Aufgabe 21.50

Wir betrachten eine Volkswirtschaft. Sei $t \geq 0$ die Zeit, $y(t)$ das Volkseinkommen, $c(t)$ der Konsum und $i(t)$ die Investitionen. Dann lautet das Wachstumsmodell für das Volkseinkommen nach Boulding:

$$\begin{aligned} y(t) &= c(t)+i(t) & & \\ c(t) &= \alpha+\beta y(t) & & \alpha \geq 0,\ 0<\beta<1 \\ y'(t) &= \gamma i(t) & & \gamma>0 \\ y(0) &= y_0 & & \end{aligned}$$

a) Welche Bedeutung haben die Parameter α, β, γ und y_0 ?
b) Ermitteln Sie $y(t)$!
c) Unter welchen Bedingungen wächst, unter welchen Bedingungen sinkt $y(t)$?
   Hinweis: $y_0-\dfrac{\alpha}{1-\beta}=\dfrac{y(0)-c(0)}{1-\beta}$
d) Ermitteln Sie für den Fall, dass $y(t)$ sinkt, wann überhaupt nichts mehr konsumiert werden kann!

(nach Nollau, V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Teubner. 3. Aufl. 1999, S. 190f.)

Lösung:

a) α: einkommensunabhängiger Konsum
   β: (relativer) Anteil des Volkseinkommens, der einkommensabhängig konsumiert wird
   γ: Die Investitionen sollen Einkommen sichern. Ist t die Zeit in Jahren und γ die Rendite der Investition $i(t)$ (effektive Verzinsung des investierten Kapitals), so gilt

$$y'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\underset{\Delta t=1}{\approx} y(t+1)-y(1)=\gamma i(t)$$

   Modell: $\underbrace{y'(t)}_{\substack{\text{Änderung}\\ \text{des Einkommens}}} = \underbrace{\gamma}_{\substack{\text{Verzinsung}\\ \text{des investierten Kapitals}}} i(t)$

   y_0: Volkseinkommen zu Beginn der Betrachtung: $y(0)=y_0$: Anfangsbedingung

b) $i(t)=y(t)-c(t)=y(t)-\alpha-\beta y(t)=(1-\beta)y(t)-\alpha$

$$\left.\begin{aligned} y'(t)&=\gamma(1-\beta)y(t)-\gamma\alpha \\ y(0)&=y_0 \end{aligned}\right\}\ \text{AWA}$$

homogene Dgl.: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\gamma(1-\beta)y(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\gamma(1-\beta)\,\mathrm{d}t$, $\ln y=\gamma(1-\beta)t+\ln C$,

$$y_{\mathrm{hom}}(t)=C\mathrm{e}^{\gamma(1-\beta)t}$$

inhomogene Dgl.: Ansatz: Variation der Konstanten: $y(t)=C(t)\,\mathrm{e}^{\gamma(1-\beta)t}$

$$y'(t)=C'(t)\,\mathrm{e}^{\gamma(1-\beta)t}+C(t)\,\gamma(1-\beta)\,\mathrm{e}^{\gamma(1-\beta)t}=\gamma(1-\beta)\,C(t)\,\mathrm{e}^{\gamma(1-\beta)t}-\alpha\gamma$$

$$C'(t)=-\alpha\gamma\mathrm{e}^{-\gamma(1-\beta)t},\quad C(t)=\frac{-\alpha\gamma}{-\gamma(1-\beta)t}\,\mathrm{e}^{-\gamma(1-\beta)t}+D=\frac{\alpha}{1-\beta}\,\mathrm{e}^{-\gamma(1-\beta)t}+D$$

$$\underbrace{y(t)}_{\substack{\text{allg.Lsg.}\\ \text{inhom.Dgl.}}} = \underbrace{\frac{\alpha}{1-\beta}}_{\substack{\text{spez.Lsg.}\\ \text{inom.Dgl.}}} + \underbrace{D\mathrm{e}^{\gamma(1-\beta)t}}_{\substack{\text{allg.Lsg.}\\ \text{hom.Dgl.}}}$$

AB: $y(0)=\dfrac{\alpha}{1-\beta}+D=y_0 \quad\longrightarrow\quad D=y_0-\dfrac{\alpha}{1-\beta}$

Lösung der AWA: $\underline{\underline{y(t)=\frac{\alpha}{1-\beta}+\left(y_0-\frac{\alpha}{1-\beta}\right)\mathrm{e}^{\gamma(1-\beta)t}}}$

c) Wegen $\gamma>0,\ \beta<1$ ist $\mathrm{e}^{\gamma(1-\beta)t}$ monton wachsend.

$\Longrightarrow\ y(t)$ wächst für $y_0-\frac{\alpha}{1-\beta}>0$,

fällt für $y_0-\frac{\alpha}{1-\beta}<0$.

Es gilt $y_0-\frac{\alpha}{1-\beta}=y(0)-\frac{c(0)-\beta y(0)}{1-\beta}=\frac{y(0)-y(0)\beta-c(0)+\beta y(0)}{1-\beta}=\frac{y(0)-c(0)}{1-\beta}$ (wurde als Hinweis gegeben). Wegen $1-\beta>0$ heißt das:
Ist der Konsum kleiner als das Einkommen ($y(0)-c(0)>0$), so wächst das Einkommen,
ist der Konsum größer als das Einkommen ($y(0)-c(0)<0$), so sinkt das Einkommen.

d) Das Ergebnis von c) ist eine Binsenweisheit. Man kann aber mit Hilfe des Modells auch vorhersagen, wann überhaupt nichts mehr zum Konsum zur Verfügung steht (d.h. auch die Substanz verbraucht ist), wenn mehr konsumiert als eingenommen wird. Das ist dann der Fall, wenn $c(t)=\alpha+\beta\,y(t)=0$ ist. Diese Gleichung muss nach t aufgelöst werden:

$$\alpha+\frac{\beta\alpha}{1-\beta}+\beta\left(y_0-\frac{\alpha}{1-\beta}\right)\mathrm{e}^{\gamma(1-\beta)t}=0$$

$$\alpha+\frac{\beta\alpha}{1-\beta}=\frac{\alpha-\alpha\beta+\beta\alpha}{1-\beta}=\frac{\alpha}{1-\beta}=\beta\underbrace{\left(\frac{\alpha}{1-\beta}-y_0\right)}_{>0,\ \text{da das Einkommen sinkt, siehe c)}}\mathrm{e}^{\gamma(1-\beta)t}$$

$$\frac{\frac{\alpha}{1-\beta}}{\beta\left(\frac{\alpha}{1-\beta}-y_0\right)}=\mathrm{e}^{\gamma(1-\beta)t},\qquad \underline{\underline{t=\frac{1}{\gamma(1-\beta)}\ln\frac{\frac{\alpha}{1-\beta}}{\beta\left(\frac{\alpha}{1-\beta}-y_0\right)}}}$$