Aufgabe 22.29

Wenden Sie die Methode des Ansatzes vom Typ der rechten Seite auf die Differenzialgleichungssysteme a) $\begin{array}{l}\dot{x}=2x+2y-\ \ 4\\ \dot{y}=3x+\ \ y-10\end{array}$ und b) $\begin{array}{l}\dot{x}=2x+2y-\ \ 4\\ \dot{y}=\ \ x+\ \ y-10\end{array}$ an! Was stellen Sie fest?

Lösung:

a) **homogen:** $\begin{array}{l}\dot{x}=2x+2y\\ \dot{y}=3x+\ \ y\end{array}$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 2\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)-6=\lambda^2-3\lambda-4=0,\qquad \lambda_{1/2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}}=\begin{cases}4\\-1\end{cases}$$

EV zu $\lambda_1=4$: $\begin{array}{rr}-2 & 2\\ 3 & -3\\ \hline 1 & -1\\ 0 & 0\end{array}$ EV $C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2=-1$: $\begin{array}{rr}3 & 2\\ 3 & 2\\ \hline 3 & 2\\ 0 & 0\end{array}$ EV $D\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

allgemeine Lösung des homogenen Dgl.systems: $\vec{x}=C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{4t}+D\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}$

inhomogen:

Inhomogenität („rechte Seite“): $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}-4\\-10\end{pmatrix}$, Ansatz: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$, $\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Einsetzen in inhomogenes Dgl.system:

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-10\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcll}2A_1+2A_2 &=& 4 & \quad\mid -\\ 3A_1+\ \ A_2 &=& 10 & \mid\cdot 2\\ 6A_1+2A_2 &=& 20 & \quad\mid +\\ 4A_1 &=& 16 & \qquad A_1=4,\ A_2=-2\end{array}$$

spezielle Lösung des inhomogenen Dgl.systems: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

allgemeine Lösung des inhomogenen Dgl.systems: $\vec{x}=C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{4t}+D\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}+\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$,

d.h. $\begin{array}{l}x(t)=C\mathrm{e}^{4t}-2D\mathrm{e}^{-t}+4\\ y(t)=C\mathrm{e}^{4t}+3D\mathrm{e}^{-t}-2\end{array}$

b) **homogen:** $\begin{array}{l}\dot{x}=2x+2y\\ \dot{y}=\ \ x+\ \ y\end{array}$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 2\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)-2=\lambda^2-3\lambda=\lambda(\lambda-3)=0,\qquad \lambda_{1/2}=\begin{cases}3\\0\end{cases}$$

EV zu $\lambda_1=3$: $\begin{array}{rr}-1 & 2\\ 1 & -2\\ \hline 1 & -2\\ 0 & 0\end{array}$ EV $C\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2=0$: $\begin{array}{rr}2 & 2\\ 1 & 1\\ \hline 1 & 1\\ 0 & 0\end{array}$ EV $D\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

allgemeine Lösung des homogenen Dgl.systems: $\vec{x}=C\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{3t}+D\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

inhomogen:

Inhomogenität („rechte Seite“): $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$, Ansatz: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Einsetzen in inhomogenes Dgl.system:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2A_1 + 2A_2 &= 4 \quad &&| - \\ A_1 + A_2 &= 10 \quad &&| \cdot 2 \\ 2A_1 + 2A_2 &= 20 \quad &&| + \\ 0 &= 16, \quad &&\text{Widerspruch, GS unlösbar} \end{aligned}$$

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Differenzialgleichungssystems kann also in diesem Fall nicht einfach in Form der rechten Seite gesucht werden.

Es liegt der Resonanzfall vor. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Differenzialgleichungssystems lautet $\vec{x}(t) = C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + D \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 16t + 14 \\ -16t \end{pmatrix}$.