Aufgabe 23.6

Berechnen Sie die Laplace-Rücktransformationen $f(t) = L^{-1}[L(p)]$ von
$L(p) = \dfrac{3p^2 - 10p + 21}{p^3 - 2p^2 + 9p - 18}$!

Lösung:

Partialbruchzerlegung: $p^3-2p^2+9p-18=(p-2)(p^2+9)$, $\dfrac{3p^2-10p+21}{p^3-2p^2+9p-18}=\dfrac{A}{p-2}+\dfrac{Bp+C}{p^2+9}$,

$$Ap^2+9A+Bp^2+Cp-2Bp-2C=3p^2-10p+21,$$

Koeffizientenvergleich: $A+B=3$, $C-2B=-10$, $9A-2C=21$

$\Longrightarrow$ $B=3-A$, $C-6+2A=-10$, $C=-4-2A$, $9A-2(-4-2A)=13A+8=21$

$\Longrightarrow$ $A=1$, $B=2$, $C=-6$, $\dfrac{3p^2-10p+21}{p^3-2p^2+9p-18}=\dfrac{1}{p-2}+\dfrac{2p-6}{p^2+9}=\dfrac{1}{p-2}+\dfrac{2p}{p^2+9}-\dfrac{6}{p^2+9}$

Mit $L^{-1}\left[\dfrac{1}{p-2}\right]=\mathrm{e}^{2t}$, $L^{-1}\left[\dfrac{p}{p^2+3^2}\right]=\cos 3t$ und $L^{-1}\left[\dfrac{3}{p^2+3^2}\right]=\sin 3t$ folgt

$$L^{-1}\left[\frac{3p^2-10p+21}{p^3-2p^2+9p-18}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{p-2}+2\frac{p}{p^2+3^2}-2\frac{3}{p^2+3^2}\right]=\underline{\underline{\mathrm{e}^{2t}+2\cos 3t-2\sin 3t}}.$$