Aufgabe 23.5

Berechnen Sie die Laplace-Rücktransformationen $f(t) = L^{-1}[L(p)]$ folgender Funktionen mit Hilfe der Eigenschaften der Laplacetransformation:

a) $L(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2+1}$,

b) $L(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$,

c) $L(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}$,

d) $L(p) = \dfrac{1}{(p^2+4)^2}$!

Lösung:

a) **Dämpfungssatz:** $L[\mathrm{e}^{-at} f(t)] = L(p+a)$ für $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\, p > c-a$

$$L[\mathrm{e}^t \sin t] = \frac{1}{1+(p-1)^2} \quad \longrightarrow \quad f(t) = \underline{\underline{\mathrm{e}^t \sin t}}$$

b) Partialbruchzerlegung: $\dfrac{1}{(p-1)(p-2)} = \dfrac{A}{p-1} + \dfrac{B}{p-2} = \dfrac{A(p-2)+B(p-1)}{(p-1)(p-2)}$,

Koeffizientenvergleich: $A+B=0$, $-2A-B=1$, Addition $\Rightarrow$ $-A=1$, $A=-1$, $B=1$,

$$\frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}$$

Additionssatz $L[k_1 f_1(t) + k f_2(t)] = k_1 L[f_1(t)] + k_2 L[f_2(t)]$ für $\mathrm{Re}\, p > \max(c_1, c_2)$,

also $\dfrac{1}{p-2} - \dfrac{1}{p-1} = L\left[\mathrm{e}^{2t}\right] - L\left[\mathrm{e}^{t}\right] = L\left[\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t}\right]$, d.h. $f(t) = L^{-1}[L(p)] = \underline{\underline{\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t}}$

oder Faltungssatz:

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = L\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = L_1(p) L_2(p) = L[f_1(t)] L[f_2(t)] \text{ für } \mathrm{Re}\, p > \max(c_1, c_2)$$

$$L_1(p) = \frac{1}{p-1} \quad \longrightarrow \quad f_1(t) = \mathrm{e}^t, \qquad L_2(p) = \frac{1}{p-2} \quad \longrightarrow \quad f_2(t) = \mathrm{e}^{2t}$$

$$L_1(p) L_2(p) = L[f_1(t) * f_2(t)]$$

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{\tau}\, \mathrm{e}^{2t-2\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{2t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{2t}\left(-\mathrm{e}^{-\tau}\right)\Big|_0^{\tau} = \mathrm{e}^{2t}\left(-\mathrm{e}^{-t} - 1\right) = \underline{\underline{\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t}}$$

c) $\dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+4)} = \dfrac{Ap+B}{p^2+1} + \dfrac{Cp+D}{p^2+2} = \dfrac{Ap^3+Bp^2+4Ap+4B+Cp^3+Dp^2+Cp+D}{(p^2+1)(p+4)}$,

Koeffizientenvergleich: $A+C=0$, $B+D=0$, $4A+C=0$, $4B+D=0$,

$$\Rightarrow A = C = 0,\ 3B = 1,\ B = \frac{1}{3},\ D = -\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(p^2+1)} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{(p^2+4)}$$

Es gilt $L[\sin t] = \dfrac{1}{p^2+1}$, $L[\sin 2t] = \dfrac{2}{p^2+2^2}$, deshalb ist

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(p^2+1)} - \frac{1}{3}\frac{1}{(p^2+4)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(p^2+1)} - \frac{1}{6}\frac{2}{(p^2+4)}$$
$$= \frac{1}{3}L[\sin t] - \frac{1}{6}L[\sin 2t] = L\left[\frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t\right],$$

d.h. $f(t) = L^{-1}[L(p)] = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t}}.$

oder mit Faltungssatz:

$$L_1(p) = \frac{1}{p^2+1} \quad \longrightarrow \quad f_1(t) = \sin t$$

$$L_2(p) = \frac{1}{p^2+4} = \frac{1}{2}\frac{2}{p^2+2^2} = \frac{1}{2}L[\sin 2t] \quad \longrightarrow \quad f_2(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \sin\tau\,\sin(2t-2\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{4}\int_0^t (\cos(3\tau-2t)-\cos(2t-\tau))\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \left[\frac{1}{12}\sin(3\tau-2t)+\frac{1}{4}\sin(2t-\tau)\right]_0^\tau = \frac{1}{12}\sin t+\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{12}\sin(-2t)-\frac{1}{4}\sin 2t$$
$$= \frac{1}{12}\sin t+\frac{3}{12}\sin t+\frac{1}{12}\sin 2t-\frac{3}{12}\sin 2t = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t}}$$

d) **analog mit Faltungssatz:**

$$L_1(p) = L_2(p) = \frac{1}{p^2+4} \quad \longrightarrow \quad f_1(t) = f_2(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$$

$$L_1(p)L_2(p) = L[f_1(t) * f_2(t)]$$

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_1(t) = \frac{1}{4}\int_0^t \sin 2\tau\,\sin(2t-2\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{8}\int_0^t (\cos(4\tau-2t)-\cos 2t)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \left[\frac{1}{32}\sin(4\tau-2t)-\frac{1}{8}\tau\cos 2t\right]_0^t = \frac{1}{32}\sin 2t-\frac{1}{8}t\cos 2t-\frac{1}{32}\sin(-2t)$$
$$= \frac{1}{32}\sin 2t-\frac{1}{8}t\cos 2t+\frac{1}{32}\sin 2t = \underline{\underline{\frac{1}{16}\sin 2t-\frac{1}{8}t\cos 2t}}$$