Aufgabe 22.18

Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung des Differenzialgleichungssystems $\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -4x \end{aligned}$!

Lösung:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+4=0, \quad \lambda_{1/2}=\pm 2\mathrm{i}$$

Am einfachsten lässt sich die Lösung des homogenen Differenzialgleichungssystems durch Berechnung der einen aus der anderen Komponente bestimmen. Wegen $\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}t}=\cos 2t \pm \mathrm{i}\sin 2t$ muss $x(t)$ die Form $x(t)=C\sin 2t+D\cos 2t$ haben. Nach der ersten Gleichung des homogenen Differenzialgleichungssystems gilt dann $y(t)=\dot{x}(t)=2C\cos 2t-2D\sin 2t$.

Also lautet die allgemeine Lösung des gegebenen homogenen Differenzialgleichungssystems

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}+D\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Man kann auch die Eigenvektoren und aus diesen zunächst die allgemeine komplexe Lösung des Differenzialgleichungssystems ermitteln:

EV zu EW $\lambda_1=2\mathrm{i}$: $\begin{array}{cc} -2\mathrm{i} & 1 \\ -4 & -2\mathrm{i} \\ \hline -2\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$ EV $\begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_2=-2\mathrm{i}$: $\begin{array}{cc} 2\mathrm{i} & 1 \\ -4 & 2\mathrm{i} \\ \hline 2\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$ EV $\begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$

allgemeine komplexe Lösung des homogenen Dgl.systems:

$$\vec{x}_{\mathrm{hom}}(t)=C\begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+D\begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}, \quad C,D \text{ beliebig komplex}$$

Für das reelle Differenzialgleichungssystem werden aber reelle Lösungen gesucht. Deshalb muss ermittelt werden, wie die komplexen Koeffizienten C und D zu wählen sind, damit reelle Lösungen entstehen.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}$ sind zueinander konjugiert komplex. Die Summe einer komplexen Zahl und der zu ihr konjugiert komplexen Zahl ist reell. Wählt man deshalb nun auch noch C und D konjugiert komplex zueinander, d.h. $C=A+B\mathrm{i}$, $D=\overline{C}=A-B\mathrm{i}$, so entsteht eine reelle Lösung:

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t)&=(A+B\mathrm{i})\begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+(A-B\mathrm{i})\begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} \\
&=\begin{pmatrix} A+B\mathrm{i} \\ 2A\mathrm{i}-2B \end{pmatrix}(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)+\begin{pmatrix} A-B\mathrm{i} \\ -2A\mathrm{i}-2B \end{pmatrix}(\cos 2t-\mathrm{i}\sin 2t) \\
&=\begin{pmatrix} A\cos 2t+A\mathrm{i}\sin 2t+B\mathrm{i}\cos 2t-B\sin 2t+A\cos 2t-A\mathrm{i}\sin 2t-B\mathrm{i}\cos 2t-B\sin 2t \\ 2A\mathrm{i}\cos 2t-2A\sin 2t-2B\cos 2t-2B\mathrm{i}\sin 2t-2A\mathrm{i}\cos 2t-2A\sin 2t-2B\cos 2t+2B\mathrm{i}\sin 2t \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} 2A\cos 2t-2B\sin 2t \\ -4A\sin 2t-4B\cos 2t \end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix}-2B\begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}=D\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix}+C\begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wobei der Einfachheit halber die beliebigen reellen Konstanten wieder mit C und D bezeichnet wurden. Dabei ist jetzt $C=-2B$ und $D=2A$.