Aufgabe 22.30

Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem $\begin{aligned}\dot{x} &= -4x-9y-1\\ \dot{y} &= 3x+8y+2\end{aligned}$!

Lösung:

Homogenes Differenzialgleichungssystem: $\begin{aligned}\dot{x} &= -4x-9y\\ \dot{y} &= 3x+8y\end{aligned}$

$$\begin{vmatrix}-4-\lambda & -9\\ 3 & 8-\lambda\end{vmatrix} = (-4-\lambda)(8-\lambda)+27 = -32-4\lambda+\lambda^2+27 = \lambda^2-4\lambda-5 = 0,$$
$$\lambda_{1/2} = 2\pm\sqrt{4+5} = \begin{cases}5\\ -1\end{cases}$$

EV zu $\lambda_1 = 5$: $\begin{array}{rr}-9 & -9\\ 3 & 3\\ \hline 1 & 1\end{array}$ EV $C\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2 = -1$: $\begin{array}{rr}-3 & -9\\ 3 & 9\\ \hline 1 & 3\end{array}$ EV $D\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}$

allgemeine Lösung des homogenen Dgl.systems: $\vec{x}(t) = C\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{5t} + D\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}$

Inhomogenes Differenzialgleichungssystem:

„rechte Seite“: $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$, Ansatz für spez. Lsg. in Form der rechten Seite: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}$

Einsetzen in das inhomogene Differenzialgleichungssystem ergibt wegen $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{0}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
0 &= -4A_1 - 9A_2 - 1 \quad |\cdot 3\\
0 &= 3A_1 + 8A_2 + 2 \quad |\cdot 4\\[4pt]
0 &= -12A_1 - 27A_2 - 3 \quad |+\\
0 &= 12A_1 + 32A_2 + 8 \quad |+\\[4pt]
0 &= 5A_2 + 5, \qquad A_2 = -1,\ \ 4A_1 = -9A_2 - 1 = 8,\ \ A_1 = 2
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich als spezielle Lösung des inhomogenen Dgl.systems $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$ und

als allgemeine Lösung $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} + C\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{5t} + D\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}$, d.h. $\begin{aligned}x(t) &= 2 - C\mathrm{e}^{5t} - 3D\mathrm{e}^{-t},\\ y(t) &= -1 + C\mathrm{e}^{5t} + D\mathrm{e}^{-t}.\end{aligned}$