Aufgabe 23.1

Berechnen Sie die Laplacetransformationen von

a) $f(t)=\sin t$ und b) $f(t)=\sinh t$

und geben Sie die Konvergenzhalbebenen an!

Lösung:

Laplacetransformation: $f(t) \longrightarrow L[f(t)]=L(p)=\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\, f)t)\,\mathrm{d}t$

Satz: (i) Sei $|f(t)|$ integrierbar in jedem endlichen Intervall $0\le t\le A$.
(ii) Es existieren Konstanten $c\ge 0,\ M>0$ mit $|f(t)|\le M\mathrm{e}^{ct}$ für alle $t\ge 0$.
Dann existiert die Laplacetransformation wenigstens für alle p mit $\underbrace{\mathrm{Re}\,p>c}_{\text{Konvergenzhalbebene}}$.

(Beachte nämlich: $\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{e}^{ct}=\mathrm{e}^{-(p_1+p_2\mathrm{i})t}\mathrm{e}^{ct}=\mathrm{e}^{(c-p_1)t}\mathrm{e}^{-p_2\mathrm{i}t}$,
$|\mathrm{e}^{-p_2\mathrm{i}t}|=1,\ \lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{(c-p_1)t}=0$ für $c-p_1=c-\mathrm{Re}\,p<0$)

a) $f(t)=\sin t$

Voraussetzungen des Satzes:

(i) $|f(t)|$ integrierbar über jedem endlichen Intervall $0\le t\le A$: erfüllt.

(ii) Ex. Konstanten $c\ge 0,\ M>0$ mit $|f(t)|\le M\mathrm{e}^{ct}$ für alle $t\ge 0$:
Wegen $|\sin t|\le 1$ ist das mit $M=1,\ c=0$ erfüllt, die Konvergenzhalbebene ist $\mathrm{Re}\,p>0$ (positiver Realteil).

$$\int \mathrm{e}^{-pt}\sin t\,\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-pt}\cos t-p\int \mathrm{e}^{-pt}\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$u=\mathrm{e}^{-pt}\ \longrightarrow\ u'=-p\mathrm{e}^{-pt},\quad v'=\sin t\ \longrightarrow\ v=-\cos t$$
$$=-\mathrm{e}^{-pt}\cos t-p\left(\mathrm{e}^{-pt}\sin t+p\int \mathrm{e}^{-pt}\sin t\,\mathrm{d}t\right)$$
$$=-\mathrm{e}^{-pt}\cos t-p\,\mathrm{e}^{-pt}\sin t-p^2\int \mathrm{e}^{-pt}\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$(1+p^2)\int \mathrm{e}^{-pt}\sin t\,\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-pt}\cos t-p\,\mathrm{e}^{-pt}\sin t,\qquad \int \mathrm{e}^{-pt}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{-\mathrm{e}^{-pt}\cos t-p\,\mathrm{e}^{-pt}\sin t}{1+p^2}$$

$$L(p)=\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\sin t\,\mathrm{d}t=\lim_{A\to\infty}\left[\frac{-\mathrm{e}^{-pt}\cos t-p\,\mathrm{e}^{-pt}\sin t}{1+p^2}\right]_0^\infty$$
$$=\lim_{A\to\infty}\underbrace{\mathrm{e}^{-pA}}_{\to 0}\underbrace{\left(\frac{-\cos A-p\sin A}{1+p^2}\right)}_{\text{beschränkt}}-\left(-\frac{1}{1+p^2}\right)=\frac{1}{1+p^2}$$

(Mit $p=p_1+p_2\mathrm{i},\ p_1=\mathrm{Re}\,p>0$ gilt nämlich $|\mathrm{e}^{-pA}|=|\mathrm{e}^{(p_1+p_2\mathrm{i})A}|=|\mathrm{e}^{-p_1A}|\,\underbrace{|\mathrm{e}^{-p_2\mathrm{i}A}|}_{1}\xrightarrow[A\to\infty]{}0$.)

Somit gilt $L[\sin t]=\dfrac{1}{1+p^2}$.

$\Big($Wegen $\sin t=\dfrac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$ kann sich daran auch ausgehend von $L[\mathrm{e}^{at}]=\dfrac{1}{p-a}$ überzeugen:

$$L[\sin t]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(L[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}]-L[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}]\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{p-\mathrm{i}}-\frac{1}{p+\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\,\frac{p+\mathrm{i}-p+\mathrm{i}}{p^2+1}=\frac{1}{p^2+1}.\,)$$

b) $f(t) = \sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

Voraussetzungen des Satzes:

(i) $|f(t)|$ integrierbar über jedem endlichen Intervall $0 \le t \le A$: erfüllt.

(ii) Ex. Konstanten $c \ge 0,\ M > 0$ mit $|f(t)| \le M e^{ct}$ für alle $t \ge 0$:

Wegen $t \ge 0$ und da e^t für reelle t positiv und monton wachsend ist, gilt $|f(t)| = \left|\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right| \le \dfrac{1}{2} e^t$, d.h., die Ungleichung ist mit $M = \dfrac{1}{2},\ c = 1$ erfüllt.

Also existiert die Laplacetransformation wenigstens für alle p mit $\mathrm{Re}(p) > 1$ (Konvergenzhalbebene).

$$\int e^{-pt} \sinh t \,dt = \frac{1}{2} \int e^{-pt} \left(e^t - e^{-t}\right) dt = \frac{1}{2} \int \left(e^{(1-p)t} - e^{(-1-p)t}\right) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(1-p)t}}{1-p} + \frac{e^{(-1-p)t}}{1+p}\right) + D$$

$$L(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \sinh t \,dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-pt} \sinh t \,dt = \frac{1}{2} \lim_{A\to\infty} \left[\frac{e^{(1-p)t}}{1-p} + \frac{e^{(-1-p)t}}{1+p}\right]_0^A$$

Wegen $\mathrm{Re}(p) > 1$ ist $p = p_1 + \mathrm{i}p_2$ mit $1 - p_1 < 0$, daher gilt $\left|e^{(1-p)A}\right| = \left|e^{(1-p_1)A}\right| \cdot \left|e^{-\mathrm{i}p_2 A}\right| = \left|e^{(1-p_1)A}\right| \to 0$ für $A \to \infty$ und daher auch $\lim\limits_{A\to\infty} e^{(1-p)A} = 0$. Erst recht ist dann $-1 - p_1 < 0$, so dass analog auch $\lim\limits_{A\to\infty} e^{(-1-p)A} = 0$ gilt. Damit ergibt sich

$$L[\sinh t] = \int_0^\infty e^{-pt} \sinh t \,dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-p} + \frac{1}{1+p}\right) = -\frac{1+p+1-p}{2(1-p^2)} = \frac{1}{p^2-1}.$$