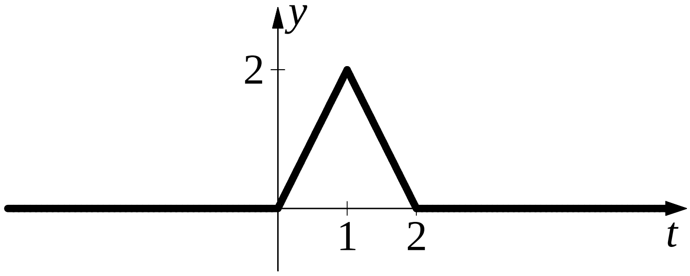
Aufgabe 23.3

Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Funktion $s(t)$:



a) Geben Sie die Vorschrift zur Berechnung von $s(t)$ an!

b) Ermitteln Sie $L(p) = \int_0^\infty e^{-pt} s(t)\,dt$ durch Berechnung des Integrals!

c) Sei $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$. Berechnen Sie die Laplacetransformation von $s(t)$, indem Sie $s(t)$ in der Form $s(t) = a_1 f(t) + a_2 f(t-1) + a_3 f(t-2)$ mit geeigneten Parametern a_1, a_2 und a_3 darstellen und nur die Beziehungen $L[f(t)] = \frac{1}{p^2}$,
$L[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 L[f_1(t)] + k_2 L[f_2(t)]$ (Additionssatz) und
$L[f(t-b)] = e^{-pb} L[f(t)]$ (Verschiebungssatz) ausnutzen!

Lösung:

a) $s(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 2t & 0 \leq t < 1 \\ 4-2t & 1 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t \end{cases}$

b) $L(p) = \int_0^\infty e^{-pt} s(t)\,dt = \int_0^1 2t\,e^{-pt}\,dt + \int_1^2 (4-2t)\,e^{-pt}\,dt$

$$\int te^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p}te^{-pt} + \frac{1}{p}\int e^{-pt} = -\frac{1}{p}te^{-pt} - \frac{1}{p^2}e^{-pt}$$

$$L(p) = \left[-\frac{2}{p}te^{-pt} - \frac{2}{p^2}e^{-pt}\right]_0^1 + \left[-\frac{4}{p}e^{-pt} + \frac{2}{p}te^{-pt} + \frac{2}{p^2}e^{-pt}\right]_1^2$$

$$= -\frac{2}{p}e^{-p} - \frac{2}{p^2}e^{-p} + \frac{2}{p^2} - \frac{4}{p}e^{-2p} + \frac{4}{p}e^{-2p} + \frac{2}{p^2}e^{-2p} + \frac{4}{p}e^{-p} - \frac{2}{p}e^{-p} - \frac{2}{p^2}e^{-p}$$

$$= -\frac{4}{p^2}e^{-p} + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^2}e^{-2p} = \underline{\underline{\frac{2}{p^2}\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right)}}$$

c) Für $t<1$ gilt offensichtlich $s(t) = 2f(t)$. Addiert man dazu ein Vielfaches von $f(t-1) = \begin{cases} 0, & t<1 \\ t-1, & t \geq 1 \end{cases}$, so bleibt die Funktion für $t<1$ unverändert. Addiert man speziell das (-4)–fache, so ergibt sich außerdem für $1 \leq t$ $\quad 2f(t) - 4f(t-1) = 2t - 4(t-1) = 4-2t$, so dass für $t<2$ offensichtlich $s(t) = 2f(t) - 4f(t-1)$ gilt. Addiert man nun dazu noch ein Vielfaches von $f(t-2) = \begin{cases} 0, & t<2 \\ t-2, & t \geq 2 \end{cases}$, so bleibt die Funktion für $t<2$ unverändert. Addiert

man speziell das 2–fache, so ergibt sich außerdem für $2 \le t$
$2f(t)-4f(t-1)+2f(t-2) = 2t-4(t-1)+2(t-2) = 0$, so dass für beliebiges t die Beziehung $s(t) = 2f(t)-4f(t-1)+2f(t-2)$ gilt.

Damit gilt $L[s(t)] = 2L[f(t)]-4L[f(t-1)]+2L[f(t-2)] = 2\dfrac{1}{p^2} - 4e^{-p}\dfrac{1}{p^2} + 2e^{-2p}\dfrac{1}{p^2}$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{p^2}\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right)}}.$$