Aufgabe 21.48

Lösen Sie die inhomogenen linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten a) $y' = y + 2\sin 2x - \cos 2x$, b) $y' = y + \sin 2x$!

Verwenden Sie dabei zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung den Lösungsansatz in Form der rechten Seite („Störgliedansatz")!

Lösung:

homogen: $y' = y$, Ansatz: $y = C\mathrm{e}^{\lambda x}$, $\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $\lambda = 1$,
allgemeine Lösung der homogenen Dgl.: $y = C\mathrm{e}^x$ (ist auch so offensichtlich)

inhomogen:

a) Inhomogenität: „rechte Seite": $c(x) = 2\sin 2x - \cos 2x$
Ansatz: $y(x) = A\sin 2x + B\cos 2x$, $y'(x) = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$

Einsetzen in inhomogene Dgl.:
$2A\cos 2x - 2B\sin 2x = A\sin 2x + B\cos 2x + 2\sin 2x - \cos 2x = (A+2)\sin 2x + (B-1)\cos 2x$

Koeffizientenvergleich:
$$\begin{array}{lrcl}
\sin 2x: & -2B = A+2 & \quad -A-2B = 2 & |\cdot 2 \\
\cos 2x: & 2A = B-1 & \quad 2A - B = -1 & |+ \\
& & -2A-4B = 4 & |+ \\
& & -5B = 3, & B = -\frac{3}{5},\ A = -2-2B = -\frac{4}{5}
\end{array}$$

spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $y = -\frac{4}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y = C\mathrm{e}^x - \frac{4}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x$

b) Auch für die „rechte Seite" $c(x) = \sin 2x$ ist der Ansatz $y(x) = A\sin 2x + B\cos 2x$ zu verwenden. Analog zu a) führt das zum Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{ll}
\sin 2x: & -2B = A+1 \qquad -4A = A+1,\ \ -5A = 1,\ \ A = -\frac{1}{5},\ \ B = -\frac{2}{5} \\
\cos 2x: & 2A = B
\end{array}$$

spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $y = -\frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y = C\mathrm{e}^x - \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x$