Aufgabe 21.60

Lösen Sie die inhomogenen linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

a) $y'' + 4y = \sin x$ und
b) $y'' + 4y = \sin 2x$!

Handelt es sich bei den Lösungen um beschränkte Funktionen?

Lösung:

homogene Dgl.: $y'' + 4y = 0$: $\lambda_2 + 4 = 0$, $\lambda_{1/2} = \pm 2\mathrm{i}$, $y_{\text{hom}} = C\cos 2x + D\sin 2x$

inhomogene Dgl.: allg. Lsg. d. inhom. Dgl. = allg. Lsg. d. hom. Dgl. + spez. Lsg. d. inhom. Dgl.

Suchen spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung durch Lösungsansatz in Form der rechten Seite („Störgliedansatz“): für rechte Seiten der Form $E\cos\alpha x + F\sin\alpha x$ Lösungsansatz $y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$.

a) Ansatz in Form der rechten Seite:
$$\begin{aligned} y &= \quad A\cos x + B\sin x, \\ y' &= -A\sin x + B\cos x, \\ y'' &= -A\cos x - B\sin x \end{aligned}$$

Einsetzen in inhomogene Dgl.:
$$y'' + 4y = -A\cos x - B\sin x + 4(A\cos x + B\sin x) = 3A\cos x + 3B\sin x = \sin x$$
$$\Longrightarrow \quad A=0,\ B=\frac{1}{3},\ \text{spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: } y = \frac{1}{3}\sin x.$$

Addiert man dazu die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung, so erhält man $y_{\text{inhom}}(x) = \dfrac{1}{3}\sin x + C\cos 2x + D\sin 2x$.

b) Versucht man hier die Lösung mit dem Ansatz analog a), also $y = A\cos 2x + B\sin 2x$, so erhält man wegen $y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$ durch Einsetzen in die Differenzialgleichung $y'' + 4y = 0$, die inhomogene Differenzialgleichung $y'' + 4y = \sin 2x$ ist also mit diesem Ansatz nicht erfüllbar. Das ist nicht verwunderlich, ist doch der Ansatz gerade die eingangs hergeleitete Lösung der homogenen Differenzialgleichung.

Es handelt sich um den „Resonanzfall“: Die rechte Seite ist Lösung der homogenen Differenzialgleichung. In diesem Fall muss man den Ansatz in Form der rechten Seite mit x multiplizieren, d.h. in unserem Falle als Ansatz $y = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$ verwenden. Ist die rechte Seite eine Lösung der homogenen Differenzialgleichung, die zu einem n–fachen Eigenwert des charakteristischen Polynoms gehört, so muss die Multiplikation mit x^n erfolgen.

Ansatz (Resonanz):
$$\begin{aligned} y &= \quad Ax\cos 2x + Bx\sin 2x \\ y' &= \quad A\cos 2x - 2Ax\sin 2x + B\sin 2x + 2Bx\cos 2x \\ y'' &= -2A\sin 2x - 2A\sin 2x - 4Ax\cos 2x + 2B\cos 2x + 2B\cos 2x - 4Bx\sin 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''+4y &= -4A\sin 2x - 4Ax\cos 2x + 4B\cos 2x - 4Bx\sin 2x + 4(Ax\cos 2x + Bx\sin 2x) \\ &= -4A\sin 2x + 4B\cos 2x = \sin 2x \quad \Longrightarrow \quad A = -\frac{1}{4},\ B=0, \end{aligned}$$

spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $y = -\dfrac{1}{4}x\cos 2x$.

Addiert man dazu die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung, so erhält man $y_{\text{inhom}}(x) = -\dfrac{1}{4}x\cos 2x + C\cos 2x + D\sin 2x$.

Während die Lösung von a) eine Linearkombinationen von Winkelfunktionen und damit beschränkt ist, wird in der Lösung von b) $\cos 2x$ mit x multipliziert, sie ist deshalb unbeschränkt.

Also ist die Lösung im Resonanzfall unbeschränkt, im anderen Fall beschränkt. Beschreibt die Aufgabe eine durch die rechte Seite erzwungene Schwingung, so erfolgt im Resonanzfall die Anregung mit der Frequenz der freien Schwingung. Die Auslenkung wird dann beliebig groß: Resonanzkatastrophe.

Alternative Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung mit Variation der Konstanten (sehr aufwändig)

a) Ansatz Var. d. Konst.: $y = C(x)\cos 2x + D(x)\sin 2x,$
$$y' = C'\cos 2x - 2C\sin 2x + D'\sin 2x + 2D\cos 2x$$

Da sich die Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung als Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Differenzialgleichung darstellen lässt und letztere bereits bekannt ist, wird nur eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung benötigt. Der Ansatz enthält aber 2 gesuchte Funktionen $C(x)$ und $D(x)$. Deshalb ist eine zusätzliche Bedingung formulierbar, die wir so wählen, dass beim nächsten Differenzieren keine 2. Ableitungen entstehen:

$\boxed{C'\cos 2x + D'\sin 2x = 0}$.

Dann ergibt sich
$$\begin{aligned} y' &= -2C\sin 2x + 2D\cos 2x, \\ y'' &= -2C'\sin 2x - 4C\cos 2x + 2D'\cos 2x - 4D\sin 2x. \end{aligned}$$

Einsetzen in inhomogene Differenzialgleichung:
$$\begin{aligned} y''+4y &= -2C'\sin 2x - 4C\cos 2x + 2D'\cos 2x - 4D\sin 2x + 4C\cos 2x + 4D\sin 2x \\ &= -2C'\sin 2x + 2D'\cos 2x = \sin x \end{aligned}$$

Zusätzlich muss die Bedingung von oben erfüllt werden, so dass sich für C', D' folgendes Gleichungssystem ergibt:
$$\begin{array}{rl|rl} -2C'\sin 2x + 2D'\cos 2x = \sin x & \cdot \cos 2x & -2C'\sin 2x\cos 2x + 2D'\cos^2 2x = & \sin x\cos 2x \\ C'\cos 2x + \quad D'\sin 2x = \quad 0 & \cdot 2\sin 2x & 2C'\cos 2x\sin 2x + 2D'\sin^2 2x = & 0 \\ \hline & & 2D' \quad = & \sin x\cos 2x \end{array}$$

$$D' = \frac{1}{2}\sin x\cos 2x, \quad C' = -D'\,\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{1}{2}\sin x\sin 2x$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big), \quad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$C = -\frac{1}{2}\int \sin x\sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\big(\cos 3x - \cos x\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin x,$$
$$D = \frac{1}{2}\int \sin x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\big(-\sin x + \sin 3x\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{12}\cos 3x$$

(jeweils nur spezielle Lösung gesucht, siehe oben!)

Spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung:
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{12}\sin 3x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin x\cos 2x + \frac{1}{4}\cos x\sin 2x - \frac{1}{12}\cos 3x\sin 2x \\ &= \frac{1}{12}\big(\sin 3x\cos 2x - \cos 3x\sin 2x\big) - \frac{1}{4}\big(\sin x\cos 2x - \cos x\sin 2x\big) \\ &= \frac{1}{12}\sin(3-2)x - \frac{1}{4}\sin(1-2)x = \frac{1}{12}\sin x + \frac{1}{4}\sin x = \frac{1+3}{12}\sin x = \frac{1}{3}\sin x \end{aligned}$$

Addiert man zu der gefundenen speziellen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung, so ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung $y_{\text{inhom}}(x) = \dfrac{1}{3}\sin x + C\cos 2x + D\sin 2x$.

b) Ansatz Var. d. Konst.: $y = C(x)\cos 2x + D(x)\sin 2x$
usw. wie bei a), aber in rechter Seite $\sin 2x$ statt $\sin x$,
deshalb Gleichungssystem für C', D':

$$\begin{array}{rl|rl} -2C'\sin 2x + 2D'\cos 2x = \sin 2x & \cdot \cos 2x & -2C'\sin 2x\cos 2x + 2D'\cos^2 2x = & \sin 2x\cos 2x \\ C'\cos 2x + D'\sin 2x = 0 & \cdot 2\sin 2x & 2C'\cos 2x\sin 2x + 2D'\sin^2 2x = & 0 \\ \hline & & 2D' = & \sin 2x\cos 2x \end{array}$$

$$D' = \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x,\quad C' = -D'\,\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \quad\Rightarrow \sin 2x\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x,\ \sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$C = -\frac{1}{2}\int \sin^2 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \big(\cos 4x - 1\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{4}x,$$

$$D = \frac{1}{2}\int \sin 2x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \sin 4x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{16}\cos 4x$$

(jeweils nur spezielle Lösung gesucht, siehe oben!)

Spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{16}\sin 4x\cos 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x\sin 2x = \frac{1}{16}\big(\sin 4x\cos 2x - \cos 4x\sin 2x\big) - \frac{1}{4}x\cos 2x \\ &= \frac{1}{16}\sin(4-2)x - \frac{1}{4}x\cos 2x = \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x \end{aligned}$$

Addiert man zu der gefundenen speziellen Lösung der inhomgenen Differenzialgleichung die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung, so ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

$$y_{\text{inhom}}(x) = \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\frac{1}{4}x\cos 2x + C\cos 2x + E\sin 2x.$$