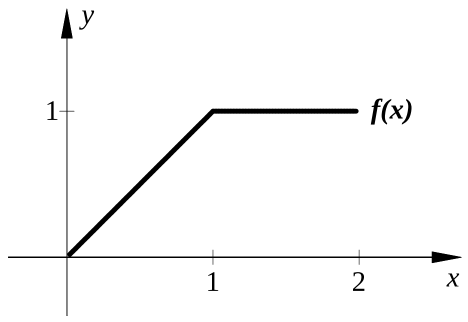
Aufgabe 23.4

Über dem Intervall $[0,2]=\{x\in\mathbb{R} : 0\le x\le 2\}$ sei die in der Abbildung dargestellte Funktion $f(x)$ definiert, außerhalb dieses Intervalls werde sie durch 0 auf die gesamte reelle Achse fortgesetzt. Berechnen Sie die Laplacetransformation dieser Funktion!



Lösung:

$$L[f]=\int_0^\infty e^{-px}f(x)\,dx=\int_0^1 x\,e^{-px}\,dx+\int_1^2 e^{-px}\,dx$$

$$\int x\,e^{-px}\,dx=\frac{xe^{-px}}{-p}+\int\frac{e^{-px}}{p}\,dx=-\frac{xe^{-px}}{p}-\frac{e^{-px}}{p^2},\quad \int e^{-px}\,dx=-\frac{e^{-px}}{p}$$

$$L[f]=-\left[\frac{xe^{-px}}{p}+\frac{e^{-px}}{p^2}\right]_0^1-\left[\frac{e^{-px}}{p}\right]_1^2=-\left[\frac{e^{-p}}{p}+\frac{e^{-p}}{p^2}-\frac{1}{p^2}\right]-\left[\frac{e^{-2p}}{p}-\frac{e^{-p}}{p}\right]$$

$$=-\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-2p}}{p}+\frac{e^{-p}}{p}=\underline{\underline{\frac{1-e^{-p}-p\,e^{-2p}}{p^2}}}$$