Aufgabe 22.12

Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $\begin{aligned}\dot{x} &= x+5y \\ \dot{y} &= -x-3y\end{aligned}$!

Lösung:

$$\dot{\vec{x}} = \boldsymbol{A}\vec{x}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda^2)(-3-\lambda)+5 = \lambda^2+2\lambda+2 = 0, \quad \lambda_{1/2} = -1+\sqrt{1-2} = -1\pm\mathrm{i}$$

Am einfachsten lässt sich die Lösung des homogenen Differenzialgleichungssystems durch Berechnung der einen aus der anderen Komponente bestimmen. Wegen $\mathrm{e}^{(-1\pm\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^{-t}\cos t + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-t}\sin t$, muss $y(t)$ die Form $y(t) = E\mathrm{e}^{-t}\cos t + F\mathrm{e}^{-t}\sin t$ haben. Nach der ersten Gleichung des homogenen Differenzialgleichungssystems gilt dann

$$\begin{aligned} x(t) &= -\dot{y}(t)-3y(t) = E\mathrm{e}^{-t}\cos t + E\mathrm{e}^{-t}\sin t + F\mathrm{e}^{-t}\sin t - F\mathrm{e}^{-t}\cos t - 3E\mathrm{e}^{-t}\cos t - 3F\mathrm{e}^{-t}\sin t \\ &= E\mathrm{e}^{-t}(-2\cos t + \sin t) + F(\mathrm{e}^{-t}(-\cos t - 2\sin t). \end{aligned}$$

Also lautet die allgemeine Lösung des gegebenen homogenen Differenzialgleichungssystems

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = E\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} -2\cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + F\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} -\cos t - 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Man kann auch die Eigenvektoren und aus diesen zunächst die allgemeine komplexe Lösung des Differenzialgleichungssystems ermitteln:

EV zu EW $\lambda_1 = -1+\mathrm{i}$:
$$\begin{array}{cc} -2-\mathrm{i} & 5 \\ -1 & -2-\mathrm{i} \\ \hline 1 & 2+\mathrm{i} \\ (2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) & 5(2+\mathrm{i}) \\ \hline 1 & 2+\mathrm{i} \\ 5 & 5(2+\mathrm{i}) \\ \hline 1 & 2+\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{array} \qquad \text{EV } A\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}$$

EV zu EW $\lambda_2 = -1-\mathrm{i}$: desgl. konjugiert komplex, $\quad$ EV $B\begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}$

allgemeine komplexe Lösung des homogenen Dgl.systems:

$$\vec{x}(t) = A\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t} + B\begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})t}, \quad A, B \text{ beliebig komplex}$$

Für das reelle Differenzialgleichungssystem werden aber reelle Lösungen gesucht. Deshalb muss ermittelt werden, wie die komplexen Koeffizienten A und B zu wählen sind, damit reelle Lösungen entstehen.

$\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}$ und $\begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})t}$ sind zueinander konjugiert komplex. Die Summe einer komplexen Zahl und der zu ihr konjugiert komplexen Zahl ist reell. Wählt man deshalb nun auch noch A und B konjugiert komplex zueinander, d.h. $A = C + D\mathrm{i}$, $B = \overline{A} = C - D\mathrm{i}$, so entsteht die allgemeine reelle Lösung:

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= (C+D\mathrm{i})\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t} + (C-D\mathrm{i})\begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})t} \\
&= C\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 4\cos t - 2\sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + D\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} -2\cos t - 4\sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}, \\
&= E\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} -2\cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + F\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} -\cos t - 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{wie oben.}
\end{aligned}$$