Aufgabe 22.33

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $\dot{\vec{x}}(t)=\boldsymbol{A}\vec{x}(t)+\vec{F}\sin t,\ \vec{x}(0)=\vec{x}_0$ für $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\-2&0&0\end{pmatrix}$, $\vec{F}=\begin{pmatrix}6\\5\\3\end{pmatrix}$, $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$!

Lösung:

Homogenes System:

$$\begin{vmatrix}-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&0\\-2&0&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(2-\lambda)+4(2-\lambda)=(\lambda^2+4)(2-\lambda)=0,\quad \lambda_{1/2/3}=\pm 2\mathrm{i};\ 2.$$

Zu $\lambda_{1/2}=\pm 2\mathrm{i}$:

$x(t)$ kann in der Form $x(t)=C\cos 2t+D\sin 2t$ angesetzt werden. Die erste Gleichung lautet $\dot{x}=2z$, so dass sich $z(t)=\dot{x}(t)/2=-C\sin 2t+D\cos 2t$ ergibt. $y(t)$ hängt nicht von $x(t)$ und $z(t)$ ab, folglich ist $\vec{x}(t)=C\begin{pmatrix}\cos 2t\\0\\-\sin 2t\end{pmatrix}+D\begin{pmatrix}\sin 2t\\0\\\cos 2t\end{pmatrix}$ die zu dem Eigenwertpaar $\lambda_{1/2}=\pm 2\mathrm{i}$ gehörige Lösung des homogenen Differenzialgleichungssystems.

EV zu $\lambda_3=2$:
$$\begin{array}{rrr}-2&0&2\\0&0&0\\-2&0&-2\\\hline 1&0&-1\\0&0&1\\\hline 1&0&0\\0&0&1\end{array}\qquad \text{EV}\ \ E\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

allgemeine Lösung des homogenen Systems: $\vec{x}(t)=C\begin{pmatrix}\cos 2t\\0\\-\sin 2t\end{pmatrix}+D\begin{pmatrix}\sin 2t\\0\\\cos 2t\end{pmatrix}+E\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}$

Inhomogenes System:

Ansatz: $\vec{x}(t)=\vec{A}\sin t+\vec{B}\cos t,\ \dot{\vec{x}}(t)=\vec{A}\cos t-\vec{B}\sin t$

Einsetzen in inhomogenes System:

$$\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\cos t-\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}\sin t=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\-2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\sin t+\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\-2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}6\\5\\3\end{pmatrix}\sin t$$

$$\begin{pmatrix}A_1\cos t-B_1\sin t\\A_2\cos t-B_2\sin t\\A_3\cos t-B_3\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2A_3\sin t+2B_3\cos t+6\sin t\\2A_2\sin t+2B_2\cos t+5\sin t\\-2A_1\sin t-2B_1\cos t+3\sin t\end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lrcl}
\sin t: & -B_1 &=& 2A_3+6\\
\cos t: & A_1 &=& 2B_3\\
\sin t: & -B_2 &=& 2A_2+5\\
\cos t: & A_2 &=& 2B_2\\
\sin t: & -B_3 &=& -2A_1+3\\
\cos t: & A_3 &=& -2B_1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & -2A_3 & -B_1 & & & =6\\
A_1 & & & & & -2B_3 & =0\\
 & -2A_2 & & & -B_2 & & =5\\
 & A_2 & & & -2B_2 & & =0\\
2A_1 & & & & & -B_3 & =3\\
 & & A_3 & +2B_1 & & & =0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 6\\
0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5\\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3\\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6\\
0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 5\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3\\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

spezielle Lösung des inhomogenen Systems: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\\ -2\\ -4 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 1 \end{pmatrix} \cos t$

allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$\vec{x}(t) = C\begin{pmatrix} \cos 2t\\ 0\\ -\sin 2t \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} \sin 2t\\ 0\\ \cos 2t \end{pmatrix} + E\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \begin{pmatrix} 2\\ -2\\ -4 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 1 \end{pmatrix} \cos t$$

Anfangsbedingung:

$$\vec{x}(0) = C\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} + E\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\ 1\\ -2 \end{pmatrix}
\qquad
\begin{array}{rl}
C+2 = 3, & C = 1\\
E-1 = 1, & E = 2\\
D+1 = -2, & D = -3
\end{array}$$

Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t\\ 0\\ -\sin 2t \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} \sin 2t\\ 0\\ \cos 2t \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \begin{pmatrix} 2\\ -2\\ -4 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 1 \end{pmatrix} \cos t$$