Aufgabe 21.51

Lösen Sie die folgenden inhomogenen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

a) $y'' - 4y' + 3y = 9x\mathrm{e}^{4x}$,
b) $y'' - 4y' + 3y = 2\mathrm{e}^{x}$,
c) $y'' - 2y' + y = x\mathrm{e}^{2x}$,
d) $y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^{x}$,
e) $y'' - 4y = 8x^3$,
f) $y'' - 2y' = x^2 - x$!

Lösung:

Da es sich um eine lineare Differenzialgleichungen handelt, gilt

$$\boxed{\text{allg. Lsg. d. inhomog. Dgl.} = \text{spez. Lsg. d. inhomog. Dgl.} + \text{allg. Lsg. d. homog. Dgl.}}$$

Die **homogene Differenzialgleichung** wird mit dem Ansatz $y=e^{\lambda x}$ gelöst, s. z.B. Aufgabe 21.36, gelöst.

Die **inhomogene Differenzialgleichung** kann dann mit dem Ansatz der Variation der Konstanten gelöst werden. Für Gleichungen höherer als 1. Ordnung ist dies im Allgemeinen sehr aufwändig (s. z.B. Aufgabe 21.60. Alternativ bei speziellen rechten Seiten:

Lösungsansatz in Form der rechten Seite („Störgliedansatz"):

rechte Seite:		Ansatz:	
	$P_n(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$		$Q_n(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$
	$\uparrow$		$\uparrow$
	Polynom n-ten Grades		beliebiges Polynom n-ten Grades
	$P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$		$Q_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x)$

Resonazfall: Ist das λ (bzw. $\alpha\pm\beta$i) auf der rechten Seite k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen Differenzialgleichung, so ist der angegebene Ansatz mit x^k zu multiplizieren. (Dies schließt den Fall, dass λ keine, das heißt eine 0-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, mit ein: In diesem Fall ist der angegebene Ansatz mit x^0 zu multiplizeiren, d.h. so zu verwenden, wie er ist.)

a) **homogen:** $y''-4y'+3y=0$,

$$y=\mathrm{e}^{\lambda x},\quad \lambda^2-4\lambda+3=0,\quad \lambda_{1/2}=2\pm\sqrt{4-1}=\begin{cases}3\\1\end{cases},\quad y_{\text{hom}}(x)=A\mathrm{e}^{3x}+B\mathrm{e}^{x}$$

inhomogen: $y''-4y'+3y=9x\,\mathrm{e}^{4x}=P_1(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$,
$P_1(x)=9x$, $\lambda=4$ (keine NS d. char. Pol. $\rightarrow$ keine Resonanz), $Q_1(x)=Cx+D$

Ansatz: $y(x)=(Cx+D)\,\mathrm{e}^{4x}$,

$$y'(x)=C\mathrm{e}^{4x}+4(Cx+D)\,\mathrm{e}^{4x}=(4Cx+C+4D)\,\mathrm{e}^{4x},$$
$$y''(x)=4C\mathrm{e}^{4x}+4(4Cx+C+4D)\,\mathrm{e}^{4x}=(16Cx+8C+16D)\,\mathrm{e}^{4x}$$

$$\begin{aligned} y''-4y'+3y &= (16Cx+8C+16D)\,\mathrm{e}^{4x}-4(4Cx+C+4D)\mathrm{e}^{4x}+3(Cx+D)\,\mathrm{e}^{4x} \\ &= (3Cx+4C+3D)\,\mathrm{e}^{4x}=9x\,\mathrm{e}^{4x} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:
$$\begin{aligned} x:&\quad 3C = 9, && C=3 \\ 1:&\quad 4C+3D = 0, && D=-\frac{4}{3}C=-4 \end{aligned}$$

spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $y(x) = (3x-4)\,\mathrm{e}^{4x}$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y_{\text{inhom}}(x) = (3x-4)\,\mathrm{e}^{4x}+A\mathrm{e}^{3x}+B\mathrm{e}^{x}$

b) **homogen:** $y''-4y'+3y=0$ wie bei a): $\lambda_{1/2}=\begin{cases}3\\1\end{cases}$, $y_{\text{hom}}(x)=Ae^{3x}+Be^{x}$

inhomogen: $y''-4y'+3y=2e^{x}=P_0(x)\,e^{\lambda x}$,
$P_0(x)=2,\ Q_0(x)=C,\ \lambda=1:$ einf. NS d. char. Pol. $\rightarrow$ Resonanz, Multipl. des Ansatzes mit x

Ansatz: $y(x)=x\,Q_0(x)\,e^{x}=Cx\,e^{x},\ y'(x)=(C+Cx)\,e^{x},\ y''(x)=(2C+Cx)\,e^{x}$

$y''-4y'+3y=(2C+Cx)\,e^{x}-4(C+Cx)\,e^{x}+3Cx\,e^{x}=-2Ce^{x}=2e^{x} \implies C=-1$

spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $y(x)=-x\,e^{x}$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y_{\text{inhom}}(x)=-x\,e^{x}+Ae^{3x}+Be^{x}=(B-x)\,e^{x}+Ae^{3x}$

c) **homogen:** $y''-2y'+y=0$,
$y=e^{\lambda x},\ \lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0,\ \lambda_{1/2}=1$ (doppelte NS), $y_{\text{hom}}(x)=(A+Bx)\,e^{x}$

inhomogen: $y''-2y'+y=x\,e^{2x}=P_1(x)\,e^{\lambda x}$,
$P_1(x)=x,\ \lambda=2$ (keine NS d. char. Pol. $\rightarrow$ keine Resonanz), $Q_1(x)=Cx+D$

Ansatz: $y(x)=(Cx+D)\,e^{2x}$,
$y'(x)=Ce^{2x}+2(Cx+D)\,e^{2x}=(2Cx+C+2D)\,e^{2x}$,
$y''(x)=2Ce^{2x}+2(2Cx+C+2D)\,e^{2x}=(4Cx+4C+4D)\,e^{2x}$

$$y''-2y'+y=(4Cx+4C+4D)\,e^{2x}-2(2Cx+C+2D)e^{2x}+(Cx+D)\,e^{2x}$$
$$=(Cx+2C+D)\,e^{2x}=x\,e^{2x}$$

Koeffizientenvergleich: $x:\quad C=1,\qquad C=1$
$1:\quad 2C+D=0,\qquad D=-2C=-2$

spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $y(x)=(x-2)\,e^{2x}$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y_{\text{inhom}}(x)=(x-2)\,e^{2x}+(A+Bx)\,e^{x}$

d) **homogen:** $y''-3y'+2y=0$,
$y=e^{\lambda x},\ \lambda^2-3\lambda+2=0,\ \lambda_{1/2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}=\begin{cases}1\\2\end{cases}$, $y_{\text{hom}}(x)=Ae^{x}+Be^{2x}$

inhomogen: $y''-3y'+2y=2e^{x}=P_0(x)\,e^{\lambda x}$,
$P_0(x)=2,\ Q_0(x)=C,\ \lambda=1:$ einf. NS d. char. Pol. $\rightarrow$ Resonanz, Multipl. des Ansatzes mit x

Ansatz: $y(x)=x\,Q_0(x)\,e^{x}=Cx\,e^{x},\ y'(x)=(C+Cx)\,e^{x},\ y''(x)=(2C+Cx)\,e^{x}$

$y''-3y'+2y=(2C+Cx)\,e^{x}-3(C+Cx)\,e^{x}+2Cx\,e^{x}=-Ce^{x}=2e^{x} \implies C=-2$

spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $y(x)=-2x\,e^{x}$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y_{\text{inhom}}(x)=-2x\,e^{x}+Ae^{x}+Be^{2x}=(A-2x)\,e^{x}+Be^{2x}$

e) **homogen:** $y''-4y=0,\ y=e^{\lambda x},\ \lambda^2-4=0,\ \lambda_{1/2}=\pm2,\ y_{\text{hom}}(x)=Ae^{2x}+Be^{-2x}$

inhomogen: $y''-4y=8x^3=8x^3\,e^{0x}=P_3(x)\,e^{\lambda x}$,
$P_3(x)=x^3,\ \lambda=0$ (keine NS d. char. Pol. $\rightarrow$ keine Resonanz), $Q_3(x)=Cx^3+Dx^2+Ex+F$

Ansatz: $y(x)=Cx^3+Dx^2+Ex+F,\ y'(x)=3Cx^2+2Dx+E,\ y''(x)=6Cx+2D$

$y''-4y=6Cx+2D-4(Cx^3+Dx^2+Ex+F)=-4Cx^3-4Dx^2+(6C-4E)x+(2D-4F)=8x^3$

Koeffizientenvergleich:
$$\begin{aligned} x^3 &: & -4C &= 8 & C &= -2 \\ x^2 &: & -4D &= 0 & D &= 0 \\ x &: & 6C-4E &= 0 & E &= \frac{6}{4}C = -3 \\ 1 &: & 2D-4F &= 0 & F &= \frac{D}{2} = 0 \end{aligned}$$

spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $y(x) = -2x^3 - 3x$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y_{\text{inhom}}(x) = -2x^3 - 3x + A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{-2x}$

f) **homogen:** $y'' - 2y' = 0 \quad y = \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) = 0, \quad \lambda_{1/2} = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}, \quad y_{\text{hom}}(x) = A + B\mathrm{e}^{2x}$

inhomogen: $y'' - 2y' = x^2 - x = P_2(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad P_2(x) = x^2 - x, \quad Q_2(x) = Cx^2 + Dx + E,$

$\lambda = 0:$ einf. NS d. char. Pol. $\rightarrow$ Resonanz, Multipl. des Ansatzes mit x

Ansatz: $y(x) = x\,Q_2(x) = Cx^3 + Dx^2 + Ex, \quad y'(x) = 3Cx^2 + 2Dx + E, \quad y''(x) = 6Cx + 2D$

$y'' - 2y' = 6Cx + 2D - 6Cx^2 - 4Dx - 2E = -6Cx^2 + (6C - 4D)x + (2D - 2E)$

Koeffizientenvergleich:
$$\begin{aligned} x^2 &: & -6C &= 1 & C &= -\frac{1}{6} \\ x &: & 6C-4D &= -1 & D &= \frac{6}{4}C + \frac{1}{4} = 0 \\ 1 &: & 2D-2E &= 0 & E &= D = 0 \end{aligned}$$

spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $y(x) = -\frac{1}{6}x^3$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y_{\text{inhom}}(x) = -\frac{1}{6}x^3 + A + B\mathrm{e}^{2x}$