Aufgabe 21.53

Lösen Sie die folgenden inhomogenen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

a) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3x}$,
b) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{x}$
c) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}$,
d) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{2x}$,
e) $y'' + 16y = 3\sin 2x$!

Lösung:

a) homogene Dgl.: $y''-3y'+2y=0,\ \lambda^2-3\lambda+2=0,\ \lambda_{1/2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}=1;2,\ y_{\text{hom}}=A\mathrm{e}^{x}+B\mathrm{e}^{2x}$

inhomgene Dgl.: Exponential- und Winkelfunktionen (und Polynome) haben die Eigenschaft, dass sie beim Differenzieren (im Prinzip) in sich selber übergehen. Deshalb kann man bei linearen Differenzialgleichungen **mit konstanten Koeffizienten** eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung in Form der rechten Seite (**Störgliedansatz**) suchen. Zu der so ermittelten Lösung wird die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung addiert, so dass man die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhält.

Ansatz hier: $y=C\mathrm{e}^{3x},\ \ y'=3C\mathrm{e}^{3x},\ \ y''=9C\mathrm{e}^{3x}$,

$$y''-3y'+2y=9C\mathrm{e}^{3x}-9C\mathrm{e}^{3x}+2C\mathrm{e}^{3x}=2C\mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^{3x},\ \ C=\frac{1}{2}$$

spez. Lsg. d. inhom. Dgl.: $y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}$, allg. Lsg. d. inhom. Dgl.: $y=A\mathrm{e}^{x}+B\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}$

b) homogene Dgl.: wie bei a): $y_{\text{hom}}=A\mathrm{e}^{x}+B\mathrm{e}^{2x}$

inhomgene Dgl.: Wählt man analog a) den Ansatz $y=C\mathrm{e}^{x}$, so ergibt sich wegen $y=y'=y''$ $y''-3y'+2y=0$, so dass $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{x}$ nicht erfüllbar ist. Das war auch zu erwarten, e^{x} war ja schon als Lösung der homogenen Differenzialgleichung bekannt.

Es handelt sich um den **Resonanzfall**: Die rechte Seite ist Lösung der homogenen Differenzialgleichung. In diesem Fall muss man den Ansatz in Form der rechten Seite mit x multiplizieren, d.h. in unserem Falle als Ansatz $y=Cx\mathrm{e}^{x}$ verwenden. Ist die rechte Seite eine Lösung der homogenen Differenzialgleichung, die zu einem n–fachen Eigenwert des charakteristischen Polynoms gehört, so muss die Multiplikation mit x^n erfolgen.

Ansatz: $y=Cx\mathrm{e}^{x},\ y'=C\mathrm{e}^{x}+Cx\mathrm{e}^{x},\ y''=2C\mathrm{e}^{x}+Cx\mathrm{e}^{x}$,

$$y''-3y'+2y=2C\mathrm{e}^{x}+Cx\mathrm{e}^{x}-3C\mathrm{e}^{x}-3Cx\mathrm{e}^{x}+2Cx\mathrm{e}^{x}=-C\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x},\ \ C=-1$$

spez. Lsg. d. inhom. Dgl.: $y=-x\mathrm{e}^{x}$, allg. Lsg. d. inhom. Dgl.: $y=A\mathrm{e}^{x}+B\mathrm{e}^{2x}-x\mathrm{e}^{x}$

c) homogene Dgl.: $y''-2y'+y=0,\ \lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0,\ \lambda_{1/2}=1$ (innere Resonanz),
$y_{\text{hom}}=A\mathrm{e}^{x}+Bx\mathrm{e}^{x}$

inhomogene Dgl.: Rechte Seite e^{x} ist Lösung der homogenen Dgl., die zum 2–fachen EW 1 gehört, deshalb kommt weder $C\mathrm{e}^{x}$ noch $Cx\mathrm{e}^{x}$ als Ansatz in Frage, e^{x} muss für den Ansatz mit x^2 multipliziert werden!

Ansatz: $y=Cx^2\mathrm{e}^{x},\ y'=2Cx\mathrm{e}^{x}+Cx^2\mathrm{e}^{x},\ y''=2C\mathrm{e}^{x}+2Cx\mathrm{e}^{x}+2Cx\mathrm{e}^{x}+Cx^2\mathrm{e}^{x}$,

$$y''-2y'+y=2C\mathrm{e}^{x}+4Cx\mathrm{e}^{x}+Cx^2\mathrm{e}^{x}-4Cx\mathrm{e}^{x}-2Cx^2\mathrm{e}^{x}+Cx^2\mathrm{e}^{x}=2C\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x},\ C=\frac{1}{2}$$

spez. Lsg. d. inhom. Dgl.: $y=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x}$, allg. Lsg. d. inhom. Dgl.: $y=A\mathrm{e}^{x}+Bx\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x}$

d) homogene Dgl.: wie bei c): $y_{\text{hom}} = A\mathrm{e}^x + Bx\mathrm{e}^x$

inhomogene Dgl.: Rechte Seite e^{2x} ist keine Lösung der hom. Dgl., also keine Resonanz.

Ansatz: $y = C\mathrm{e}^{2x}$, $y' = 2C\mathrm{e}^{2x}$, $y'' = 4C\mathrm{e}^{2x}$,

$$y'' - 2y' + y = 4C\mathrm{e}^{2x} - 4C\mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^{2x} = C\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}, \quad C = 1$$

spez. Lsg. d. inhom. Dgl.: $y = \mathrm{e}^{2x}$, allg. Lsg. d. inhom. Dgl.: $y = A\mathrm{e}^x + Bx\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$

e) homogene Dgl.: $y'' + 16y = 0$, $\lambda^2 + 16 = 0$, $\lambda = \pm 4\mathrm{i}$, $y_{\text{hom}} = A\cos 4x + B\sin 4x$

inhomogene Dgl.: Rechte Seite $3\sin 2x$ ist keine Lösung der hom. Dgl., also keine Resonanz.

Ansatz: $y = C\cos 2x + D\sin 2x$, $y' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x$, $y'' = -4C\cos 2x - 4D\sin 2x$,

$$\begin{aligned} y'' + 16y &= -4C\cos 2x - 4D\sin 2x + 16C\cos 2x + 16\sin 2x \\ &= 12C\cos 2x + 12D\sin 2x = 3\sin 2x, \quad 12C = 0,\ C = 0,\ 12D = 3,\ D = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Bemerkung: Hier fällt zwar $\cos 2x$ aus dem Ansatz heraus, sobald aber sowohl gerade als auch ungerade Ableitungen in der Gleichung vorkommen, werden unbedingt beide Winkelfunktionen benötigt!

spez.Lsg.inhom.Dgl.: $y = \frac{1}{4}\sin 2x$, allg.Lsg.inhom.Dgl.: $y = A\cos 4x + B\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x$