Aufgabe 22.26

Lösen Sie das inhomogene System $\begin{array}{l} \dot{x}-2x-8y=5\mathrm{e}^t \\ \dot{y}-3x+8y=-18\mathrm{e}^t \end{array}$!

Lösung:

Das zugehörige **homogene Differenzialgleichungssystem** $\begin{array}{l} \dot{x}-2x-8y=0 \\ \dot{y}-3x+8y=0 \end{array}$ wurde bereits als Aufgabe 22.1 gelöst: Das charakteristische Polynom hat die Nullstellen -10 und 4, allgemeine Lösung ist $\vec{x}_{\text{hom}}(t)=C\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-10t}+D\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{4t}$.

Inhomogenes System: rechte Seite: $\begin{pmatrix}5\\-18\end{pmatrix}\mathrm{e}^t$, $\lambda=1$, keine NS d. char. Pol. $\longrightarrow$ keine Resonanz

Ansatz: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^t$, $\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^t$

$$\dot{\vec{x}}(t)-\begin{pmatrix}2&8\\3&-8\end{pmatrix}\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^t-\begin{pmatrix}2&8\\3&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^t=\begin{pmatrix}a_1-2a_1-8a_2\\a_2-3a_1+8a_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^t=\begin{pmatrix}5\\-18\end{pmatrix}\mathrm{e}^t$$

$$\begin{array}{rcll}
-\ a_1-\ 8a_2 &=& 5 & |\cdot(-3) \\
-3a_1+\ 9a_2 &=& -18 & |+ \\
3a_1+24a_2 &=& -15 & |+ \\
33a_2 &=& -33, & a_2=-1,\ a_1=-8a_2-5=3
\end{array}$$

spezielle Lösung des inhomogenen Systems: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^t$

allgemeine Lösung der inhomogenen Systems: $\vec{x}_{\text{inhom}}(t)=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^t+C\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-10t}+D\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{4t}$