Aufgabe 22.17

Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung des Differenzialgleichungssystems $\begin{aligned}\dot{x} &= -y\\ \dot{y} &= x\end{aligned}$!

Lösung:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1 = 0, \quad \lambda_{1/2} = \pm\mathrm{i}$$

Am einfachsten lässt sich die Lösung des homogenen Differenzialgleichungssystems durch Berechnung der einen aus der anderen Komponente bestimmen. Wegen $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t} = \cos t \pm \mathrm{i}\sin t$ muss $y(t)$ die Form $y(t) = C\sin t + D\cos t$ haben. Nach der zweiten Gleichung des homogenen Differenzialgleichungssystems gilt dann $x(t) = \dot{y}(t) = C\cos t - D\sin t$.

Also lautet die allgemeine Lösung des gegebenen homogenen Differenzialgleichungssystems

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Man kann auch die Eigenvektoren und aus diesen zunächst die allgemeine komplexe Lösung des Differenzialgleichungssystems ermitteln:

EV zu EW $\lambda_1 = \mathrm{i}$: $\begin{array}{cc} -\mathrm{i} & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} \\ \hline 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{array}$ EV $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_2 = -\mathrm{i}$: $\begin{array}{cc} \mathrm{i} & -1 \\ 1 & \mathrm{i} \\ \hline 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{array}$ EV $\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$

allgemeine komplexe Lösung des homogenen Dgl.systems:

$$\vec{x}_{\text{hom}}(t) = C\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + D\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}, \quad C, D \text{ beliebig komplex}$$

Für das reelle Differenzialgleichungssystem werden aber reelle Lösungen gesucht. Deshalb muss ermittelt werden, wie die komplexen Koeffizienten C und D zu wählen sind, damit reelle Lösungen entstehen.

$\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ und $\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ sind zueinander konjugiert komplex. Die Summe einer komplexen Zahl und der zu ihr konjugiert komplexen Zahl ist reell. Wählt man deshalb nun auch noch C und D konjugiert komplex zueinander, d.h. $C = A + B\mathrm{i}$, $D = \overline{C} = A - B\mathrm{i}$, so entsteht eine reelle Lösung:

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= (A+B\mathrm{i})\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + (A-B\mathrm{i})\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \\
&= \begin{pmatrix} A\mathrm{i}-B \\ A+B\mathrm{i} \end{pmatrix}(\cos t + \mathrm{i}\sin t) + \begin{pmatrix} -A\mathrm{i}-B \\ A-B\mathrm{i} \end{pmatrix}(\cos t - \mathrm{i}\sin t) \\
&= \begin{pmatrix} A\mathrm{i}\cos t - A\sin t - B\cos t - B\mathrm{i}\sin t - A\mathrm{i}\cos t - A\sin t - B\cos t + B\mathrm{i}\sin t \\ A\cos t + A\mathrm{i}\sin t + B\mathrm{i}\cos t - B\sin t + A\cos t - A\mathrm{i}\sin t - B\mathrm{i}\cos t - B\sin t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2A\sin t - 2B\cos t \\ 2A\cos t - 2B\sin t \end{pmatrix} = 2A\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} - 2B\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wobei der Einfachheit halber die beliebigen reellen Konstanten wieder mit C und D bezeichnet wurden. Dabei ist jetzt $C = -2B$ und $D = 2A$.