Aufgabe 22.24

Lösen Sie das inhomogene System $\begin{aligned} \dot{x} &= -2y + \mathrm{e}^{3t} \\ \dot{y} &= -2x + 4\mathrm{e}^{3t} \end{aligned}$!

Lösung:

Analog skalarem Fall: Zunächst homogene Gleichung lösen,
anschließend Störgliedansatz oder Variation der Konstanten.

homogen: $\begin{aligned} \dot{x} &= -2y \\ \dot{y} &= -2x \end{aligned}$ $\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0, \quad \lambda_{1/2} = 2; -2$

EV zu $\lambda_1 = 2$: $\begin{matrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{matrix}$ EV $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ EV zu $\lambda_2 = -2$: $\begin{matrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{matrix}$ EV $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}_{\mathrm{hom}}(t) = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}$$

Lösung des inhomogenen Systems mit Variation der Konstanten mit Lösungsansatz in Form der rechten Seite („Störgliedansatz“)

Hierbei macht man sich zu Nutze, dass, wie schon bei den linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung behandelt, für lineare Differenzialgleichungssysteme (analog zur Lösung linearer Gleichungssysteme) immer gilt:

allg. Lsg. d. inhom. Syst. = allg. Lsg. d. hom. Syst. + spezielle Lsg. d. inhom. Syst.

Man muss also nur noch (gleich auf welchem Wege) irgendeine spezielle Lösung des inhomogenen Differenzialgleichungssystems bestimmen. Addiert man dazu dann die allgemeine Lösung des homogenen Differenzialgleichungssystems, so ergibt sich die allgemeine Lösung des inhomogenen Differenzialgleichungssystems.

Beim Differenzieren von $\mathrm{e}^{\alpha t}$ entsteht immer wieder diese Funktion (multipliziert mit Konstanten). Deshalb kann man bei inhomogenen linearen Differenzialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten

für rechte Seiten (gemeint sind die absoluten Glieder) der Form $\vec{E}\mathrm{e}^{\alpha t}$
eine spezielle Lösung in der Form der rechten Seite, d.h. mit dem Ansatz $x = \vec{A}\mathrm{e}^{\alpha t}$,

suchen.

Ein analoger Ansatz kann übrigens auch für rechte Seiten der Form $\vec{E}\cos\alpha t + \vec{F}\sin\alpha t$ und auch für mit Polynomen multiplizierte trigonometrische und Exponentialfunktionen vorgenommen werden.

Inhomogenes System: $\begin{aligned} \dot{x} + 2y &= \mathrm{e}^{3t} \\ \dot{y} + 2x &= 4\mathrm{e}^{3t} \end{aligned}$

Ansatz in Form der rechten Seite: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{A}\mathrm{e}^{3t} = \begin{pmatrix} A\mathrm{e}^{3t} \\ B\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \dot{x} + 2y &= 3A\mathrm{e}^{3t} + 2B\mathrm{e}^{3t} = \mathrm{e}^{3t} \qquad & 3A + 2B &= 1 \ | \cdot 3 \qquad & 9A + 6B &= 3 \ | + \\ \dot{y} + 2x &= 3B\mathrm{e}^{3t} + 2A\mathrm{e}^{3t} = 4\mathrm{e}^{3t} \qquad & 2A + 3B &= 4 \ | \cdot 2 \qquad & 4A + 6B &= 8 \ | - \qquad 5A = -5 \end{aligned}$$

$$A = -1, \ 2B = 1 - 3A = 4, \ B = 2$$

Somit ergibt sich als spezielle Lösung des inhomogenen Systems $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}$. Addiert man dazu die allgemeine Lösung des homogenen Systems, so erhält man die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$\underline{\underline{\vec{x}_{\text{inhom}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}.}}$$

Probe:

$$\begin{aligned} x &= -\mathrm{e}^{3t} + C\mathrm{e}^{2t} + D\mathrm{e}^{-2t}, & \dot{x} &= -3\mathrm{e}^{3t} + 2C\mathrm{e}^{2t} - 2D\mathrm{e}^{-2t} = -2y + \mathrm{e}^{3t} = -4\mathrm{e}^{3t} + 2C\mathrm{e}^{2t} - 2D\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{3t} \\ y &= 2\mathrm{e}^{3t} - C\mathrm{e}^{2t} + D\mathrm{e}^{-2t}, & \dot{y} &= 6\mathrm{e}^{3t} - 2C\mathrm{e}^{2t} - 2D\mathrm{e}^{-2t} = -2x + 4\mathrm{e}^{3t} = 2\mathrm{e}^{3t} - 2C\mathrm{e}^{2t} - 2D\mathrm{e}^{-2t} + 4\mathrm{e}^{3t} \end{aligned}$$

Lösung des inhomogenen Systems mit Variation der Konstanten

(Diese Methode ist im Allgemeinen viel aufwändiger als die des Störgliedansatzes. Wenn dieser Lösungsansatz in Form der rechten Seite angewendet werden kann, d.h., wenn die rechte Seite eine dafür geeignete Form hat, sollte er bevorzugt werden.)

Ansatz $\vec{x}(t) = C(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + D(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{C}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + 2C(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \dot{D}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} - 2D(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = -2 \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}$$

$$\begin{aligned} \dot{C}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + 2C(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \dot{D}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} - 2D(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ = -2C(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} - 2D(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \end{aligned}$$

$$\dot{C}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \dot{D}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}$$

Damit liegt ein Gleichungssystem für die skalaren Funktionen $C(t)$ und $D(t)$ vor:

$$\left.\begin{aligned} \dot{C}(t)\mathrm{e}^{2t} + \dot{D}(t)\mathrm{e}^{-2t} &= \mathrm{e}^{3t} \\ -\dot{C}(t)\mathrm{e}^{2t} + \dot{D}(t)\mathrm{e}^{-2t} &= 4\mathrm{e}^{3t} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 2\dot{C}(t)\mathrm{e}^{2t} &= -3\mathrm{e}^{3t}, & \dot{C}(t) &= -\tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{t}, & C(t) &= -\tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{t} + E \\ 2\dot{D}(t)\mathrm{e}^{-2t} &= 5\mathrm{e}^{3t}, & \dot{D}(t) &= \tfrac{5}{2}\mathrm{e}^{5t}, & D(t) &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{5t} + F \end{aligned}$$

Einsetzen der ermittelten Funktionen $C(t)$ und $D(t)$ in den Ansatz ergibt

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \left(-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{t} + E\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{5t} + F\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ &= \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + E \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + E \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}.}} \end{aligned}$$