Aufgabe 22.8

a) Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung des Systems $\begin{aligned}\dot{x} &= -x + 4y \\ \dot{y} &= -2x + 3y\end{aligned}$!

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, für die $x(0)=3$ und $y(0)=5$ gilt!

Lösung:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -3-2\lambda+\lambda^2+8 = \lambda^2-2\lambda+5=0, \quad \lambda_{1/2}=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm 2\mathrm{i}$$

EV zu $1+2\mathrm{i}$:

$$\begin{array}{cc|l} -2-2\mathrm{i} & 4 & \\ -2 & 2-2\mathrm{i} & \mid :(-2),\ \text{Zeilen tauschen} \\ \hline 1 & -1+\mathrm{i} & \\ -2-2\mathrm{i} & 4 & \mid \mathrm{II}+(2+2\mathrm{i})\mathrm{I} \\ \hline 1 & -1+\mathrm{i} & \quad x_1-(1-\mathrm{i})x_2=0 \qquad \text{EV } C\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & \end{array}$$

EV zu $1-2\mathrm{i}$:

$$\begin{array}{cc|l} -2+2\mathrm{i} & 4 & \\ -2 & 2+2\mathrm{i} & \mid :(-2),\ \text{Zeilen tauschen} \\ \hline 1 & -1-\mathrm{i} & \\ -2+2\mathrm{i} & 4 & \mid \mathrm{II}+(2-2\mathrm{i})\mathrm{I} \\ \hline 1 & -1-\mathrm{i} & \quad x_1-(1+\mathrm{i})x_2=0 \qquad \text{EV } D\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & \end{array}$$

allgemeine komplexe Lösung: $\vec{x}(t) = C\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t} + D\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}$

2 Wege zur Berechnung der allgemeinen reellen Lösung:

I. Bechnung aus den komplexen Eigenvektoren:

Setzen $C=A+B\mathrm{i}$, $D=\overline{C}=A-B\mathrm{i}$

$$\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t\left((A+B\mathrm{i})\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t) + (A-B\mathrm{i})\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}(\cos 2t-\mathrm{i}\sin 2t)\right)$$

$$= \mathrm{e}^t\left(\begin{pmatrix} (A+B)-(A-B)\mathrm{i} \\ A+B\mathrm{i} \end{pmatrix}(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t) + \begin{pmatrix} (A+B)+(A-B)\mathrm{i} \\ A-B\mathrm{i} \end{pmatrix}(\cos 2t-\mathrm{i}\sin 2t)\right)$$

$$= \mathrm{e}^t\Bigg(\begin{pmatrix} (A+B)\cos 2t+(A-B)\sin 2t+\mathrm{i}\,((A+B)\sin 2t-(A-B)\cos 2t)) \\ A\cos 2t-B\sin 2t+\mathrm{i}\,(A\sin 2t+B\cos 2t) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} (A+B)\cos 2t+(A-B)\sin 2t+\mathrm{i}\,(-(A+B)\sin 2t+(A-B)\cos 2t)) \\ A\cos 2t-B\sin 2t+\mathrm{i}\,(-A\sin 2t-B\cos 2t) \end{pmatrix}\Bigg)$$

$$= \mathrm{e}^t\begin{pmatrix} (2A+2B)\cos 2t+(2A-2B)\sin 2t \\ 2A\cos 2t-2B\sin 2t \end{pmatrix} = \left(2A\begin{pmatrix} \sin 2t+\cos 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} - 2B\begin{pmatrix} \sin 2t-\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}\right)\mathrm{e}^t$$

Mit $E=2A$, $F=-2B$ erhält man $\underline{\underline{\vec{x}(t) = E\begin{pmatrix} \sin 2t+\cos 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}\mathrm{e}^t + F\begin{pmatrix} \sin 2t-\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}\mathrm{e}^t}}$

als allgemeine reelle Lösung des Differenzialgleichungssystems.

II. Berechnung einer aus der anderen Komponente:

Wegen $\lambda_{1/2} = 1 \pm 2\mathrm{i}$ kann man jede der beiden Komponenten in der Form $\mathrm{e}^t(E\cos 2t + F\sin 2t)$ ansetzen und daraus mithilfe der gegebenen Differenzialgleichungen die andere Komponente errechnen. Setzt man z.B. $y(t) = \mathrm{e}^t(E\cos 2t + F\sin 2t)$, so folgt aus der zweiten Differenzialgleichung

$$x(t) = \frac{1}{2}(3y(t) - \dot{y}(t)) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t(3E\cos 2t + 3F\sin 2t - E\cos 2t - F\sin 2t + 2E\sin 2t - 2F\cos 2t)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^t(2E\cos 2t + 2E\sin 2t + 2F\sin 2t - 2F\cos 2t) = \mathrm{e}^t\big(E(\sin 2t + \cos 2t) + F(\sin 2t - \cos 2t)\big),$$

so dass man auch auf diesem Wege das unter I. notierte Ergebnis erhält.

Geht man stattdessen von $x(t) = \mathrm{e}^t(E\cos 2t + F\sin 2t)$ aus, so ergibt sich die zweite Komponente zu $y(t) = \dfrac{\dot{x}(t) + x(t)}{4} = \mathrm{e}^t\left(E\,\dfrac{\cos 2t - \sin 2t}{2} + F\,\dfrac{\cos 2t + \sin 2t}{2}\right)$.

b) Setzt man $t = 0$ in die bei a) unter Weg I notierte Lösung ein, so erhält man

$$\vec{x}(0) = E\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + F\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}, \quad E - F = 3,\ E = 5,\ \text{also}\ F = 2.$$

Lösung der AWA also: $\underline{\underline{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}7\sin 2t + 3\cos 2t\\ 2\sin 2t + 5\cos 2t\end{pmatrix}\mathrm{e}^t}}$, d.h. $\begin{aligned} x(t) &= (7\sin 2t + 3\cos 2t)\,\mathrm{e}^t \\ y(t) &= (2\sin 2t + 5\cos 2t)\,\mathrm{e}^t \end{aligned}$