Aufgabe 22.31

Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem
$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + y - 2\\ \dot{y} &= x - 3y + z + 1\\ \dot{z} &= 13x - 12y + 6z - 1\end{aligned} \quad !$$

Lösung:

Homogenes Differenzialgleichungssystem:
$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + y\\ \dot{y} &= x - 3y + z\\ \dot{z} &= 13x - 12y + 6z\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 1 \\ 13 & -12 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda)(6-\lambda)+13+12(2-\lambda)-(6-\lambda)$$
$$=(\lambda^2-8\lambda+12)(-3-\lambda)+13+24-12\lambda-6+\lambda$$
$$=-3\lambda^2+24\lambda-36-\lambda^3+8\lambda^2-12\lambda+31-11\lambda=-\lambda^3+5\lambda^2+\lambda-5=0$$

Offensichtlich ist $\lambda_1=1$ eine Nullstelle dieses Polynoms.

$$(\lambda^3-5\lambda^2-\lambda+5):(\lambda-1)=\lambda^2-4\lambda-5, \quad \lambda_{2/3}=2\pm\sqrt{4+5}=2\pm 3=-1,5$$
$$\begin{array}{l} \underline{\lambda^3-\lambda^2} \\ \quad -4\lambda^2-\lambda+5 \\ \quad \underline{-4\lambda^2+4\lambda} \\ \qquad\quad -5\lambda+5 \\ \qquad\quad \underline{-5\lambda+5} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

EV zu $\lambda_1=1$

$$\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 13 & -12 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -25 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{array}$$

$$x_1+x_2=0, \quad x_1=-x_2$$
$$-5x_2+x_3=0, \quad x_3=5x_2$$

EV $C\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2=-1$

$$\begin{array}{rrr} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 13 & -12 & 7 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 13 & -12 & 7 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 14 & -6 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{3} & 1 \\ \hline 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & 1 \end{array}$$

$$x_1+\tfrac{1}{3}x_2=0, \quad x_1=-\tfrac{1}{3}x_2$$
$$-\tfrac{7}{3}x_2+x_3=0, \quad x_3=\tfrac{7}{3}x_2$$

EV $\widetilde{D}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\\frac{7}{3}\end{pmatrix}=D\begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_3=5$

$$\begin{array}{rrr} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 1 \\ 13 & -12 & 1 \\ \hline 1 & -8 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 13 & -12 & 1 \\ \hline 1 & -8 & 1 \\ 0 & -23 & 3 \\ 0 & 92 & -12 \\ \hline 1 & -8 & 1 \\ 0 & -\frac{23}{3} & 1 \\ \hline 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{23}{3} & 1 \end{array}$$

$$x_1-\tfrac{1}{3}x_2=0, \quad x_1=\tfrac{1}{3}x_2$$
$$-\tfrac{23}{3}x_2+x_3=0, \quad x_3=\tfrac{23}{3}x_2$$

EV $\widetilde{E}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\\\frac{23}{3}\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}1\\3\\23\end{pmatrix}$

allgemeine Lösung des homogenen Dgl.systems: $\vec{x}(t)=C\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}e^t+D\begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix}e^{-t}+E\begin{pmatrix}1\\3\\23\end{pmatrix}e^{5t}$

Inhomogenes Differenzialgleichungssystem:

„rechte Seite“: $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Ansatz für spez. Lsg. in Form der rechten Seite: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$

Einsetzen in das inhomogene Differenzialgleichungssystem ergibt wegen $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{0}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= 2A_1 + A_2 - 2 \\ 0 &= A_1 - 3A_2 + A_3 + 1 \\ 0 &= 13A_1 - 12A_2 + 6A_3 - 1 \; . \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 13 & -12 & 6 & 1 \\ \hline 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 13 & -12 & 6 & 1 \\ \hline 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 & 4 \\ 0 & 27 & -7 & 14 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 1 & -2 \\ 0 & 27 & -7 & 14 \\ \hline 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ \hline 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Somit ergibt sich als spezielle Lösung des inhomogenen Dgl.systems $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

und als allgemeine Lösung $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + D \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + E \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 23 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}$, d.h.

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - C\mathrm{e}^{t} - D\mathrm{e}^{-t} + E\mathrm{e}^{5t}, \\ y(t) &= C\mathrm{e}^{t} + 3D\mathrm{e}^{-t} + 3E\mathrm{e}^{5t}, \\ z(t) &= -2 + 5C\mathrm{e}^{t} + 7D\mathrm{e}^{-t} + 23E\mathrm{e}^{5t}. \end{aligned}$$