Aufgabe 21.61

(vgl. Aufgabe 21.60)

a) An einen an einer Feder aufgehängten Massepunkt greife ab dem Zeitpunkt $t=0$ eine periodisch wirkende äußere Kraft $F\sin t$ an, die bei Vernachlässigung der Dämpfung eine Schwingung nach der Gleichung $\ddot{x}(t)+4x(t)=F\sin t$ auslöst. Ermitteln Sie die Auslenkung des Massepunktes gegenüber der Gleichgewichtslage!

b) Bei welcher äußeren Kraft würde es für die Gleichung $\ddot{x}(t)+4x(t)=F(t)$ zur Resonanz kommen? Wieso würde es in diesem Falle zur Zerstörung des Systems kommen?

Lösung:

a) $\ddot{x}(t)+4x(t)=F\sin t,\ \ x(0)=\dot{x}(0)=0$

homogen: $\lambda^2+4=0,\ \ \lambda_{1/2}=\pm 2\mathrm{i},\ \ x_{\text{hom}}=C\cos 2t+D\sin 2t$

inhomogen: Ansatz in Form der rechten Seite:
$$\begin{aligned} x &= A\cos t+B\sin t,\\ \dot{x} &= -A\sin t+B\cos t,\\ \ddot{x} &= -A\cos t-B\sin t. \end{aligned}$$

Einsetzen in inhomogene Dgl.:
$\ddot{x}+4x=-A\cos t-B\sin t+4(A\cos t+B\sin t)=3A\cos t+3B\sin t=F\sin t$
$\Longrightarrow\ \ A=0,\ B=\frac{F}{3}$, spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $x=\frac{F}{3}\sin t$.

Addiert man dazu die bekannte allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung, so erhält man
$$x_{\text{inhom}}(t)=\frac{F}{3}\sin t+\ C\cos 2t+\ D\sin 2t,\quad x(0)=\quad C\ =0,$$
$$\dot{x}_{\text{inhom}}(t)=\frac{F}{3}\cos t-2C\sin 2t+2D\cos 2t,\quad \dot{x}(0)=\frac{F}{3}+2D=0,\ D=-\frac{F}{6}.$$

Die Auslenkung des Massepunktes ist also $x(t)=\frac{F}{3}\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$. Als Summe von Winkelfunktionen bleibt sie beschränkt.

b) Der Resonanzfall würde vorliegen, wenn die rechte Seite Lösung der homogenen Differenzialgleichung wäre, also die Form $E\cos 2t+F\sin 2t$ hätte. Dann müsste der Lösungsansatz mit t multipliziert werden, d.h. die spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung in der Form $y=At\cos 2t+Bt\sin 2t$ gesucht werden. Die Lösung würde also die Form Konstante $*\ t\ *$ Winkelfunktion haben, ihre Amplitude also mit wachsendem t beliebig groß werden, was zur Zerstörung des Systems führen würde.

Aus der Lösung von Aufgabe 21.60b) kann z.B. die Lösung der Anfangswertaufgabe $\ddot{x}(t)+4x(t)=\sin 2t,\ \ x(0)=\dot{x}(0)=0$ ermittelt werden, sie lautet $x(t)=\frac{1}{8}\sin 2t-\frac{1}{4}t\cos 2t$ und ist offensichtlich unbeschränkt.