Aufgabe 22.20

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $\begin{aligned}\dot{x}&=\quad 2y\\ \dot{y}&=3x-5y\\ \dot{z}&=2x-4y+z\\ x(0)&=3,\ y(0)=-2,\ z(0)=-1\end{aligned}$!

Lösung:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & 0\\ 3 & -5-\lambda & 0\\ 2 & -4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 2\\ 3 & -5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2+5\lambda-6)=0$$

$$\lambda_1=1,\ \ \lambda_{2/3}=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{24}{4}}=-\frac{5}{2}\pm\frac{7}{2}=\begin{cases}1\\ -6\end{cases}$$

EV zu $\lambda_{1/2}=1$:

$$\begin{array}{ccc}1&-2&0\\3&-6&0\\2&-4&0\\\hline 1&-2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{array}$$

$x_1-2x_2=0,\ x_1=2x_2,$ $x_2=C, x_3=D$

EV: $C\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\ D\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_3=-6$:

$$\begin{array}{ccc}6&2&0\\3&1&0\\2&-4&7\\\hline 3&1&0\\0&0&0\\14&0&7\\\hline 3&1&0\\2&0&1\\0&0&0\end{array}$$

$3x_1+x_2=0,\ x_2=-3x_1$
$2x_1+x_3=0,\ x_3=-2x_1$

EV: $E\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

$$\vec{x}(t)=C\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^t+D\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^t+E\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-6t},\ \ \vec{x}(0)=C\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+D\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+E\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c}2&0&-1&3\\1&0&3&-2\\0&1&2&-1\\\hline 1&0&3&-2\\0&1&2&-1\\2&0&-1&3\end{array}\qquad\begin{array}{ccc|c}1&0&3&-2\\0&1&2&-1\\0&0&-7&7\\\hline 1&0&3&-2\\0&1&2&-1\\0&0&1&-1\end{array}\qquad\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{array}$$

$$\underline{\underline{\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^t+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^t-\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-6t}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^t+\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-6t}}},\ \text{d.h.}\quad\begin{aligned}x(t)&=2\mathrm{e}^t+\ \mathrm{e}^{-6t}\\ y(t)&=\ \mathrm{e}^t-3\mathrm{e}^{-6t}\\ z(t)&=\ \mathrm{e}^t-2\mathrm{e}^{-6t}\end{aligned}$$