)^2}\right]=\mathrm{e}^{-\alpha t}(1-\alpha t),\qquad L^{-1}\left[\frac{1}{(s+\alpha)^3}\right]=\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-\alpha t}\quad \text{(Formelsammlung)}$$

$$y=C(\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x)+(D-2C)\,x\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x=C\mathrm{e}^x+(D-C)\,x\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x=C\mathrm{e}^x+Bx\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x$$

(Resonanz)

d) analog c): $L[y''-2y'+y]=(p^2-2p+1)L[y]-Cp+2C-D=L[\mathrm{e}^{2x}]=\dfrac{1}{p-2}$

$$L[y]=\frac{Cp+D-2C}{(p-1)^2}+\frac{1}{(p-2)(p-1)^2}=\frac{Cp+D-2C}{(p-1)^2}+\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)^2}\ \ \text{(vgl. b))}$$

$$\begin{aligned} y &= C(\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x)+(D-2C)\,x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x \\ &= (C-1)\,\mathrm{e}^x+(D-C-1)\,x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}=A\mathrm{e}^x+Bx\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

e) $L[y''+16y]=p^2L[y]-Cp-D+16L[y]=(p^2+16)L[y]-Cp-D=L[3\sin 2x]=\dfrac{6}{p^2+4}$

$$L[y]=\frac{Cp+D}{p^2+16}+\frac{6}{(p^2+16)(p^2+4)}$$

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+16}\right]=\cos 4x,\quad L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+16}\right]=\frac{1}{4}\sin 4x,$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)}\right]=\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha}\sin\alpha t-\frac{1}{\beta}\sin\beta t\right)\ \text{(Formelsammlung)},$$

also $L^{-1}\left[\dfrac{1}{(p^2+16)(p^2+4)}\right]=-\dfrac{1}{48}\sin 4x+\dfrac{1}{24}\sin 2x$

$$\begin{aligned} y &= C\cos 4x+\frac{D}{4}\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x \\ &= C\cos 4x+\left(\frac{D}{4}-\frac{1}{8}\right)\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x=C\cos 4x+B\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x \end{aligned}$$