Aufgabe 21.62

a) An einen an einer Feder aufgehängten Massepunkt greife ab dem Zeitpunkt $t=0$ eine periodisch wirkende äußere Kraft $F\sin 5t$ an, die bei Vernachlässigung der Dämpfung eine Schwingung nach der Gleichung $\ddot{x}(t)+16x(t)=F\sin 5t$ auslöst. Ermitteln Sie die Auslenkung des Massepunktes gegenüber der Gleichgewichtslage!

b) Bei welcher äußerer Kraft würde es für die Gleichung $\ddot{x}(t)+16x(t)=F(t)$ zur Resonanz kommen? Begründen Sie mit Hilfe des zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung zu verwendenden Ansatzes, dass es in diesem Falle zur Zerstörung des Systems kommen würde! (Die Lösung muss nicht ausgerechnet werden.)

Lösung:

a) $\ddot{x}(t)+16x(t)=F\sin 5t,\;\; x(0)=\dot{x}(0)=0$

homogen: $\lambda^2+16=0,\;\; \lambda_{1/2}=\pm 4\mathrm{i},\;\; x_{\mathrm{hom}}=A\cos 4t+B\sin 4t$

inhomogen: 5i ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms,

also keine Resonanz,
Ansatz: $x(t)=C\cos 5t+D\sin 5t,$

$$\dot{x}(t)=-5C\sin 5t+5D\cos 5t,$$
$$\ddot{x}(t)=-25C\cos 5t-25D\sin 5t,$$
$$\ddot{x}(t)+16x(t)=-25C\cos 5t-25D\sin 5t+16C\cos 5t+16D\sin 5t$$
$$=-9C\cos 5t-9D\sin 5t=F\sin 5t,$$
$$C=0,\; D=-\frac{F}{9},\;\; x(t)=-\frac{F}{9}\sin 5t+A\cos 4t+B\sin 4t,$$
$$\dot{x}(t)=-\frac{5F}{9}\cos 5t-4A\sin 4t+4B\cos 4t,$$
$$x(0)=A=0,\;\; \dot{x}(0)=-\frac{5F}{9}+4B=0,\;\; B=\frac{5F}{36},$$
$$\underline{\underline{x(t)}}=-\frac{5F}{9}\sin 5t+\frac{5F}{36}\sin 4t=\underline{\underline{F\,\frac{5\sin 4t-4\sin 5t}{36}}}$$

b) Der Resonanzfall würde vorliegen, wenn die rechte Seite die Form $\mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos\beta t+B\sin\beta t)$ hat, wobei $\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms der homogenen Gleichung sind, also $\alpha\pm\beta\mathrm{i}=\pm 4\mathrm{i}$, d.h. bei rechter Seite der Form $A\cos 4t+B\sin 4t$ (Erregung mit Frequenz der freien Schwingung).

Dann wäre der Ansatz mit t zu multiplizieren: $Ct\cos 4t+Dt\sin 4t$. Die Lösung würde also die Form Konstante $*\, t\, *$ Winkelfunktion haben, ihre Amplitude also mit wachsendem t beliebig groß werden, was zur Zerstörung des Systems führen würde.