Aufgabe 23.7

Lösen Sie die Anfangswertaufgaben (vgl. Aufgabe 21.60)

a) $y'' + 4y = \sin x,\ y(0) = y'(0) = 0,$
b) $y'' + 4y = \sin 2x,\ y(0) = y'(0) = 0$

mit Hilfe der Laplacetransformation!

Lösung:

a) **Additionssatz:** $L[a_1 f_1 + a_2 f_2] = a_1 L[f_1] + a_2 L[f_2]$
$L[y''+4y] = L[y''] + 4L[y] = L[\sin 2x]$

Differenziationssatz: $L[y^{(n)}] = p^n L[y] - y(0)p^{n-1} - y'(0)p^{n-2} - \cdots - y^{(n-2)}(0)p - y^{(n-1)}$
$L[y''] = p^2 L[y] - y(0)p - y'(0)$

$$L[y''+4y] = L[y''] + 4L[y] = p^2 L[y] - \underbrace{y(0)}_{0} p - \underbrace{y'(0)}_{0} + 4L[y] = L[\sin x] = \frac{1}{p^2+1}$$

$$(p^2+4)L[y] = \frac{1}{p^2+1},\quad L[y] = \frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)},\quad y = L^{-1}\left[\frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}\right]$$

Berechnung der Laplace-Rücktransformation: (siehe Aufgabe 23.5c))

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{Cp+D}{p^2+2} = \frac{Ap^3+Bp^2+4Ap+4B+Cp^3+Dp^2+Cp+D}{(p^2+1)(p+4)},$$

Koeffizientenvergleich: $A+C=0,\ B+D=0,\ 4A+C=0,\ 4B+D=0,$

$$\Rightarrow\ A=C=0,\ 3B=1,\ B=\frac{1}{3},\ D=-\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(p^2+1)} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{(p^2+4)}$$

Es gilt $L[\sin x] = \dfrac{1}{p^2+1},\quad L[\sin 2x] = \dfrac{2}{p^2+2^2},$ deshalb ist

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(p^2+1)} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{(p^2+4)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(p^2+1)} - \frac{1}{6}\,\frac{2}{(p^2+4)}$$
$$= \frac{1}{3}L[\sin x] - \frac{1}{6}L[\sin 2x] = L\left[\frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{6}\sin 2x\right]$$

oder

In Formelsammlungen, z.B. Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Begründet v. I. N. Bronstein u. K. A. Semendjajew. Hrsg. v. E. Zeidler. Teubner. 2. Aufl. 2003, S. 206 findet sich die Formel

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)}\right] = \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha}\sin\alpha t - \frac{1}{\beta}\sin\beta t\right).$$

Folglich ist $L^{-1}\left[\dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}\right] = \dfrac{1}{3}\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\sin 2x\right).$

Als Lösung der AWA ergibt sich also $y(x) = L^{-1}\left[\dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}\right] = \dfrac{1}{3}\sin x - \dfrac{1}{6}\sin 2x.$

b) analog $L[y''+4y]=L[y'']+4L[y]=p^2L[y]-\underbrace{y(0)}_{0}p-\underbrace{y'(0)}_{0}p+4L[y]=L[\sin 2x]=\dfrac{2}{p^2+4}$

$$(p^2+4)L[y]=\frac{2}{p^2+4},\quad L[y]=\frac{2}{(p^2+4)^2},\quad y=L^{-1}\left[\frac{2}{(p^2+4)^2}\right]$$

Berechnung der Laplace-Rücktransformation: (siehe Aufgabe 23.5d))

Anwendung des Faltungssatzes führt auf $L^{-1}\left[\dfrac{1}{(p^2+4)^2}\right]=\dfrac{1}{16}\sin 2x-\dfrac{1}{8}x\cos 2x$

oder

In Formelsammlungen, z.B. Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Begründet v. I. N. Bronstein u. K. A. Semendjajew. Hrsg. v. E. Zeidler. Teubner. 2. Aufl. 2003, S. 207 findet sich die Formel

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\alpha^2)^2}\right]=\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha}\sin\alpha t-t\cos\alpha t\right).$$

Folglich ist $L^{-1}\left[\dfrac{1}{(p^2+4)^2}\right]=\dfrac{1}{2\cdot 4}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x-x\cos 2x\right)=\dfrac{1}{16}\sin 2x-\dfrac{1}{8}x\cos 2x.$

Als Lösung der AWA ergibt sich also $y(x)=2L^{-1}\left[\dfrac{1}{(p^2+4)^2}\right]=\dfrac{1}{8}\sin 2x-\dfrac{1}{4}x\cos 2x.$

Während die Lösung von a) eine Linearkombinationen von Winkelfunktionen und damit beschränkt ist, wird in der Lösung von b) $\cos 2x$ mit x multipliziert, sie ist deshalb unbeschränkt. Also ist die Lösung im Resonanzfall (vgl. Aufgabe 21.60) unbeschränkt, im anderen Fall beschränkt. Beschreibt die Aufgabe eine durch die rechte Seite erzwungene Schwingung, so erfolgt im Resonanzfall die Anregung mit der Frequenz der freien Schwingung. Die Auslenkung wird dann beliebig groß: Resonanzkatastrophe.