Aufgabe 21.52

Lösen Sie die Randwertaufgabe $y''+9y=\sin x,\ \ y(0)=2,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$!

Lösung:

homogen: $y''+9y=0,\ \ y=\mathrm{e}^{\lambda x},\ \ \lambda^2+9=0,\ \ \lambda^2=-9,\ \ \lambda_{1/2}=\pm 3\mathrm{i},\quad y_{\text{hom}}(x)=A\cos 3x+B\sin 3x$

inhomogen: $y''+9y=\sin x=1\,\mathrm{e}^{0x}\sin x=P_0(x)\mathrm{e}^{\alpha x}(0\cos\beta x+1\sin\beta x)$,
$P_0(x)=1,\ \ \lambda=\alpha\pm\beta\mathrm{i}=\pm\mathrm{i}$ (keine NS d. char. Pol. $\rightarrow$ keine Resonanz), $\ Q_0(x)=\widetilde{C}$

Ansatz: $y(x)=Q_0(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\widetilde{\widetilde{C}}\cos\beta x+\widetilde{\widetilde{D}}\cos\beta x\right)=C\cos x+D\sin x,$
$\quad y'(x)=-C\sin x+D\cos x,\quad y''(x)=-C\cos x-D\sin x$

$y''+9y=-C\cos x-D\sin x+9C\cos x+9D\sin x=8C\cos x+8D\sin x=\sin x \quad\Longrightarrow\quad C=0,\ D=\frac{1}{8}$

Bemerkung: Hier fällt zwar $\cos x$ aus dem Ansatz heraus, sobald aber sowohl gerade als auch ungerade Ableitungen in der Gleichung vorkommen, werden unbedingt beide Winkelfunktionen benötigt!

spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $y(x)=\frac{1}{8}\sin x$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y_{\text{inhom}}(x)=\frac{1}{8}\sin x+A\cos 3x+B\sin 3x$

Randbedingungen: $y(0)=A=2,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{8}-B=1,\ \ B=-\frac{7}{8}$

Lösung der Randwertaufgabe: $y(x)=\frac{1}{8}\sin x+2\cos 3x-\frac{7}{8}\sin 3x$