Aufgabe 23.2

Berechnen Sie die Laplacetransformationen $L(p) = L[f(t)]$ folgender Funktionen mit Hilfe der Eigenschaften der Laplacetransformation:

a) $f(t) = \sin at \quad (a > 0)$,
b) $f(t) = e^{3t}\sin t$,
c) $f(t) = t^2 \sin t$,
d) $f(t) = \cos t = \dfrac{d}{dt}\sin t$,
e) $f(t) = \int\limits_0^t e^{3\tau}\sin\tau\,d\tau$,
f) $f(t) = \int\limits_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)\,d\tau$!

Lösung:

a) **Ähnlichkeitssatz:** $L[f(at)] = \dfrac{1}{a}L\left(\dfrac{p}{a}\right)$ für $a > 0$, $\operatorname{Re} p > ac$

$$L[\sin at] = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{p}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{a^2+p^2}{a^2}} = \underline{\underline{\frac{a}{p^2+a^2}}}$$

b) **Dämpfungssatz:** $L[e^{-at}f(t)] = L(p+a)$ für $a \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} p > c-a$

Hier: $a = -3$, $c = 0$ (siehe Aufgabe 23.1a)), d.h. für $\operatorname{Re} p > 3$:

$$L[e^{3t}\sin t] = \frac{1}{1+(p-3)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{p^2-6p+10}}}$$

c) **Multiplikationssatz:** $L[(-t)^n f(t)] = L^{(n)}(p)$ für $\operatorname{Re} p > c$

$$L[t^2\sin t] = \frac{d^2}{dp^2}\frac{1}{1+p^2} = \frac{d}{dp}\frac{-2p}{(1+p^2)^2} = \frac{-2(1+p^2)^2+2p\,2(1+p^2)\,2p}{(1+p^2)^4} = \frac{-2(1+p^2)+8p^2}{(1+p^2)^3}$$
$$= \underline{\underline{\frac{6p^2-2}{(1+p^2)^3}}}$$

d) **Differenziationssatz:** $L[f'(t)] = pL(p) - f(+0)$

$$L[\cos t] = L[(\sin t)'] = \frac{p}{1+p^2} - \sin 0 = \underline{\underline{\frac{p}{1+p^2}}}$$

e) **Integrationssatz:** $L\left[\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \dfrac{1}{p}L(p)$ für $\operatorname{Re} p > c$

$$L\left[\int\limits_0^t e^{3\tau}\sin\tau\,d\tau\right] = \frac{1}{p}L[e^{3t}\sin t] = \frac{1}{p}\frac{1}{p^2-6p+10} = \underline{\underline{\frac{1}{p^3-6p^2+10p}}} \quad \text{(wegen b))}$$

f) **Faltungssatz:**

$$L[f_1(t)*f_2(t)] = L\left[\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\right] = L_1(p)L_2(p) = L[f_1(t)]L[f_2(t)] \text{ für } \operatorname{Re} p > \max(c_1,c_2)$$

$$L\left[\int\limits_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)\,d\tau\right] = L[e^t]\,L[\sin t] = \underline{\underline{\frac{1}{p-1}\,\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^3-p^2+p-1}}}$$

oder:

$$\int e^\tau \sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau = e^\tau \sin(t-\tau) + \int e^\tau \cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau = e^\tau \sin(t-\tau) + e^\tau \cos(t-\tau) - \int e^\tau \sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

also $\int e^\tau \sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2} e^\tau \big(\sin(t-\tau) + \cos(t-\tau)\big)$,

$$\int_0^t e^\tau \sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\left[e^\tau\big(\sin(t-\tau)+\cos(t-\tau)\big)\right]_0^t = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$$

Additionssatz: $L[k_1 f_1(t) + k f_2(t)] = k_1 L[f_1(t)] + k_2 L[f_2(t)]$ für $\operatorname{Re} p > \max(c_1, c_2)$

Damit erhält man ebenfalls

$$L\left[\int_0^t e^\tau \sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1}\right) = \frac{p^2+1-p+1-p^2+p}{2(p-1)(p^2+1)} = \underline{\underline{\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}}}.$$