

Aufgabe 22.14

Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem $\dot{x} = x+2y+4z$
 $\dot{y} = y$
 $\dot{z} = 2x - z$!

Lösung:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda)-8] = (1-\lambda)(\lambda^2-1-8) \\ = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+3) = 0, \quad \lambda_{1/2/3} = 1; 3; -3$$

EV zu EW $\lambda_1 = 1$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$$

EV $C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_2 = 3$

$$\begin{array}{ccc} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

EV $D \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_3 = -3$

$$\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

EV $E \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

allgemeine Lösung des Dgl.systems: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + D \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + E \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$