Aufgabe 22.19

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe
$$\begin{array}{ll} \dot{x}(t) = \phantom{x(t) +{}} y(t) + z(t), & x(0) = 2 \\ \dot{y}(t) = x(t) \phantom{{}+y(t)} + z(t), & y(0) = 1 \\ \dot{z}(t) = x(t) + y(t) \phantom{{}+z(t)}\;, & z(0) = 6 \quad ! \end{array}$$

Lösung:

Das gegebene lineare Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (ohne die Anfangsbedingungen) ist auch in Aufgabe 22.13b) zu lösen:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad (\lambda^3 - 3\lambda - 2) : (\lambda + 1) = \lambda^2 - \lambda - 2$$
$$\begin{array}{l} \lambda^3 + \lambda^2 \\ \hline -\lambda^2 - 3\lambda - 2 \\ -\lambda^2 - \lambda \\ \hline -2\lambda - 2 \end{array}$$

$$\lambda_{2/3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = -1;\ 2$$

Eigenvektoren

zu $\lambda_{1/2} = -1$:
$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$a + b + c = 0,\ a = -b - c$

zwei linear unabhängige EV $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu $\lambda_3 = 2$:
$$\begin{array}{rrr} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}$$

$a - c = 0,\ b - c = 0,\ a = b = c$

EV $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + D \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + E \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}$$

Zu einem doppelten Eigenwert werden zwei linear unabhängige Lösungen benötigt. Hier existieren zwei linear unabhängige Eigenvektoren. Wäre das nicht der Fall, so müssten weitere Lösungen mit dem Ansatz $\vec{x}(t) = (\vec{c} + \vec{d}\,t)\mathrm{e}^{\lambda t} = (\vec{c} + \vec{d}\,t)\mathrm{e}^{t}$ („innere Resonanz“) bestimmt werden (s. z.B. Aufgabe 22.13c)).

Anfangsbedingung: $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} -C-D+E \\ C \quad\quad +E \\ \quad\quad D+E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

$C=-2, D=3, E=3$, also $\vec{x}=-2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}+3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}+3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}+\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}$

$x(t) = -\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{2t}$
$y(t) = -2\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{2t}$
$z(t) = 3\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{2t}$ Probe: stimmt