Aufgabe 21.59

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y'' - 6y' - 7y = 24\mathrm{e}^x,\ y(0) = y'(0) = 0$!

Lösung:

homogen: $\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0,\ \ \lambda_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9+7} = -1;7,\ \ y_{\text{hom}} = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{7x}$

inhomogen: Ansatz: $y = C\mathrm{e}^x \quad\longrightarrow\quad y' = C\mathrm{e}^x,\ y'' = C\mathrm{e}^x$

$C\mathrm{e}^x - 6C\mathrm{e}^x - 7C\mathrm{e}^x = -12C\mathrm{e}^x = 24\,\mathrm{e}^x,\ \ C = -2,$

allg. Lösung der Dgl.: $y = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{7x} - 2\mathrm{e}^x$

AB:
$$\begin{array}{lrl} y(0) & = & A + B - 2 = 0 \quad |+ \\ y'(0) & = & -A + 7B - 2 = 0 \quad |+ \\ & & 8B - 4 = 0, \end{array}$$

$$B = \frac{1}{2},\ \ A = 2 - B = \frac{3}{2}$$

Lösung der Anfangswertaufgabe: $\underline{\underline{y = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{7x} - 2\mathrm{e}^x}}$

alternativ für die Lösung der inhomogenen Dgl.: Variation der Konstanten

Ansatz: $y(x) = A(x)\mathrm{e}^{-x} + B(x)\mathrm{e}^{7x}$

$y'(x) = A'(x)\mathrm{e}^{-x} - A(x)\mathrm{e}^{-x} + B'(x)\mathrm{e}^{7x} + 7B(x)\mathrm{e}^{7x}$

Da sich die Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung als Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Differenzialgleichung darstellen lässt und letztere bereits bekannt ist, wird nur eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung benötigt. Der Ansatz enthält aber 2 gesuchte Funktionen $A(x)$ und $B(x)$. Deshalb ist eine zusätzliche Bedingung formulierbar, die wir so wählen, dass beim nächsten Differenzieren keine 2. Ableitungen entstehen:

$\boxed{A'\mathrm{e}^{-x} + B'\mathrm{e}^{7x} = 0}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} y' &= -A\mathrm{e}^{-x} + 7B\mathrm{e}^{7x}, \\ y'' &= -A'\mathrm{e}^{-x} + 7B'\mathrm{e}^{7x} + A\mathrm{e}^{-x} + 49B\mathrm{e}^{7x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned} y'' - 6y' - 7y &= -A'\mathrm{e}^{-x} + 7B'\mathrm{e}^{7x} + A\mathrm{e}^{-x} + 49B\mathrm{e}^{7x} + 6A\mathrm{e}^{-x} - 42B\mathrm{e}^{7x} - 7A\mathrm{e}^{-x} - 7B\mathrm{e}^{7x} \\ &= -A'\mathrm{e}^{-x} + 7B'\mathrm{e}^{7x} = 24\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Zusätzlich muss die Bedingung von oben erfüllt werden, so dass sich für A', B' folgendes Gleichungssystem ergibt:

$$\left.\begin{array}{rl} A'\mathrm{e}^{-x} + B'\mathrm{e}^{7x} = 0 & |\cdot 7 \quad |+ \\ -A'\mathrm{e}^{-x} + 7B'\mathrm{e}^{7x} = 24\mathrm{e}^x & \qquad |- \end{array}\right\}\ 8A'\mathrm{e}^{-x} = -24\mathrm{e}^x,\ \ A' = -3\mathrm{e}^{2x},\ \ A = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$$

$$\left.\begin{array}{rl} A'\mathrm{e}^{-x} + B'\mathrm{e}^{7x} = 0 & |+ \\ -A'\mathrm{e}^{-x} + 7B'\mathrm{e}^{7x} = 24\mathrm{e}^x & |+ \end{array}\right\}\ 8B'\mathrm{e}^{7x} = 24\mathrm{e}^x,\ \ B' = 3\mathrm{e}^{-6x},\ \ B = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-6x} + D$$

Damit ergibt sich als allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

$$y = \left(-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} + C\right)\mathrm{e}^{-x} + \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-6x} + D\right)\mathrm{e}^{7x} = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^{7x} = C\mathrm{e}^{-x} + D\mathrm{e}^{7x} - 2\mathrm{e}^x,$$

Einsetzen in die Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$ liefert dann wie oben $A = \frac{3}{2},\ B = \frac{1}{2}$ und damit $\underline{\underline{y = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{7x} - 2\mathrm{e}^x}}$ als Lösung der Anfangswertaufgabe.